

## *Clé en main*

---

### **OU TAMIS LES BILLES ?**

---

#### *Une activité de raisonnement en cycle 3*

Vincent GERARD  
Conseiller Pédagogique,  
Académie de Bordeaux  
Marie-Line CHABANOL  
Maître de Conférences, IMB,  
UMR 5251, Univ. de Bordeaux  
Paul DORBEC  
Professeur des Universités, GREYC,  
UMR 6072, Univ. de Caen Normandie

#### **Résumé et contexte**

Il s'agit dans cette séquence de prévoir, au moyen d'un raisonnement mathématique construit, l'effet d'une superposition de tamis de mailles différentes sur la répartition de billes de diamètres différents lorsqu'elles sont versées au-dessus de cette « tour de tamis ».

Cette séquence a été élaborée dans le cadre d'ateliers scientifiques « mélanges et solutions » cycle 3 pour traiter les mélanges hétérogènes solides et les méthodes de séparation des différents éléments, puis « reconvertie » en situation mathématique et testée dans le cadre de formation Maison Pour La Science en Aquitaine « expérimentons les maths » avec un groupe de PE REP+ Lormont de niveau CE2, et ensuite expérimentée dans une classe de CP

REP+ Lormont sur l'aspect langagier plutôt que logique.

L'expérimentation en CE2 a nécessité entre 4 et 8 heures selon les classes. La situation semble adaptable pour des élèves de collège.

*Objectifs généraux* : travailler des raisonnements mathématiques à partir d'une situation physique, rentrer progressivement dans l'abstraction par l'anticipation du résultat d'une manipulation donnée.

*Programme et socle commun* : outre les aspects langagiers évidents relatifs au domaine 1 du socle commun, cette séquence permet de travailler des compétences relatives à la démarche scientifique, au raisonnement mathématique et à l'argumentation, du cycle 2 au cycle 4 (extraits) :

### Cycle 2 et 3 : extraits du Socle Commun Domaine 4 au sujet des démarches scientifiques

*Fondées sur l'observation, la manipulation et l'expérimentation, les démarches scientifiques ont notamment pour objectif d'expliquer l'Univers, [...] selon une approche rationnelle privilégiant les faits et hypothèses vérifiables. [...] Elles développent chez l'élève la rigueur intellectuelle, l'esprit critique, l'aptitude à démontrer, à argumenter. [...] L'élève manipule, explore plusieurs pistes, procède par essais et erreurs ; il modélise pour représenter une situation ; il analyse, argumente, mène différents types de raisonnements (par analogie, déduction logique...).*

### Cycle 4 : extraits des programmes de Mathématiques

*La formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées. [...] Les pratiques d'investigation (essai-erreur, conjecture-validation, etc.) sont essentielles. [...] Il est important de ménager une progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de ne pas avoir trop d'exigences concernant le formalisme. [...] L'explicitation de la démarche utilisée et la rédaction d'une solution participent au développement des compétences de communication orale et écrite.*

### Objectifs de l'activité

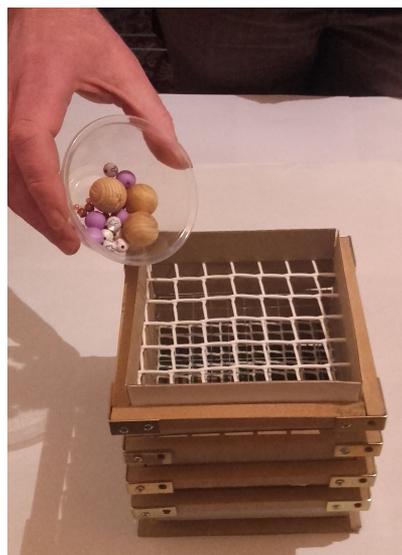
Le dispositif au cœur de l'activité est un ensemble de quatre tamis superposables avec une caisse de base au-dessous, et un mélange de cinq sortes de billes de tailles différentes que l'on verse au-dessus de la tour de tamis.

