CREATION ET PREMIERE ANNEE DE VIE D'UN LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES

L'expérience du lycée de Vizille (Isère)

Nathalie BRASSET [1], Gabriel THOMAS,
Sara AGGAD, Stéphanie BOLLEREAU,
Chantal DEVARS, Sébastien GRANA,
Sylvie HENRY, Iuliana NAPP, Jean-Marc PILLOT,
Bruno ROUZADE, Nathalie SANTENA,
Fabienne TROUCHET, Yves ZUREK

Irem de Grenoble

Résumé : A la suite de la recommandation exprimée dans le rapport Villani-Torossian et à l'impulsion des collègues de l'équipe motivés, nous avons créé un Laboratoire de mathématiques dans notre lycée. Dans cet article, nous exposons d'une part la mise en place de ce laboratoire et, d'autre part, montrons comment s'organise son activité en collaboration avec des universitaires et l'inspectrice référente : nous avons ainsi deux groupes de travail, l'un centré sur l'Histoire des Mathématiques et l'autre sur la Modélisation. Outre les aspects méthodologiques que nous venons d'évoquer nous consacrerons une partie de l'article à la présentation des résultats des projets initiés pendant l'année scolaire 2018-19.

1. — Contexte

Le lycée polyvalent « Portes de l'Oisans », situé à une vingtaine de kilomètres de Grenoble, est issu de la fusion en septembre 2015 du lycée général technologique et du lycée professionnel. Il regroupe des formations très différentes allant de la 3e PFP à des BTS industriels. Ce lycée accueille environ 1300 élèves (dont 350 pour la SEP - Section Enseignement Professionnel -) et même si le pourcentage de boursiers est inférieur aux moyennes académique et nationale, le public est très hétérogène : l'établissement recrute dans une zone géographique variée, proche du dynamique bassin grenoblois mais aussi de stations de skis et de zones ayant souffert de la désindustrialisation.

Pour l'année scolaire 2018-2019, notre équipe « mathématiques » est constituée de neuf enseignants titulaires en mathématiques, quatre enseignants titulaires en mathématiques-sciences, un stagiaire et un vacataire en temps partagé sur plusieurs établissements. La plupart des enseignants ont plaisir à travailler au lycée et y restent plusieurs années : le taux de mutations est relativement faible.

1 Groupe Informatique au collège et au lycée, Irem de Grenoble

En juillet 2018 nous avons rédigé un document de demande de création du laboratoire, centré sur deux thèmes : la réactivation du travail en mathématique pour les professeurs et la collaboration au sein de l'équipe.

Nous avons orienté ce projet en respectant plusieurs des vœux exprimés dans le rapport Villani-Torossian, publié en février 2018 ; il s'agissait, d'une part, de donner un cadre au travail collectif de l'équipe afin de faciliter le développement professionnel de chacun et, d'autre part, de nous ouvrir vers l'extérieur en ayant l'opportunité de collaborer avec le monde de la Recherche. L'axe relatif aux actions de diffusion auprès des élèves demeure un objectif futur, puisque cette première année a été dédiée à la mise en place *effective* du Laboratoire, pour les acteurs enseignants.

Au lycée de Vizille, le travail en commun est une pratique déjà bien établie. Les actions menées par les enseignants de mathématiques s'inscrivent dans le contrat d'objectifs du lycée ; elles visent à élever le niveau de connaissances, de compétences et de culture des élèves et à réduire les inégalités sociales et territoriales pour la réussite éducative de tous. Nous cherchons ainsi à :

— assurer une cohérence au niveau des attendus pour les élèves :
  - progressions et devoirs communs dans plusieurs filières ;
  - projet d'accompagnement personnalisé commun à toutes les classes de seconde ;
  - opération devoirs de vacances.

— développer une culture scientifique au lycée, inciter les élèves à s'orienter vers des études scientifiques et à avoir de l'ambition :
  - classes de 2de à projet scientifique ;
  - sorties pédagogiques scientifiques ;
  - présentation des études et des métiers des mathématiques et de l'informatique par des enseignants-chercheurs ;
  - organisation de plusieurs concours avec participation de tous les élèves d'une classe, d'un niveau pour certains ou de quelques élèves sélectionnés pour d'autres (Rallye Sciences, Castor Informatique, Al-Kindi, Algorea, Concours Général).

L'objet de cet article n'est pas de développer ces points, qui préexistaient à la création du laboratoire de mathématiques, qui continuent d'exister et vont se nourrir du contact privilégié entretenu avec des enseignants-chercheurs, dans le cadre du laboratoire.

Nous souhaitons décrire la mise en place du projet retenu par notre inspectrice Mme Picard, à l'automne 2018, à savoir le travail sur deux thèmes : Modélisation (référent au lycée : Gabriel Thomas ; référent universitaire : Stéphane Labbé) ; Épistémologie et Histoire des Mathématiques (référente au lycée : Nathalie Brasset ; référent universitaire et membre de l'Irem de Grenoble : Bernard Ycart).

Nous commencerons par évoquer brièvement le projet de juillet 2018 et décrirons la forme finalement adoptée pour l'année scolaire 2018-2019. Puis, pour chacun des deux thèmes nous expliquerons le fonctionnement du groupe de travail, ferons un bilan du travail réalisé et présenterons les objectifs de l'année à venir. La conclusion nous permettra de prendre du recul sur cette première année.

2. — Genèse du projet

En juin 2018, quand nous avons rédigé un projet de laboratoire de mathématique pour le lycée de Vizille nous n'avions pas d'informations sur les moyens humains et matériels qui pouvaient lui être alloués. Le rapport Villlani-Torossian mettait en avant deux axes pour le développement professionnel des enseignants :

— Le travail en commun et la confrontation des pratiques dans l'établissement.

— La collaboration avec le monde de la recherche (Mathématiques, Didactique, Informatique, etc.)

Nous proposions alors de nous appuyer sur les personnes compétentes *en didactique* au sein de l'équipe d'une part, avec l'ambition de mettre en place un travail collectif inspiré des « lesson studies » et *en informatique* d'autre part, notamment pour progresser en algorithmique et programmation en langage Python. La première année nous envisagions un séminaire de travail par trimestre en interne, et avions également demandé un stage R2P2 (Rencontres ou Réseaux Pédagogiques de Proximités) pour la mise en place d'une liaison collège-lycée. À partir de la deuxième année nous souhaitions poursuivre le développement de la liaison collège-lycée et voulions proposer à des universitaires d'intervenir lors de nos séminaires trimestriels.

En octobre 2018 Mme Picard, l'inspectrice référente des laboratoires de mathématiques de l'Académie de Grenoble, a réuni l'équipe afin de préciser le cadre de la mise en place des laboratoires de mathématique dans l'Académie.

En effet, au niveau national les moyens déployés pour la création et le fonctionnement d'un laboratoire de mathématiques sont variables.

Ainsi, à Bordeaux, le Rectorat attribue cent HSE (heures supplémentaires effectives) pour le fonctionnement d'un laboratoire de mathématiques et une IMP (Indemnité de Mission Particulière) au coordonnateur du laboratoire ; à cela s'ajoutent les heures données par l'établissement sur sa marge de dotation (*Vademecum* "Laboratoires de mathématiques" 2018). La participation des collègues de mathématiques est donc obligatoire.

