PYTHAGORE, J'ADORE

Karim ZAYANA

Inspecteur général,
professeur invité à
l'Institut Polytechnique de Paris

Ce texte reprend la trame d'un atelier proposé en avril-mai 2019 à Besançon pour le cinquantenaire des IREM, à Paris dans le cadre d'un plan national de formation, ainsi que dans les INSPÉ de Grenoble, Lyon et Nantes auprès des professeurs stagiaires (mathématiques et math-sciences). Il propose une étude, circonscrite aux programmes du second degré et à l'aune d'un questionnement QQOQCP[1]*, de l'œuvre de Pythagore. Flânons ainsi entre histoire, géographie, physique, musique, philosophie et bien sûr mathématiques...*

Avec esprit, humour et un zeste d'impertinence, on l'a mis en rap [1] et on l'a mis par terre [2] tandis qu'il nous mettait en pleurs [3]. En chanson, les artistes Isaaba, Renaud ou Aldebert, font rimer Pythagore sur nos chagrins d'école. Le grand homme ne sonne pourtant pas qu'avec « hardcore » et « mort »… À notre tour, dansons sur son trésor qui, charrié par les siècles, voyagea jusqu'à nous. L'exercice est plus sérieux qu'il y paraît, la simplicité d'un théorème, fût-il enfantin, n'est souvent qu'illusion. En savourer les mille et un reflets, en saisir l'essence, embrasser sa richesse reste un chemin ardu. La compréhension naît de l'effort, puis le plaisir de la compréhension. Là est la délivrance, point d'orgue culminant d'un processus long et sinueux qu'Heidegger résume en deux mots, chercher et questionner : « Tout questionner est un chercher. Tout chercher tire de ce qu'il recherche la direction qui précède et guide sa démarche. Questionner, c'est, sur le plan de la connaissance, chercher l'élément quant au fait qu'il soit et quant à son être tel. Chercher, sur le plan de la connaissance, s'appelle " recherche " quand est dégagé pour le déterminer ce après quoi la question se pose. » [4]. Toute la difficulté de trouver un sens aux choses est ici rendue par cette phrase, aussi complexe qu'abstraite. Il en va de même pour qui veut apprécier les mathématiques. Heureusement nous disposons d'outils. L'angle pédagogique des compétences en est un, et

1 Qui, Quand, Où, Quoi, Comment, Combien, Pour quoi/qui. Méthode empirique de questionnement circonstancié très utilisée en journalisme (de façon consciente), mais aussi en R&D (de façon sans doute moins formalisée).

nous pourrions interroger en quoi la science des pythagoriciens les valide ou les développe, de *calculer* à *communiquer* en passant par *modéliser* sans oublier les facultés *raisonner*, *représenter*, *chercher* qu'il est d'usage d'effeuiller telles les pétales d'une fleur [5]. Une autre approche, que nous privilégions ici, relève de la méthodologie scientifique. Quand un chercheur analyse un problème, il le soumet un jour ou l'autre à ce crible [6] :

1. C'est de *Qui*, c'est *Quand*, c'est *Où* ?
2. C'est *Quoi* ?
3. C'est *Comment*, c'est *Combien* ?
4. C'est *Pour quoi/qui* ?

Autant de questions qui, en creux, peuvent en appeler d'autres dans un contexte industriel, commercial, économique : « Qui – quel fabricant, quel concurrent – a trouvé ? » « Avec quels moyens, sous quelles hypothèses ? » « Où est le marché ? », « Quand cela sera-t-il prêt ? Est-ce déjà dans le domaine public ? », « En quoi cela consiste-t-il ? », « Comment cela fonctionne-t-il ? », « Combien cela coûte-t-il ? », « À quoi est-ce ou n'est-ce pas utile ? », etc.

Cette analyse QQOQCP [2] nous servira d'entrée dans l'univers de Pythagore. Premières syllabes :

1. — QQO : c'est Qui, c'est Quand, c'est Où ?