En bouleversant l'ordre des tamis dans la tour, on obtient des répartitions différentes qui respectent des lois physiques facilement identifiables au niveau des conditions de « blocage » ou non d'une bille par un tamis.

Au cours de la séquence, les élèves découvrent le dispositif, identifient et généralisent des règles de fonctionnement qu'ils énoncent en stabilisant un vocabulaire adapté, puis ils utilisent ces règles :

- pour anticiper le résultat d'une manipulation,
- pour retrouver la manipulation correspondant à un résultat donné,
- pour construire des raisonnements mathématiques permettant de prouver des impossibilités,

Les élèves sont ainsi en particulier amenés à comprendre l'intérêt du raisonnement, qui permet d'arriver à une certitude, sans avoir à essayer tous les cas possibles.



## Choix didactiques et pédagogiques

### *Choix didactiques :*

- La place de la manipulation : les élèves rentrent par la manipulation, se font une représentation du fonctionnement, puis s'affranchissent de la manipulation pour rentrer progressivement dans l'abstraction et bâtir des raisonnements.
- Le choix de donner la possibilité de ne pas utiliser tous les tamis : ce choix ouvre des perspectives pour les sortes de tours possibles (il existe 24 tours différentes de 4 tamis, mais 64 au total si on s'autorise à mettre entre 1 et 4 tamis dans la tour).
- Le repérage des différents tamis et différentes billes pour les différencier et les nommer : le matériel est conçu pour qu'il se fasse spontanément soit par couleur (le tamis jaune), soit par symbole (la bille avec une croix) ou soit par matière (la bille en bois), mais aucun classement à priori par numérotation n'est donné (en fonction de la taille des mailles et du diamètre des billes) pour ne pas induire ce classement et obliger les élèves à se mettre d'accord sur la façon de nommer les différents éléments
- Quelques autres choix non retenus qui apporteraient une complexité de raisonnement supplémentaire: la possibilité de retirer des billes, l'augmentation du nombre de tamis ou de sortes de billes.
- La progression : le questionnement est de plus en plus abstrait (extension possible pour le second degré).

### *Choix pédagogiques :*

- Mettre en place trois types d'organisation : seul, en petit groupe et en groupe-classe, pour développer un langage approprié à la conceptualisation et au raisonnement en dépassant un langage pragmatique et de connivence.
- Exiger une formulation précise des conclusions à communiquer à une personne extérieure à la classe, pour obliger à sortir du langage de connivence.

## Matériel et supports-élève

*Support de manipulation pour chaque groupe d'élèves :* 4 tamis de mailles différentes (18-14-10-6 mm), empilables dans n'importe quel ordre, une caisse réceptacle à placer au-dessous du dernier tamis, un mélange de cinq sortes de billes de diamètres différents (20-16-12-8-4 mm). L'empilement des tamis par ordre décroissant de la maille permet donc d'isoler chaque sorte de billes dans un tamis (ou la caisse). Des plans de ce matériel sont maintenant utilisables sur imprimante 3D, accessibles avec ce lien qui donne aussi accès à des documents complets de présentation de la séquence:

<https://www.thingiverse.com/thing:3245015>

Pour plus d'informations, contacter [vincent.gerard@ac-bordeaux.fr](mailto:vincent.gerard@ac-bordeaux.fr).

**Fiches activité élèves**

*Fiche d'anticipation 1 : anticiper la répartition des billes dans une tour donnée*

The image shows three sequential views of a sieve tower. To the left of each tower is a legend of beads: a large orange sphere, a purple sphere, a white sphere with a black dot, a small red sphere, and a small orange sphere. In the first view (1), the sieve tower has four sieves: yellow (top), red, green, and black (bottom). In the second view (2), the sieves are green, yellow, red, and black. In the third view (3), the sieves are red, green, yellow, and black.

**1** **2** **3**

Pour chaque tour, dans quel tamis va-t-on trouver chaque sorte de billes ?

*Fiche 2 : retrouver la tour à partir d'une répartition donnée*

Quel était l'ordre des tamis dans ces 3 tours ?