Dans l'Académie de Grenoble, les laboratoires de mathématiques bénéficient de l'expertise d'enseignants-chercheurs et de facilités pour se réunir - la possibilité de banaliser des demi-journées de travail en présence d'un enseignant-chercheur dans le cadre du dispositif - aucune valorisation d'ordre financier n'est prévue pour les enseignants.

A la suite de l'intervention de Mme Picard, compte tenu du fait que nous pouvions nous appuyer sur des compétences extérieures à l'équipe, nous avons repris notre projet. Lors d'une première réunion de constitution du laboratoire, fin octobre, nous avons cherché des thèmes fédérateurs. Dans un premier temps nous avons évoqué les points qui intéressaient les présents et recensés ceux qui souhaitaient participer au laboratoire de mathématiques :

	SG	NS	SB	NB	SH	FT	J-M P	YZ	PA	J-FR	CD	GT	Total
Modélisation		x		X	x	x	x				X	x	7
Mathématiques appliquées / Algorithmique		Python	Python	X	x			x		x		x	5+(2)
Didactique	x										X		2
Epistémologie / Histoire des mathématiques	x	x	x	X	x	x		x		x			8

Nous avons donc décidé de travailler sur deux points majeurs :

— Modélisation (référent : Gabriel Thomas)

— Epistémologie et Histoire des Mathématiques (référente : Nathalie Brasset)

En novembre 2018, Mme Picard nous a mis en lien avec deux universitaires : Stéphane Labbé pour le thème *modélisation* et Bernard Ycart pour le thème *épistémologie et histoire des mathématiques*. Dans la partie suivante nous décrivons le fonctionnement concret du laboratoire de mathématiques de Vizille pendant l'année scolaire 2018-2019.

3. — Fonctionnement pratique, organisation et bilan brut

Nous pouvons résumer cette première année du laboratoire de mathématiques comme une année de tâtonnement, au cours de laquelle nous avons mis en place les groupes de travail et avons cerné, petit à petit, ce que nous pouvions mettre en œuvre dans ce cadre.

Un rapide tour de table lors de la première rencontre nous avait permis de dégager des attentes variées et parfois contradictoires parmi nous. Pour beaucoup nous venions au laboratoire de mathématiques avant tout pour nous former :

— développer notre culture personnelle

— (re)faire des mathématiques, en particulier pour les collègues intéressés par le thème modélisation

Certains d'entre nous insistaient sur la nécessité de pouvoir réinvestir rapidement en classe ce que nous apprenions. Les collègues qui s'intéressaient au thème histoire des mathématiques avaient ainsi l'ambition de proposer des exercices de mathématiques, utilisables en classe, dont les fondements sont historiques.

Nous avons dès le départ créé un espace de travail commun en ligne avec des outils communs. Dans cet espace numérique, on trouve entre-autre, les comptes-rendus de chaque demi-journée de travail en présence des enseignants-chercheurs et des documents partagés qui permettent à chacun d'avoir un retour critique sur les sources bibliographiques consultées par les autres membres du groupe.

Dans le lycée nous avons accès à une petite salle, équipée d'un ordinateur et d'une imprimante, dédiée aux enseignants de mathématiques. Cette salle est peu fréquentée, certains collègues l'utilisent pour travailler dans un endroit calme ; contrairement au laboratoire de sciences expérimentales ce n'est pas un lieu de rassemblement entre collègues. Cette salle étant trop exiguë, les réunions du laboratoire ont généralement eu lieu dans des salles de cours. Le laboratoire de mathématiques des Portes de l'Oisans n'a donc pas de lieu dédié à l'intérieur du lycée, l'espace de travail commun est ainsi uniquement virtuel.

Pour cette année scolaire, nous n'avions aucun aménagement d'emploi du temps ; les rencontres dans le cadre du laboratoire ont donc été fixées en fonction des disponibilités du plus grand nombre et au fur et à mesure : nous n'avions pas en début d'année un calendrier des différentes rencontres. Nous avons privilégié les demi-journées pendant lesquelles nous étions davantage disponibles (vendredi après-midi avant les vacances de Noël, journée du lycéen, semaine du bac blanc, semaine des voyages, semaine du bac, etc.) en essayant de conserver un rythme de rencontre régulier.

Au final, en comptant les réunions non banalisées – réunion de l'équipe en présence de

Mme Picard, réunion de création du laboratoire de mathématiques, deux demi-journées de travail – nous nous sommes retrouvé à dix reprises dont 6 demi-journées, en présence de Stéphane Labbé ou de Bernard Ycart, pour lesquelles nous avons eu des ordres de missions sans frais – ceci a permis aux collègues qui avaient cours d'être déchargés ou d'avoir un motif reconnu par l'institution pour leurs demandes de déplacement d'heures de cours.

Avant de présenter le travail réalisé dans chacun des deux thèmes, nous nous proposons de faire un bilan brut pour cette année scolaire. Treize enseignants ont finalement participé au laboratoire de mathématiques (certains n'ont participé qu'à deux demi-journées en présence des enseignants-chercheurs, d'autres aux 6 demi-journées) ce qui représente un total de 51 demi-journées professeur et seulement 27 heures de cours cumulées toutes classes confondues non assurées par les collègues de mathématiques du lycée.

Nous constatons que selon les attentes de chacun vis-à-vis du laboratoire de mathématiques l'implication a varié entre une participation active avec production à la clef (quelques exemples sont donnés en annexe) et une présence assidue et attentive. Malgré ces niveaux d'implication divers, chacun se retrouve dans ce laboratoire dans la mesure où les collègues qui restent au lycée s'engagent pour l'an prochain et que ceux qui enseigneront dans un établissement proche désirent également poursuivre le laboratoire de mathématiques à Vizille. Nous noterons, enfin, que même si en début d'année plusieurs collègues souhaitaient participer aux deux thèmes, peu sont finalement parvenus à être actif dans les deux sous-groupes. En effet, le rythme de travail sur l'année scolaire est très soutenu et même si l'intérêt de ces rencontres est indéniable, elles s'ajoutent à notre charge de travail et ne correspondent pas à une demi-heure de décharge par semaine, comme proposé dans le rapport (Villani and Torossian, n.d., p. 50)

> « Ainsi, on peut envisager que chaque professeur de l'équipe se voie attribuer 18 heures annualisées dans son service pour une formation de 36 heures annuelles au sein de l'établissement apprenant. »

Le cadre de fonctionnement des demi-journées de travail en présence des enseignants-chercheurs a évolué en cours d'année. Les premières séances correspondent davantage à de l'apport de connaissance par les universitaires et la mise en place d'un cadre de travail, les dernières séances ont été l'occasion pour les collègues de présenter un travail personnel, d'échanger avec les collègues sur cette proposition et de bénéficier d'un regard critique par un expert du domaine.

Cette année, notre laboratoire a été avant tout un lieu d'échanges sur les mathématiques, de temps communs pour les collègues du lycée général et technologique et de la SEP, dans lequel se construit la confiance en toute bienveillance. Ces échanges se sont faits essentiellement en présentiel et peu *via* l'espace de travail en ligne commun : l'utilisation de cet espace est restée marginale. Une des réussites du laboratoire est que plusieurs d'entre nous ont réalisé qu'il était possible de soumettre à l'équipe un travail non finalisé et qu'une réflexion collective autour de cette proposition permettait de la faire évoluer de façon constructive. Cette prise de conscience, que certains considèrent comme une évidence, nous semble importante, nécessaire et déterminante pour la suite du travail qui sera réalisé dans le cadre du laboratoire de mathématiques dans les années à venir.

Nous allons dans les parties qui suivent présenter plus en détail le fonctionnement de chacun des groupes et les « résultats » du laboratoire de mathématiques de Vizille en 2018-2019.

4. — Thème de travail : épistémologie et histoire des mathématiques

Plusieurs collègues impliqués dans le thème histoire des mathématiques avaient un objectif double : il s'agissait, certes d'enrichir notre culture personnelle mais également, de façon plus pragmatique, de réaliser un travail directement exploitable avec les élèves dans le cadre des nouveaux programmes (par exemple : des activités ou des exercices à partir de textes historiques).

Travail réalisé

Nous nous sentions particulièrement concernés par ce thème très actuel. L'importance de l'histoire des mathématiques est, en effet, soulignée dans les nouveaux programmes de lycée, avec pour la première fois des items « histoire des mathématiques » qui pour chaque thème :

— mettent en avant les grandes idées qui ont permis la définition de nouveaux objets mathématiques ;
— donnent l'illustration d'obstacles épistémologiques ;
— nous font connaître des mathématiciens dont les travaux ont contribué au développement des notions enseignées.

Nous pouvons ainsi lire en préambule du programme[2] ("Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique," 2019) dans le paragraphe « organisation du programme » :

> « Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur peut s'appuyer sur l'étude de documents historiques. »

Si ces recommandations paraissent explicites à un public initié, elles le sont peu pour des collègues non familiers de l'histoire des mathématiques. Lors des deux premières demi-journées de travail, Bernard Ycart a fait une lecture critique des items « histoire des mathématiques » pour les différents thèmes des programmes de seconde et de Première. Sa présentation était illustrée d'anecdotes historiques et de diaporamas provenant de son site internet : https://hist-math.fr/. Très bon orateur, Bernard Ycart est passionné d'histoire : son site est un mine d'or comme le souligne Claudine Schwartz (Schwartz, n.d.) ; il est ainsi aisé de voyager avec lui à travers les siècles, les idées et d'arriver à la fin de l'après-midi sans avoir vu le temps passer : c'est tout votre rapport au temps qui est bouleversé !

Ce premier travail a permis à chacun de cerner la mesure de son ignorance et d'acquérir la certitude que plusieurs années seront nécessaires pour maitriser les différentes pistes historiques proposées par le programme et par Bernard Ycart[3]. Entre les deux séances nous avons également écouté plusieurs histoires du site, relatives au thème de travail choisi pour l'année scolaire 2018-2019 : *l'émergence des nombres* et la *naissance de l'algèbre* en lien avec le programme de seconde. Chacun des participants a indiqué dans l'espace de travail en ligne, au sujet des

2 On retrouve ces indications dans les programmes de spécialité de Première et de Terminale.

3 Le site comporte plus de 60 heures d'histoires enregistrées (son fonctionnement est expliqué dans la rubrique Foire aux questions).

histoires qu'il avait écoutées, ce qui lui semblait pertinent et exploitable avec des élèves de lycée, puis il l'a présenté aux collègues lors de la deuxième séance.

Les deux séances suivantes ont été l'occasion pour les collègues qui le souhaitaient de présenter des travaux plus ou moins aboutis, à destination des élèves (quelques exemples sont donnés en annexe), d'échanger avec les autres collègues sur ces documents et de discuter avec Bernard Ycart des nouvelles questions soulevées par ce travail. On retrouve différentes approches dans les réalisations que les collègues ont proposées en travaillant à partir de textes historiques :

— construire un exercice et lui surajouter un enrobage historique (annexe 1),

  L'exercice est facilement accessible aux élèves : il a été conçu pour. L'histoire des mathématiques permet de donner de la profondeur à l'exercice, le discours de l'enseignant lors de l'animation de la séance en classe est particulièrement important.

— à partir d'un texte historique, proposer une mise en forme accessible aux élèves, tout en conservant une activité riche pour le professeur et pour les élèves ; il s'avère en pratique, que cela demande beaucoup d'étapes intermédiaires (annexe 2),

  La difficulté de mise en œuvre en classe d'un tel exercice vient tout d'abord de la longueur : des élèves de seconde ne vont-ils pas se lasser ? Là encore, le discours de l'enseignant est primordial : il s'agit de faire en sorte que les élèves comprennent le contexte de *l'écrit* considéré, les différents outils disponibles à l'époque, la relativité de toute connaissance et l'intérêt des outils et du formalisme actuel. Un tel exercice pourra être envisagé comme un fil rouge, repris à différents moments de l'année.

— autre méthode : étude de la structure complète d'un traité puis recherche et analyse d'un type de problème dans ce traité (annexe 3).

  Pour un enseignant, comprendre la structure générale du texte apporte une vision plus juste des intentions de l'auteur, bien que peu d'exercices d'application proposés soient susceptibles de « fonctionner » en classe.

En parallèle de ce travail, nous avons fait deux *états de l'art* de la prise en compte de l'histoire des mathématiques dans les manuels de seconde (liste des manuels étudiés, annexe 4). Un premier état de l'art, courant janvier, des manuels utilisés pendant l'année scolaire 2018-2019 et un second, en juin, des nouveaux spécimens reçus en fin d'année. La liste des manuels consultés est donnée en annexe. Tous proposent des doubles pages d'histoire des mathématiques par thème ou par chapitre. On y trouve la biographie succincte de quelques mathématiciens importants, des encadrés de taille modeste sur les notions clefs du thème et, dans quelques cas, une frise. Quels que soient les manuels, ces pages sont particulièrement bien illustrées et attractives. En plus de ces sections spécifiques, plusieurs manuels proposent un point histoire de quelques lignes à côté d'un exercice dans lequel on cite le titre d'un texte historique. Nous avons constaté, enfin, que très peu de manuels présentent des extraits de tels textes. Même si l'histoire des mathématiques est davantage mise en avant dans les nouveaux programmes nous n'avons pas observé d'évolution particulière dans les nouveaux spécimens, excepté peut-être pour Déclic 2^{nd}, Edition 2019, bien que cette évolution ne concerne que le thème *nombres réels et calculs* : plusieurs activités et travaux pratiques s'appuient sur des textes historiques.

Objectifs pour l'année scolaire 2019-2020

Il s'agit de poursuivre le travail effectué avec un nouvel enseignant référent au lycée : Sébastien Grana, mais en le recentrant sur une thématique plus précise. Après une longue discussion nous avons retenu comme thème d'étude le nombre $\sqrt{2}$ (et plus généralement les racines carrées).

Si le sujet peut paraître réducteur il a été mûrement pensé lors de la rencontre de juin : le champ de travail est très riche, comme on peut le constater dans le tableau de synthèse en annexe 5.

L'année 2019-2020 sera donc organisée autour de trois temps forts en présence de Bernard Ycart. Un premier sera consacré à l'exposition de plusieurs thèmes gravitant autour de $\sqrt{2}$. Le travail a été segmenté en plusieurs questions, à traiter par chacun des membres de ce groupe. Un deuxième temps permettra d'améliorer ce qui a été réalisé pour le premier temps fort, puis éventuellement de créer des activités pour les élèves.

Il sera ensuite venu le moment de la synthèse annuelle et éventuellement d'une publication lors de la dernière phase.