The diagram shows three columns, labeled 1, 2, and 3. Each column has four sieve compartments on the left and a corresponding distribution of beads on the right. The beads are: a large orange sphere, a purple sphere, a white sphere with a black dot, a small red sphere, and a small orange sphere. In column 1, the beads are distributed as follows: orange sphere and purple sphere in the top compartment, white sphere with black dot in the second, red sphere in the third, and orange sphere in the bottom. In column 2, the beads are: orange sphere and purple sphere in the top, white sphere with black dot in the second, red sphere in the third, and orange sphere in the bottom. In column 3, the beads are: orange sphere and purple sphere in the top, white sphere with black dot in the second, red sphere in the third, and orange sphere in the bottom.

**1** **2** **3**

Fiche 3 : mêmes activités avec des tours incomplètes

|   |          |  |  |
|---|----------|--|--|
| <p>Mêmes consignes avec des tours incomplètes</p> |          | <p>En haut: Quelle répartition ?    En bas: Quels tamis et dans quel ordre ?</p> |  |
| <p>1</p>  | <p>2</p> | <p>3</p>   |  |
| <p>4</p>  | <p>5</p> | <p>6</p>   |  |

Fiche défi « possible/impossible » : distinguer parmi les 8 propositions de répartition celles qui sont possibles et impossibles à réaliser et justifier

Parmi ces 8 propositions, quelles sont les répartition possibles avec la tour ?

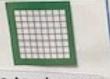
|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| <p>1</p> | <p>2</p> | <p>3</p> | <p>4</p> |
| <p>5</p> | <p>6</p> | <p>7</p> | <p>8</p> |

**Outils mémoire**

élaborés avec les élèves après la manipulation libre, gardée pour les phases sans manipulation :



Photo de la tour qui sépare le plus les différentes sortes de billes.

|  |  la boule en bois |  la boule colorée |  la boule blanche avec la croix |  la boule brillante |  la boule orange |
|--|--|--|--|--|---|
|  le tamis jaune   |                   |                   |                                 |                     |                   |
|  le tamis vert   |                  |                  |                                |                    |                  |
|  le tamis rouge |                 |                 |                               |                   |                 |
|  le tamis blanc |                 |                 |                               |                   |                 |

Le tableau à double entrée de toutes les rencontres entre les différentes sortes de tamis et de billes : ce tableau a en particulier été utilisé en CP.

**Affiche**

des règles découvertes et négociées en groupe classe comme point d'appui à tout raisonnement ultérieur (établie en fin de phase 1)

**Exemple de règles établies dans une classe de CE2**

- La grosse bille ne passe dans aucun tamis. Elle est bloquée par tous.
- La petite bille rose traverse tous les tamis. Elle est toujours en bas dans la boîte.
- Quand plusieurs billes sont dans un même tamis, alors elles sont dans le tamis qui bloque la plus petite d'entre elles.

## Présentation de l'activité

Trois types de tâches s'enchaînent pour permettre aux élèves de passer de la manipulation à l'abstraction et au raisonnement mathématique :

- Phase de manipulation libre : « *Voici un mélange de billes et des tamis. Pour utiliser les tamis on les place au-dessus de la caisse et on verse tout le mélange de billes par-dessus et on observe le résultat. Vous allez expérimenter par groupe et essayer le plus de choses possibles pour découvrir les règles de fonctionnement de ces tamis. Nous noterons toutes les « règles de fonctionnement des tamis » que vous aurez découvertes pour lesquelles toute la classe sera d'accord.* »
- Phase de prédiction 1 : « *Voici des exemples de tours de tamis. Où chaque sorte de billes se sera-t-elle arrêtée ? Nous vérifierons vos prédictions en utilisant les tamis après la mise en commun.* »
- Phase de prédiction 2 : « *Voici les positions finales des billes. Pouvez-vous reconstituer la tour de tamis utilisée ? Nous vérifierons vos prédictions en utilisant les tamis après la mise en commun.* »
- Phase de raisonnement : « *Voici 8 répartitions de billes. Pouvez-vous dire lesquelles sont possibles et lesquelles sont impossibles à obtenir ? Justifiez votre réponse.* »

## Grandes lignes d'un scénario possible

Le scénario se décompose en trois grandes phases.