En conclusion, ce groupe de travail a permis de percevoir l'intérêt de faire de l'histoire des mathématiques avec nos élèves mais surtout pour nous. L'histoire change notre rapport aux mathématiques : nous prenons la mesure de la difficulté de certaines notions étudiées et des obstacles qu'il a fallu surmonter pour arriver à définir proprement certains objets mathématiques ; nous comprenons à quel point les mathématiques se pensent de plusieurs façons (Høyrup, 2010) *; nous pouvons nous convaincre que ce que nous enseignons sert à quelque chose : nous découvrons de nouveaux exemples qui permettent de montrer que les outils étudiés ou les notations modernes ont facilité la résolution de certains problèmes ; enfin, comprendre comment et avec quels outils raisonne un mathématicien donné d'une certaine époque est un entrainement utile qui nous permettra, par exemple, de développer l'habileté à mieux comprendre les procédures mises en œuvre par certains de nos élèves.*

Si l'on revient à l'intérêt de faire de l'histoire avec des élèves, nous sommes maintenant convaincus de l'intérêt de raconter des histoires de mathématiques aux élèves pour récupérer leur attention si besoin mais surtout pour modifier le rapport enseignant-élève. Ce travail nous a également fait prendre conscience de la difficulté d'aller au-delà de l'anecdote et de proposer aux élèves des activités et des exercices en lien avec l'histoire : leur permettre de se confronter à des exercices aux fondements historiques en faisant passer les grandes idées et sans être parasité par des difficultés techniques.

*Pour finir, le travail en commun et les échanges sur un thème maitrisé partiellement stimulent intellectuellement et entretiennent la curiosité ; nous avons pu, par exemple, nous replonger pour certains et découvrir pour d'autres des publications de l'*APMEP *ou de l'*IREM.

5. — Thème de travail : modélisation

Une partie des collègues a travaillé sur le vaste thème de la modélisation. Les axes principaux étaient de réviser et d'enrichir notre culture personnelle sur le sujet, et de pratiquer en développant un ou plusieurs modèles, sur des situations proposées par notre universitaire référent. En effet, ce thème permet, après parfois quelques dizaines d'années à enseigner dans le cadre fermé du lycée, d'adopter un autre point de vue sur les mathématiques : de constater leur dynamique et en particulier leurs applications concrètes et actuelles. La sempiternelle question de certains élèves : « A quoi ça sert d'apprendre tout ça ? » trouve ainsi des réponses étayées et objectives.

En raison des nombreuses contraintes de la fin d'année, nous n'aurons eu pour cet atelier que deux rencontres : une en février et l'autre fin mai.

Méthodologie

Le but principal de ces ateliers est de se former sur des modèles différentiels, que les participants vont eux-mêmes définir, puis de les simuler avec un tableur ou *via* un langage de programmation (Python, système XCAS, …).

La première journée fut l'occasion de découvrir le travail de Stéphane Labbé du laboratoire Jean Kuntzmann (LJK) de l'Université de Grenoble : encadrement de thésards et production de modèles mathématiques de simulation de phénomènes physiques, à base d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) : par exemple un modèle de rebond d'une goutte d'eau. D'autre part, pour lancer le thème, M. Labbé a fait un rappel sur les méthodes d'intégration des Equations Différentielles Ordinaires (EDO) ; ce fut l'occasion d'un cours de niveau L3 ou M1, au sein du lycée. Pour finir, M. Labbé nous a proposé deux problèmes de modélisation, à la façon de problèmes ouverts :

— le déclenchement des avalanches

— l'évolution de la population des ours blancs par rapport à l'extension de la banquise

La deuxième journée a été l'occasion d'une immersion des participants dans le laboratoire LJK. Nous avons pour certains, découvert le métier de chercheur en mathématiques. Par ailleurs, un modèle initial de la relation entre populations d'ours polaires, de phoques et surface de la banquise, élaboré entre février et juin, a fait l'objet de la partie principale de la séance (voir annexe 6).

Le projet présenté était un modèle discret, fondé sur des suites récurrentes du 1er ordre. Cependant, Stéphane Labbé a proposé de repartir du système proie-prédateur bien connu de Lotka-Volterra, permettant une révision de l'analyse qualitative des EDO, pour ensuite voir comment y insérer des termes prenant en compte l'influence de la banquise.

Les notions abordées ont été, pour un système de type $X' = F(X)$:

— notion de solution périodique,

— calcul des points stables,

— utilisation du calcul matriciel, déterminant, valeurs propres, pour déterminer la nature du système linéarisé aux points stables,

— analyse qualitative du portrait de phase.

Ensuite, nous avons vu que le terme de banquise modifiait en fait les coefficients constants du système de Lotka-Volterra classique, et pouvait s'interpréter comme donnant de la mobilité au point fixe non trivial (équilibre parfait des populations). Du coup on obtient *a priori*, en réglant bien les paramètres, des solutions oscillant autour de ce point mobile et qui peuvent tendre vers zéro : anéantissement de la population d'ours polaires par exemple.

Ainsi Stéphane Labbé a montré comment le mathématicien élabore un modèle, puis le modifie, tout en donnant une interprétation concrète des équations manipulées et de l'espace des solutions. Cependant ce travail reste ouvert, puisque nous n'avons encore effectué aucune simulation.

Objectifs pour l'année 2019-2020

Là encore il s'agit de poursuivre le travail effectué avec un nouvel enseignant référent : Bruno Rouzade. L'objectif est de paramétrer les coefficients afin de coller à la période 1980-2010 dont les données sont connues. La première simulation faite sur tableur et proposée en annexe 6 donne des résultats encore peu convaincants (il est possible de les améliorer !).

La suite nécessitera de recueillir les données sur cette période passée et de paramétrer correctement les coefficients. Un passage au langage Python parait être une nécessité au vu de la complexité de la simulation.

Nous pourrons mettre en œuvre l'approche concrète, proposée par Stéphane Labbé. En considérant un point de départ (valeurs en 1990 des populations et surface de la banquise) et un point d'arrivée (valeurs estimées ou connues en 2015), il faudra régler les paramètres du système différentiel pour trouver une solution jointive. Pour cela, il indique d'utiliser un algorithme *de tir*, qui fera appel à de l'optimisation, ou un algorithme de type *gradient*, pour tenter de calculer les paramètres corrects.

En conclusion, cet atelier nous a réellement permis de pratiquer les mathématiques, en apprenant ou en revoyant des méthodes concrètes de résolution de problèmes. Plusieurs collègues ont été très intéressés par ce « retour aux études », sans la contrainte de la sanction ou du diplôme ; ceci nous paraît un point fort au sein des laboratoires de mathématiques, que l'on pourrait nommer « la décomplexion de l'enseignant » face à des sujets qu'il ne maîtrise pas. Enfin, le travail en groupe, les échanges autour d'un sujet qui oblige à réfléchir sur un problème vraiment ouvert pour nous, enseignants du secondaire, est une stimulation intellectuelle appréciable.

Conclusion

Nous avons ainsi fait fonctionner le laboratoire en 2018-2019 et c'est une première réussite, dans le sens que, malgré le départ de certains éléments, les collègues s'engagent à poursuivre les deux ateliers l'an prochain ; les nouveaux responsables ont commencé à anticiper le calendrier 2019-2020. En sus, certains des partants comptent rester en lien avec ce laboratoire, tandis que nous souhaitons étendre son rayonnement, auprès de collèges du secteur ou en impliquant des collègues d'autres lycées, qui n'ont pas de Laboratoire de Mathématiques dans leur établissement (en incluant d'ailleurs des collègues volontaires enseignant d'autres disciplines scientifiques).

Nous focalisant sur le développement professionnel des enseignants, nous n'avons pour l'instant pas pu développer l'axe des actions de diffusion et visibilité des mathématiques pour les élèves dans le cadre du laboratoire, même si cela est proposé dans le Vademecum des Laboratoires de Mathématiques. En revanche, nous avons fait participer les enseignants du lycée général et de la SEP à Vizille, et cela va continuer ; ces échanges autour des mathématiques sont primordiaux. L'une des valeurs du rapport Villani-Torossian est « Efficacité, plaisir et ambition pour tous » et s'applique à nous, enseignants, dans le plaisir que l'on peut ressentir en pratiquant les mathématiques.

Pour les deux prochaines années, nous espérons concrètement mieux utiliser l'espace de travail en ligne partagé, en propageant cette habitude de collaborer. D'autre part, nous développerons l'ouverture vers l'extérieur, en intervenant, participant ou organisant des manifestations à destination des élèves (conférences, expositions), ainsi que des rencontres avec d'autres universitaires. Cette année dans le cadre de différents projets nous avons fait venir plusieurs universitaires de l'UGA, ainsi que Gilles Dowek de l'INRIA ; l'Irem de Grenoble et l'association Maths à Modeler sont intervenus auprès des élèves de seconde et, enfin, le CDI du lycée a accueilli pendant un mois l'exposition la grange Vadrouille[4]. Ces actions d'ouverture à destination des élèves seront, l'an prochain, davantage en lien avec les thèmes que nous approfondissons au laboratoire de mathématiques.

Remerciements : Nous tenons à remercier Bernard Ycart et Stéphane Labbé pour leur implication, l'ensemble des connaissances qu'ils nous ont transmises avec bonne humeur, la curiosité qu'ils ont « réveillée » chez nous et pour la relecture de ce document. Nous remercions également notre inspectrice référente Sandrine Picard et Michel Kosa, proviseur du lycée de Vizille, pour l'enthousiasme et le soutien qu'ils ont montré durant le démarrage et la concrétisation de ce projet.

BIBLIOGRAPHIE

Guichard, J.-P., 2017. François Viète, un juriste mathématicien, le créateur de l'algèbre littérale. APMEP, Plot.

Høyrup, J., 2010. L'algèbre au temps de Babylone: quand les mathématiques s' écrivaient sur de l'argile. Vuibert.

IREM de Grenoble groupe d'Histoire, 2017. Les mathématiques en Mésopotamie & Variations sur les aires-Niveaux Collège et Lycée. IREM Grenoble, document pour la classe issu de travaux de groupe de travail.

Lotka, A., J., 1925. Elements of physical biology. Bibliolife DBA Bibilio Bazar II LLC.

Ministère de l'Éducation Nationale, 2019. Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique.

URL : https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=138131

Rashed, R, 2007. Al-Khzarizmi, le commencement de l'algèbre, Paris : Albert Blanchard.

Schwartz, C., n.d. Les histoires de Bernard Ycart - Les nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques URL : http://revue.sesamath.net/spip.php?article1206

Vademecum Laboratoires de mathématiques, 2018.

Villani, C., Torossian, C., 2019. 21 MESURES POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES.

Volterra, V., 1925. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. Nature 1530–35.

Ycart, B., n.d. Histoires de mathématiques. URL : https://hist-math.fr/

4 La Grange Vadrouille est un atelier itinérant constitué d'une vingtaine d'activités mathématiques visant à faire manipuler et réfléchir les élèves sur des thématiques variées : logique, géométrie, numérique… (https://www.la-grange-des-maths.fr/).

ANNEXE 1

Thème épistémologie et histoire :
2^{nde} - Activité sur les identités remarquables

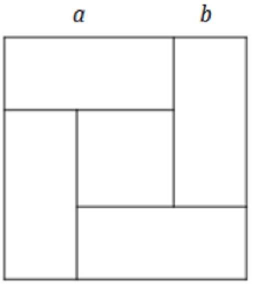
Après avoir visionné le diaporama de Bernard Ycart intitulé « Les pères de l'algèbre », nous avons pu découvrir que les problèmes de géométrie et en particulier de calculs d'aire étaient à l'origine de l'Algèbre. De ce fait, en rapport avec le nouveau programme de seconde exigeant la démonstration suivante : « Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (« Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique », 2019), nous avons essayé de construire une activité simple et efficace faisant apparaitre le lien entre les illustrations géométriques historiques à propos des identités remarquables et le calcul littéral mis en place par la suite par François Viète. Pour cela, nous nous sommes appuyés en particulier sur un article du numéro 59 de la revue PLOT de l'APMEP (Guichard, 2017) décrivant des règles et des démonstrations utilisées par Viète dans les livres de ses recherches.

Comme souvent en essayant de travailler sur l'histoire des mathématiques d'un point de vue pédagogique, nous nous sommes heurtés à la difficulté de synthétiser de nombreux documents historiques d'une part, et à la difficulté de rendre cette synthèse accessible à nos élèves débutant le cycle secondaire d'autre part.

2^{de} - Activité sur les identités remarquables

La naissance de la géométrie est probablement due aux problèmes d'arpentages : les champs étaient généralement des quadrilatères plus ou moins réguliers. Les mésopotamiens, par exemple, ont inventé des méthodes de calcul d'aire et de partage de champ. Les scribes ont laissé des traces de ces méthodes sur des tablettes datées de la fin du 3^e millénaire. Les manipulations d'aires, comme proposé dans l'activité qui suit, étaient pratique courante et font depuis longtemps partie intégrante des traditions mathématiques de pratique de la preuve. Ainsi les démonstrations originelles des théorèmes de Thalès et de Pythagore font usage de la notion d'aire.

Partie A :



Sur la figure ci-contre, a et b représentent des longueurs de côtés avec $a > b$.

1. En écrivant l'aire totale de la figure de deux façons différentes, établir une égalité reliant a et b .
2. On donne $a + b = 12$ et $ab = 20$.
   a) Déterminer $a - b$.
   b) En déduire les valeurs de a et b .

Partie B :

1. « Le double du produit de deux nombres, ajouté à la somme de leurs carrés est égal au carré de leur somme. »
   Traduire cette phrase par une égalité algébrique.
2. Faire une figure permettant de retrouver cette égalité géométriquement.
3. Retrouver cette égalité en utilisant la double distributivité.

ANNEXE 2

Thème épistémologie et histoire :
Étude d'une tablette babylonienne

Le travail qui suit reprend des éléments de l'histoire : « Les pères de l'algèbre qu'avaient-ils en tête ? » que l'on pourra écouter en ligne sur le site de Bernard Ycart (Ycart, n.d.) ainsi qu'une activité proposée dans la brochure Les Mathématiques en Mésopotamie & variations sur les aires publiée en 2017 par l'Irem de Grenoble (IREM, 2017).