**Phase 1** - Découverte du matériel en petits groupes et établissement des règles à partir de manipulation. (30 minutes environ)

Il faut encourager les élèves à essayer diverses possibilités, et à ne pas se contenter de « mettre les tamis dans le bon ordre pour séparer les billes » (ce que certains élèves peuvent croire être le but de l'activité).

Il est important de bien définir collectivement les règles de fonctionnement : une règle de fonctionnement est définie comme *quelque chose dont on est sûr qu'elle arrivera à chaque fois*. Ces règles resteront écrites au tableau et elles serviront à la fin comme base des raisonnements. Elles sont déjà l'occasion d'un travail sur le langage pour aboutir à des règles précises et claires. Il est important qu'elles soient comprises par tous.

Cette étape est aussi l'occasion de stabiliser un vocabulaire qui sera commun pour nommer les tamis et les billes : description (par les couleurs) ? Numéros ? Lettres ?

**Phase 2** - Phase de prédictions en petits groupes (binômes), puis mise en commun. Vérification à l'aide du matériel après la mise en commun. (2 séances de 30-40 minutes)

La contrainte est que les élèves ne doivent plus expérimenter : cela évite des stratégies « essais/erreurs » un peu mécaniques, sans avoir à se représenter mentalement le système. On peut laisser la possibilité d'expérimenter en mimant (mais sans aller jusqu'à l'essai) pour les élèves ayant du mal à se représenter le système en train de fonctionner.

Lors de la mise en commun, l'objectif est d'amener les élèves à une réponse unanime après recherche en binôme, avec une argumentation basée sur le retour aux règles et à la fiche-outil mémoire. Cela permet de s'approcher d'un raisonnement de preuve mathématique en favorisant des structures langagières du type : « *comme on sait que à chaque fois..., pour cette sorte de bille..., donc..., si...alors, etc.* »

La vérification à l'aide du matériel vient confirmer ou réfuter les arguments avancés.

Les premières situations sont simples et permettent de vérifier que le principe est bien compris : on donne une tour, on demande la répartition des billes.

Les deuxièmes situations sont plus évoluées, puisqu'on donne la répartition des billes, et on demande de retrouver la tour. On rentre dans l'abstraction, on doit réfléchir, imaginer, à partir des règles données.

Stratégies observées : certains élèves raisonnent en termes de billes (que fait chaque bille ?), d'autres en termes de tamis (qu'arrête chaque tamis parmi les billes qui ont réussi à traverser celui qui est au-dessus ?).

Erreurs standards : garder les billes dans le même ordre que sur la fiche-outil mémoire, en postulant que chaque tamis est « spécialisé » dans une sorte de billes.

La mise en commun dans la phase de prédiction peut conduire à la formulation de nouvelles règles, plus générales (*si on arrête une bille, on arrête toutes les billes plus grosses*).

**Phase 3** - Travail sur le raisonnement, avec la fiche défi « *possible/impossible* », puis mise en commun. (2 séances de 30-40 minutes)

Une enseignante a choisi de laisser le matériel au fond de la classe pendant quelques jours pendant lesquels les élèves pouvaient continuer à réfléchir sur les situations de manière libre.

La mise en commun a parfois été l'objet de vidéos faites par les élèves et envoyées à l'un d'entre nous, ou de rédaction de la réponse bilan.

*Réponses pour les diverses situations* : on appellera ici 1-2-3-4-5 les billes par ordre croissant de taille et ABCD les tamis par ordre croissant de taille de maille. On décrira la tour de bas en haut.

Les différentes situations proposées sur la fiche défi « *possible/impossible* » sont de difficulté variable, et pas forcément progressive.

**La réponse « Possible »** est souvent facile à justifier, puisqu'il suffit de donner une tour.

- Situation 1 : possible. Tamis BACD.
- Situation 4 : possible. Tamis \*\*\*A (tamis A en haut, et en dessous dans n'importe quel ordre).
- Situation 5 : possible. Tamis BCD.
- Situation 8 : possible. Tamis BC.

**La réponse « Impossible »** est plus difficile à justifier ; on pourrait faire toutes les tours possibles, il y en a 64 : il y a  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$  tours possibles de 4 tamis,  $4 \times 3! = 24$  tours possibles de 3 tamis (4 choix pour les 3 tamis à conserver, 3! manières de les ordonner),  $6 \times 2! = 12$  tours de 2 tamis et 4 tours de 1 tamis ; ce nombre de 64, sans être gigantesque, est intuitivement perçu (ils ne le calculent évidemment pas) comme trop grand par les élèves. Face à cette difficulté, certains élèves risquent de se décourager, mais la première situation impossible proposée est assez simple pour les mettre sur la voie : la petite bille n'est pas en bas, cela permet de mettre en évidence une contradiction entre la tour demandée, et les règles de fonctionnement. Ils constatent ainsi que le raisonnement permet d'avoir une certitude, sans essayer toutes ces possibilités.

### Principe du raisonnement pour prouver une impossibilité

Deux types d'informations doivent être apportés :

1. Éléments de description relevés dans la proposition de tour et les implications : il faut trouver dans la proposition un élément (la position d'une bille, la place d'un tamis, une disposition, un ordre, etc.) qui pose problème et éventuellement trouver ce qu'impliquerait la réalisation de cet élément, en respectant les règles.
2. Règle établie impossible à respecter avec cet élément : il faut montrer que cet élément (ou ce qu'il implique pour l'obtenir) ne peut pas correspondre et contrevient aux règles posées comme toujours vraies quelle que soit la tour.

Ce schéma de raisonnement est sur le principe assez similaire au raisonnement par l'absurde que les élèves verront bien plus tard : pour démontrer que la situation est impossible, on suppose le contraire, c'est-à-dire qu'on suppose que la situation est possible, on en déduit des informations sur la tour candidate, jusqu'à arriver à une contradiction. Cela montre que l'hypothèse est fautive, donc que la situation est impossible.

*Exemples d'éléments qui contreviennent aux règles établies* et que les élèves peuvent repérer dans les situations impossibles :

- Situation 2 : impossible. La bille 1 traverse tous les tamis, donc elle doit être en bas.  
Autre élément possible (moins spontané) : la bille 2 ne peut pas être plus bas que la bille 1.

---

**CLE EN MAIN**

---

- Situation 3 : impossible. La bille 5 ne traverse aucun tamis, elle ne peut pas être en troisième position.  
Autre piste de justification possible (mais peu probable) : la bille 4 ne peut pas être plus haut que la bille 5.
- Situation 7 : impossible. La bille 4 ne peut pas être plus haut que la bille 3, puisqu'elle traverse tous les tamis que traverse la bille 3.

On a choisi de mettre une situation particulièrement difficile à justifier pour eux (la situation numéro 6), pour être dans un cas où l'impossibilité n'est pas intuitivement évidente : cela permet de mieux comprendre l'intérêt de formaliser un raisonnement, pour expliquer un résultat à quelqu'un.

- Situation 6 : impossible. La bille 4 ne traverse que le tamis D ; or dans la situation proposée elle doit avoir traversé deux tamis.  
Autre justification : dans la caisse est présente la bille 3 : elle a donc dû traverser tous les tamis de la tour, donc on n'a pas pu mettre dans la tour les tamis A et B. Cela ne laisse que 2 tamis possibles, or il en faut 3.

**Difficultés envisageables :** (pour l'enseignant) deviner les raisonnements des élèves derrière des formulations très imparfaites, et savoir si l'élève a effectivement vu un des éléments essentiels.

Attention, en effet, plusieurs types de raisonnement différents peuvent être tout à fait valides, et il est important de ne pas rejeter une argumentation valide.

**Savoir à expliciter et stabiliser** (formulations possibles) : un raisonnement permet d'être sûr sans essayer toutes les possibilités. S'appuyer sur des règles considérées comme vraies (ou des axiomes, ou des définitions) permet de construire son raisonnement et de mettre en évidence des contradictions.