Plusieurs pistes de discussions avec les élèves sont possibles :

— Les différentes façons de penser les mathématiques (raisonnement géométrique *versus* raisonnement algébrique)

— L'importance des notations (notamment les ordres de grandeurs, laissés à la charge du lecteur)

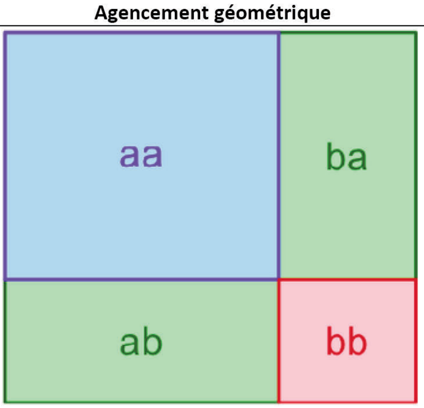
— Les systèmes de numération (système décimal, système sexagésimal)

— Les ensembles de nombres (en particulier, l'ensemble des nombre connus des mésopotamiens)

Ce travail peut être envisagé comme un fil rouge qui est repris à différents moments de l'année en fonction de l'avancement du cours.

1. Ce que l'on connait aujourd'hui sous l'appellation « identités remarquables »

Ce que l'on connait aujourd'hui sous le nom *d'identités remarquables* correspond chez les mésopotamiens à plusieurs raisonnements géométriques (avec des grandeurs a et b positives).

<table>
<tr><th>Agencement géométrique</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td>

https://hist-math.fr/babylone-auto#/13</td><td>L'aire du grand carré est $(a+b)^2$. On l'obtient en additionnant les aires :
du carré en bleu : a^2
des deux rectangles verts : 2 fois ab
du carré en rouge : b^2</td></tr>
</table>

Notation actuelle d'identité remarquable :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Comment les mésopotamiens utilisaient-ils les agencements géométriques pour résoudre des équations ?

Etude du problème n°1 de la tablette BM 13901.

Vidéo de présentation : https://hist-math.fr/babylone-auto# Diapos 0 à 7 (environ 4 minutes).

https://hist-math.fr/babylone-auto#/3

Voici le texte du problème n°1 de la tablette et sa résolution :

« J'ai additionné la surface et le côté de mon carré, c'est 45'
1, l'unité tu poseras. Tu fractionneras en deux 1, c'est 30'
Tu croiseras 30' et 30', c'est 15'
Tu ajouteras 15' et 45', c'est 1. Sa racine carrée est 1
Tu soustrairas 30' que tu as croisé, de 1, c'est 30', le côté du carré. »

Remarque : les ' permettent de repérer l'ordre de grandeur. C'est un ajout afin de rendre le problème plus lisible.

Etape n°1 : De la base 60 à la base 10
Tous les nombres sont donnés en système sexagésimal. Il faut d'une part passer de la base 60 à la base 10 et d'autre part décider d'un ordre de grandeur.

Pour 45' on considérera qu'il s'agit de 45 soixantièmes soit $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

Compléter : 30' correspond à 30 soixantièmes soit ……………………………

15' correspond à 15 soixantièmes soit ……………………………

Etape n°2 :

Expliquer les calculs suivants :

« Tu fractionneras en deux 1, c'est 30' » : ……………………………………………………

« Tu croiseras(*) 30' et 30', c'est 15' » : …………………………………………………..

« Tu ajouteras 15' et 45', c'est 1 » : ……………………………………………………………

« Tu soustrairas 30' que tu as croisé, de 1, c'est 30' » : ……………………………………..

Le texte du problème n°1 de la tablette et sa résolution
(en utilisant notre système de numération : la numération décimale)

« J'ai additionné la surface et le côté de mon carré, c'est $\frac{3}{4}$

1, l'unité tu poseras. Tu fractionneras en deux 1, c'est $\frac{1}{2}$

Tu croiseras $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, c'est $\frac{1}{4}$

(*) Tu croiseras signifie « tu multiplieras ».

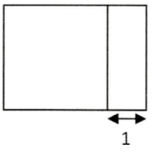
Tu ajouteras $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, c'est 1. Sa racine carrée est 1

Tu soustrairas $\frac{1}{2}$ que tu as croisé, de 1, c'est $\frac{1}{2}$, le côté du carré. »

Etape n°3 : Pourquoi s'agit-il d'utiliser des agencements géométriques ?

« J'ai additionné la surface et le côté de mon carré, c'est $\frac{3}{4}$ »

Les mésopotamiens additionnaient-ils une surface et une longueur (« le côté de mon carré ») ? Dans les faits ils additionnent deux surfaces : celle du carré et celle d'un rectangle de longueur le côté du carré et de largeur 1. On cherche la longueur du côté du carré telle que l'aire du rectangle soit $\frac{3}{4}$.



« 1, l'unité tu poseras. Tu fractionneras en deux 1, c'est $\frac{1}{2}$

Tu croiseras $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, c'est $\frac{1}{4}$

Tu ajouteras $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, c'est 1. Sa racine carrée est 1

Tu soustrairas $\frac{1}{2}$ que tu as croisé, de 1, c'est $\frac{1}{2}$, le côté du carré. »

Conclusion historique : cette lecture du problème et de sa solution sont celles d'Høyrup. C'est sans doute très proche de ce que pouvaient faire les mésopotamiens.

3. Comment traduirait-on ce type de problème et sa résolution avec les notations actuelles ?

On note x le côté du carré.

Le texte du problème n°1 de la tablette et sa résolution (en utilisant notre système de numération : la numération décimale)	Traduction en équations et résolution avec les notations actuelles
J'ai additionné la surface et le côté de mon carré, c'est $\frac{3}{4}$	Aire du carré : ..... $\times$ ... . $= x^2$ Aire du rectangle : $1 \times$ ... .. Equation : $x^2 + \mathbf{1} \times$ ... . . $= \cdots$ ... .
1, l'unité tu poseras. Tu fractionneras en deux 1, c'est $\frac{1}{2}$ Tu croiseras $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, c'est $\frac{1}{4}$	$\mathbf{1} = 2 \times$ ... .$\times$ ... . $= \frac{1}{4}$
Tu ajouteras $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, c'est 1. Sa racine carrée est 1	$x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times x + \cdots$ ... . $= \frac{3}{4} + \cdots$ .. $(x + \cdots$ ... . . $)^2 = 1$ $x + \cdots$ ... .. $= 1$
Tu soustrairas $\frac{1}{2}$ que tu as croisé, de 1, c'est $\frac{1}{2}$, le côté du carré.	$x =$ ....

Vidéo de présentation : https://hist-math.fr/babylone-auto#   Diapos 10, 11 et 12 (entre 4 et 5 mn)

Rappelons que les mésopotamiens raisonnaient sur des grandeurs (longueurs et aires) et que celles-ci étaient donc positives. Peut-on écrire les trois lignes de la case grisée du tableau dans une copie de mathématiques aujourd'hui ? Pourquoi ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Avec les connaissances actuelles indiquer une autre solution de l'équation $x^2 + x = \frac{3}{4}$, ?

……………………………………………………………………………………………

Exercice : En utilisant l'une des interprétations de la méthode de résolution du problème 1 (interprétation géométrique ou interprétation algébrique), résoudre l'équation $x^2 + 3x = \frac{7}{4}$, pour x positif.

Écrire le texte du problème et sa résolution comme il pourrait figurer sur une tablette mésopotamienne (en utilisant le système de numération décimal).

Choix didactique : Avec ou sans fraction

Application : étude du problème n°5 de la tablette BM 13901

« J'ai additionné la surface et le côté de mon carré et le tiers du côté de mon carré : c'est 55'.
Tu poseras 1, l'unité.
Tu ajouteras le tiers de 1, l'unité, soit 20' à 1 : c'est 1.20
La moitié de 1.20, c'est 40', avec 40' tu croiseras : c'est 26.40'
Tu ajouteras à 55' : c'est 1.21.40. Sa racine carrée est 1.10
Tu soustrairas 40', que tu as croisé, de 1.10 : c'est 30', le côté du carré. »

Le texte du problème n°5 de la tablette et sa résolution (en utilisant notre système de numération : la numération décimale)

« J'ai additionné la surface et le côté de mon carré et le tiers du côté de mon carré : c'est $\frac{11}{12}$.

Tu poseras 1, l'unité.

Tu ajouteras le tiers de 1, l'unité, soit $\frac{1}{3}$ à 1 : c'est $\frac{4}{3}$

La moitié de $\frac{4}{3}$, c'est $\frac{2}{3}$, avec $\frac{2}{3}$ tu croiseras : c'est $\frac{4}{9}$

Tu ajouteras à $\frac{11}{12}$: c'est $\frac{49}{36}$. Sa racine carrée est $\frac{7}{6}$

Tu soustrairas $\frac{2}{3}$, que tu as croisé, de $\frac{7}{6}$: c'est , le côté du carré. »

Défi : Dans le problème initial les valeurs numériques sont données dans le système de numération sexagésimal. Expliquer les conventions utilisées.

Numération sexagésimale	Numération décimale	
55'	$\frac{11}{12}$	
40'	$\frac{2}{3}$	
30'	$\frac{1}{2}$	
1.20	$\frac{4}{3}$	
26.40'	$\frac{4}{9}$	
1.21.40	$\frac{49}{36}$	
1.10	$\frac{7}{6}$	

ANNEXE 3

Réflexion sur le traité d'algèbre : Problème extrait du *Livre d'Algèbre* d'Al Khwarizmi Rashed, R, 2007. Al-Khzarizmi, le commencement de l'algèbre, Paris : Albert Blanchard.

Problème et sa solution énoncée par Al Khwarizmi (vers 820).	Traduction en langage algébrique moderne :
Problème <23> - Si on dit : d'un bien, tu multiplies le tiers plus un dirham par le quart plus deux dirhams ; on retrouve le bien plus treize dirhams. On l'infère ainsi : tu multiplies le tiers d'une chose par le quart d'une chose, on a un demi-sixième de *carré* ; tu multiplies deux dirhams par le tiers d'une chose, on a deux tiers de racine ; et un dirham par le quart d'une chose, on a le quart d'une chose ; et deux dirhams par un dirham est deux dirhams ; cela est un demi-sixième de *carré* plus deux dirhams plus onze parties de douze parties de racines, égaux à une racine plus treize dirhams. Élimine deux dirhams de treize dirhams par deux dirhams, il reste onze dirhams. Ôte onze parties de racine, il reste un demi-sixième de racine plus onze dirhams égaux à un demi-sixième de carré ; complète celui-ci en le multipliant par douze, et multiplie tout ce que tu as par douze ; on a un *carré* égal à cent trente-deux dirhams plus une racine. Réduis par cela, tu parviens à la vérité si Dieu le Très-Haut le veut, comme je te l'avais décrit.	$\left(\frac{x}{3}+1\right)\left(\frac{x}{4}+2\right)=x+13$ $\frac{x^2}{12}+\frac{11}{12}x+2=x+13$ $\frac{x^2}{12}=11+\frac{x}{12}$ $x^2=x+132$ Al-Khwārizmi laisse son lecteur effectuer le calcul des racines. L'équation admet deux racines de signes contraires, $x=12$ et $x=11$.

Commentaires : le problème posé ne me semble pas correspondre à une situation réaliste, puisqu'on rencontre un produit de dirhams. Il permet de rendre concret une question de calcul. Cependant, un des intérêts de ce texte n'est pas la résolution, qui n'est pas donnée par l'auteur, mais la mise en équation qui permet de se ramener à un des six problèmes (le sixième) : $ax^2 = bx + c$. En Seconde, la résolution ne peut se faire sans une aide :

— par exemple fournir une factorisation donnant un produit nul, vérifier qu'elle est équivalente au problème initial, puis calculer les racines.

— Appliquer la méthode d'Al-Khwarizmi : faire apparaître une identité remarquable au premier membre. Résoudre en prenant les racines négative et positive.

ANNEXE 4

Références de manuels consultés pour l'état de l'art

Métamaths, Mathématiques 2nd	2019	Belin Éduction
Maths, collection indice	2017	Bordas
Math'x 2nd	2014	Didier
Math'x 2nd	2019	Didier
2nd Mathématiques, collection Barbazo	2014	Hachette Éducation
Déclic 2nd Maths	2014	Hachette Éducation
2nd Mathématiques, collection Barbazo	2019	Hachette Éducation
Déclic 2nd Maths	2019	Hachette Éducation
Odyssée 2nd, Mathématiques	2014	Hatier
Variations Maths 2nd	2019	Hatier
Mathématiques, 2nd	2019	Le livre scolaire
Maths 2nd	2019	Magnard
Transmath 2nd	2014	Nathan
Mathématiques, 2nd Hyperbole	2017	Nathan
Mathématiques, 2nd Hyperbole	2019	Nathan
Transmath 2nd	2019	Nathan

ANNEXE 5

Pistes de réflexion pour le thème $\sqrt{2}$

	Références dans les histoires du site de Bernard Ycart
Médiété ; Héron	https://hist-math.fr/heron-auto#/ diapositives 16 à 19
Constructions géométriques (avant Descartes)	https://hist-math.fr/heron-auto#/ diapositives 5 à 13
Démonstrations d'irrationalité : Géométrique, Anthyphérèse Arithmétique p/q	https://hist-math.fr/hippase-auto#/ diapositives 0 à 18
Algorithmes	https://hist-math.fr/heron-auto#/ diapositives 1, 20, 21
Fractions continues, Bombelli	https://hist-math.fr/heron-auto#/ diapositives 30 à 35
Calcul décimal, Lui Hui	https://hist-math.fr/heron-auto#/ diapositives 22 à 26
Exercices avec énoncés sympas	https://hist-math.fr/demotic-auto#/
Mésolabe d'Eratosthène Racine cubique de 2	https://hist-math.fr/hippocrate-auto# diapositives 21,22,23
Menon de Platon Duplication du carré Pavages de Truchet Flagellation du Christ Stomachion d'Archimède, Tangram	https://hist-math.fr/iamblichus-auto#/ diapositives 10,11,12 https://hist-math.fr/douat-auto#/ diapositives 13,14,15,16,17 https://hist-math.fr/francesca-auto#/ diapositives 11,12 https://hist-math.fr/dosithee-auto#/ diapositives 7 à 21
Alvéoles d'abeilles	https://hist-math.fr/lhuilier-auto#/
Pell-Fermat	https://hist-math.fr/helios-auto#/ diapositives 21 à 38 https://hist-math.fr/heron-auto#/ diapositives 13, 14, 15
Format A4	https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/nr/node16.html
Algorithme calculette	https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ds/node32.html
Méthode d'exhaustion	https://hist-math.fr/babyloneg-auto#/ diapositives 18, 19 https://hist-math.fr/viete-auto#/ diapositives 16, 17, 18
Moyenne géométrique, complexes	https://hist-math.fr/argand-auto#/diapositive 1

ANNEXE 6

Thème modélisation : modèles mathématiques sur la banquise arctique et les ours polaires

Voici notre démarche pour modéliser l'évolution de la population d'ours blancs, en fonction de la surface de la banquise. On fait l'hypothèse que la population des ours blancs est fortement dépendante de la population de phoques, chassables à partir de la banquise.