### Éléments d'analyse a posteriori

On s'était demandé initialement si le côté nécessairement imparfait de la situation physique risquait de poser problème pour l'écriture des règles (les billes sont parfois bloquées sur le côté, il faut parfois secouer un peu pour qu'elles traversent), mais cela n'a jamais été un obstacle pour les élèves, qui « jouent le jeu » de faire comme si la situation était idéale.

Les phases 1 et 2 se font assez aisément, les élèves rentrent bien dans la situation.

Pour la phase 3 : Ils avaient souvent la réponse sans arriver à formaliser de justification. La mise en commun a souvent permis d'élaborer des raisonnements aboutis et compris.

Certaines classes (CE2) avaient fait un travail langagier préalable (*or ... donc ...*) qui a pu être réinvesti pour structurer le raisonnement par l'absurde.

Comme déjà mentionné, il n'était pas toujours évident de lever les implicites dans leurs argumentations. Ainsi sur la situation 6, certains argumentaient « *on a essayé deux possibilités, ça n'a pas marché donc ce n'est pas possible* ». On croyait qu'ils étaient dans une démarche maladroite et

incomplète d'essais de toutes les tours possibles. Après analyse, il s'avère qu'ils avaient tout d'abord réduit le nombre de cas à examiner, et derrière cette formulation se cachait le raisonnement suivant : pour laisser passer la bille 4, on doit mettre en haut le tamis D, et pour bloquer la bille 4 on doit mettre en 3ème position le tamis C ; cela ne laisse plus que deux possibilités pour le tamis en 2ème position, mais aucune de ces deux possibilités ne fonctionne.

Il faut essayer (c'est difficile !) que les élèves comprennent l'intérêt de la justification pour eux, pour la communication vers les autres, et qu'ils ne soient pas seulement à la recherche de phrases « magiques » mais dénuées de sens pour eux qui feront plaisir à l'enseignant. Pour aider les élèves à expliciter leurs arguments, on peut les solliciter à l'aide de « Pourquoi ? » ou leur proposer des situations qui mettent à mal leur formulation imprécise ou trop générale. Il faut faire attention à ce que cette question de « pourquoi » ait bien un sens pour eux et pas uniquement pour l'enseignant. On a ainsi pu voir sur une vidéo une élève effectivement aidée par deux « pourquoi » qui lui permettaient d'explicitier son argument, se retrouver ensuite bloquée par un « pourquoi » dont elle ne voyait pas l'objet.

Le travail d'argumentation (écrit et oral) est particulièrement difficile pour les allophones, mais il leur permet aussi de consolider et de préciser leur vocabulaire, voire de corriger certaines confusions (une formulation telle que « *toutes les billes traversent le tamis jaune, même la bille en bois* » a permis de déceler chez son auteur une confusion en *même* et *sauf*).

Une variante a été expérimentée en Cours Préparatoire. Cette séquence en CP a été l'occasion de :

- Comprendre le fonctionnement du système de tamis, le lien entre la taille de la bille et la taille des mailles.
- Travailler la formulation langagière des observations et leur codage par des symboles.
- Travailler la lecture et l'utilisation du tableau à double entrée « taille de la bille / taille de la maille ».

*Remarque* : Pour compléter le tableau, certains élèves ont anticipé le résultat de la manipulation et justifié ces prédictions par quelques raisonnements simples à partir du traitement des données déjà obtenues.

Nous proposons une variante pour le collège ou le lycée. Celle-ci n'a pas encore été expérimentée. Elle suggère de travailler sur des questions de type « Possible/Impossible » comme par exemple :

| Actions à réaliser   | Possible | Impossible |
|--|----------|------------|
| - Avoir une bille plus basse qu'une autre bille plus petite qu'elle. |          |            |
| - Avoir les billes C et D seules dans un même tamis.                 |          |            |
| - Avoir les billes A et C seules dans un même tamis.                 |          |            |
| - Avoir un tamis vide entre les billes B et C.                       |          |            |
| - Isoler les billes D avec une tour d'un seul tamis.                 |          |            |
| - Isoler la bille C avec une tour de deux tamis                      |          |            |