1. Modèle discret

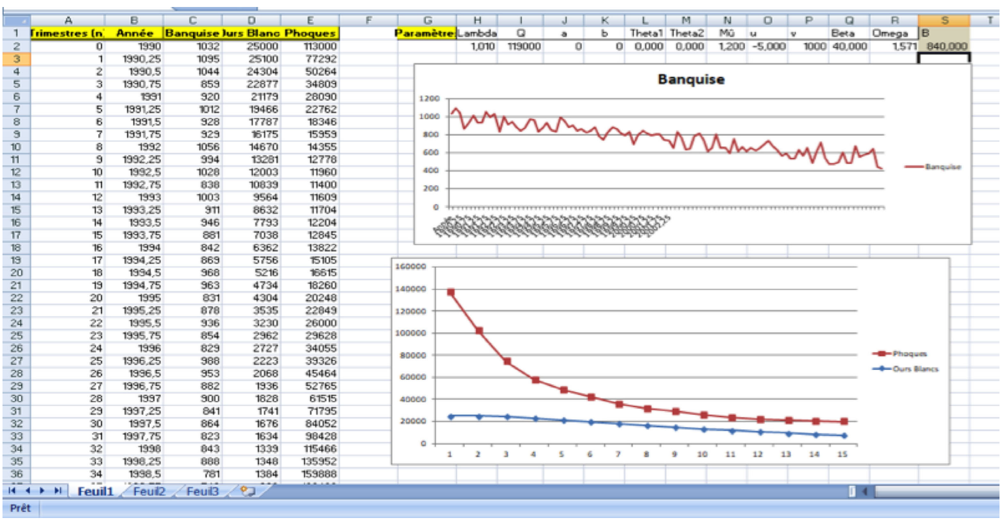
On note n l'année en cours et $b_n = \phi(n)$ la taille de la banquise, p_n le nombre d'ours blancs, q_n le nombre de phoques. On peut alors écrire :

$$\begin{cases} b_n = \phi(n) \\ p_{n+1} = \lambda p_n + 0{,}1 p_n \times \min(0; b_n - B) + \theta_1 (q_n - Q) p_n + a \\ q_{n+1} = \mu q_n - \theta_2 b_n p_n q_n + b \end{cases}$$

Les réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont liés à la mortalité et la natalité naturelles des espèces. La quantité $Q > 0$ donne une sorte de seuil déterminant si la quantité de phoques permet une augmentation ou une diminution du nombre d'ours blancs. θ_2 quantifie le taux de prédation des phoques par les ours. Les réels a et b me paraissent nécessaires pour régler ce modèle. $B > 0$ est un seuil qui provoque une diminution de la population d'ours blancs, si la banquise est trop peu étendue.

Valeurs initiales : on peut prendre p_0 entre 10.000 et 30.000 pour l'année 1980 ou 1990.

Pour q_0 je n'ai pas eu le temps de chercher, mais cela devrait dépasser 100.000 (sachant qu'il y a plusieurs espèces de phoques). La fonction définissant l 'expansion de la banquise peut être de type $b_n = \phi(n) = un + v + ß\sin(\omega n)$. On suppose $u < 0$, $v > 0$, $ß > 0$ et $\omega > 0$. ω traduit le rythme de la variabilité due aux saisons. On pourrait aussi ajouter un terme probabiliste (bruit uniforme à l'expansion de la banquise).



Trimestres (n	Année	Banquise	Jurs Blanc	Phoques
0	1990	1032	25000	113000
1	1990,25	1095	25100	77292
2	1990,5	1044	24304	50264
3	1990,75	859	22877	34809
4	1991	920	21179	28090
5	1991,25	1012	19466	22762
6	1991,5	928	17787	18346
7	1991,75	929	16175	15959
8	1992	1056	14670	14355
9	1992,25	994	13281	12778
10	1992,5	1028	12003	11960
11	1992,75	838	10839	11400
12	1993	1003	9564	11609
13	1993,25	911	8632	11704
14	1993,5	946	7793	12204
15	1993,75	881	7038	12845
16	1994	842	6362	13822
17	1994,25	869	5756	15105
18	1994,5	968	5216	16615
19	1994,75	963	4734	18260
20	1995	831	4304	20248
21	1995,25	878	3535	22849
22	1995,5	936	3230	26000
23	1995,75	854	2962	29628
24	1996	829	2727	34055
25	1996,25	988	2223	39326
26	1996,5	953	2068	45464
27	1996,75	882	1936	52765
28	1997	900	1828	61515
29	1997,25	841	1741	71795
30	1997,5	864	1676	84052
31	1997,75	823	1634	98428
32	1998	843	1339	115466
33	1998,25	888	1348	135952
34	1998,5	781	1384	159888

Paramètre	Lambda	Q	a	b	Theta1	Theta2	Mû	u	v	Beta	Omega	B
	1,010	119000	0	0	0,000	0,000	1,200	-5,000	1000	40,000	1,571	840,000

Figure 1 : exemple de simulation discrète

2. Modèle continu

Durant l'atelier du 28 mai, nous avons revu le système autonome de Lotka-Volterra (Lotka, 1925) et (Volterra, 1925) (ici $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ ne sont pas liés aux coefficients du système discret) :

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\beta p + \gamma pq = p(\gamma q - b) \\ \dfrac{dq}{dt} = \alpha q - \delta pq = q(\alpha - \delta p) \end{cases}$$

ainsi que son analyse qualitative, par linéarisation autour des points d'équilibre $O(0;0)$ et $E(p^* = \frac{\alpha}{\delta}; q^* = \frac{\beta}{\gamma})$.

Il est connu que le point O est un point-selle (deux valeurs propres réelles de signes distincts, α et $-\beta$) et E un point-centre (valeurs propres imaginaires pures conjuguées : $\pm i\sqrt{\alpha\beta}$), ce qui donne des solutions périodiques autour de E.

Un modèle non-autonome, issu de Lotka-Volterra, peut s'écrire

$$\begin{cases} f(t) = b(t) + \varepsilon . \sin(\omega t) \\ \dfrac{dp}{dt} = p(\gamma q - b) + \mu f(t) pq = p[(\gamma + \mu f(t))q - \beta] \\ \dfrac{dq}{dt} = q[(-\delta - \nu f(t))p + \alpha] \end{cases}$$

On peut interpréter ceci comme une perturbation des coefficients γ et δ liées à l'évolution de la banquise ; d'autre part, ceci induit un déplacement du point E qui devient dépendant de t.

La fonction « banquise » $t \longmapsto f(t)$ est faite d'un terme décroissant $t \longmapsto b(t)$ et d'un terme sinusoïdal de variation annuelle.

3. Simulations et réglage des paramètres

La méthode proposée pour obtenir un premier modèle numérique, est de partir de deux données. Les valeurs des populations et l'extension de la banquise en 1980 par exemple (conditions initiales), ainsi qu'en 2010 (cible). On cherche alors un jeu de paramètres qui conduise à une solution (les trois courbes) atteignant ces deux données.

Un algorithme de tir peut être utilisé pour trouver α, β, γ, δ, u, v. Pour ε et pour préciser la fonction $t \longmapsto b(t)$, on procède en amont et indépendamment, à partir d'un tableau de valeurs mesurées de la surface de la banquise sur ces 30 années.

Le pas de temps pour les simulations numériques pourrait être de l'ordre du mois.