Il y a une dimension presque évangélique en Pythagore : littéralement, celui qui fut annoncé (du grec agora – lieu où l'on se rassemble, débat, harangue – équivalent du forum romain) par la pythie (oracle du temple d'Apollon – dieu des arts, également à l'origine du mot python). Au point que son existence demeure mystérieuse. Est-il né à Samos, tout près de la Turquie ? A-t-il vécu à Crotone, aujourd'hui en Italie ? Était-il athlète, philosophe, prédicateur ? Ce qui semble sûr car les l'écrits l'attestent, c'est qu'il y eut bien en Grèce antique, après Thalès et quelques cinq-cents ans avant notre ère, une École florissante de mathématiciens (au sens englobant du terme, les mathématiques signifiant l'ensemble des savoirs accessibles à la pensée humaine). Il vaut mieux ne pas en apprendre davantage, au risque de censurer une œuvre au nom de la morale. Mais, à cette époque, on peut se représenter un homme d'âge mûr, la barbe grisonnante, veines saillantes, torse nu et muscles ruisselants sous un soleil ardent, charismatique chef d'une communauté de jeunes disciples, tous des garçons, dont il éveille notamment l'esprit. Légende ou réalité, le groupe aura péri dans un incendie criminel, assassiné par l'un des leurs [7].

S'il ne s'agit ici que d'une esquisse, il est toujours possible de la développer [8]. Le bon dosage revient à l'enseignant ainsi qu'à ses collègues, les langues, la littérature, l'histoire et la géographie contribuant aussi à l'édifice. Deuxième syllabe :

2. — Q : c'est Quoi ?

C'est beaucoup de choses.

En digne héritier d'Apollon, figure de la musique (et à ce titre, souvent représenté tenant une lyre), Pythagore sait déjà du solfège. Son École aurait ainsi bâti la première gamme à partir de quintes successives [9]. Sensibles à l'harmonie des sons produits en frappant des enclumes de diverses tailles l'idée leur vint, plus portable, de pincer des cordes de longueurs différentes, tendues en leurs deux extrémités. L'ébranlement se propage dans les deux sens, atteint les bouts,

2 Le sigle est parfois sobrement résumé dans son équivalent anglo-saxon par un « multi W's » : Why, When, What, Who, hoW.

s'y réfléchit, parcourt le même chemin en sens inverse, rebondit de nouveau, etc. À l'affaiblissement près, le phénomène est périodique et génère une note, mettons un DO [3]. Pour entendre mieux qu'un fouettement dans l'air, la corde doit être fixée sur une table qui sert à la fois de manche et de caisse de résonance [4]. À l'œil nu, on ne voit rien de net tant la vibration est rapide, plusieurs centaines d'aller-retours à la seconde. Si, à tension identique, la corde est raccourcie de moitié (en l'appuyant contre le manche en son milieu par exemple), l'onde revient deux fois plus vite à son point de départ. La fréquence émise est double de celle de la corde à vide : c'est l'octave, qui se trouve sonner comme [5] la fondamentale et qui est baptisée du même nom. En raccourcissant le manche d'un tiers, les deux tiers restants produisent une fréquence 3/2 fois plus élevée que la corde à vide. La note 3/2 fois plus élevée fait faire un intervalle dit de quinte ; c'est le SOL. Poursuivons avec la quinte de la quinte, à la fréquence 9/4 de la fondamentale, mais aussi 9/8 après retour dans l'octave : le RE. Ainsi de suite jusqu'à obtenir 7 notes que nous dénommons (depuis le moyen-âge) DO, SOL, RE, LA, MI, SI, FA#. Autant de notes que de jours, ou que d'astres mobiles connus à l'époque. Pythagore s'en est tenu là, mais en continuant viennent les DO#, SOL#, RE#, LA#, MI# … SI# qui est la douzième quinte, correspondant à $(3/2)^{12}$, ou encore, après retour à l'octave, à $3^{12}/2^{19}$, soit 1,01 fois la fréquence fondamentale. Miraculeusement, la spirale de quintes se referme presque en un cycle où l'on assimile donc le SI# au DO, figure 1. Voilà qui fit dire à Leibniz bien plus tard, au XVIIIe siècle (mais en latin dans le texte) dans une correspondance avec Goldbach : « la musique est une pratique cachée de l'arithmétique dans laquelle l'esprit ignore qu'il compte ». Éloquent.

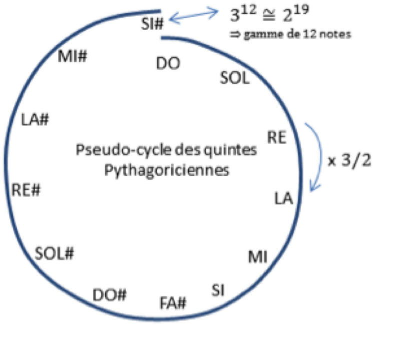

Figure 1 : *spirale de quintes et gamme de Pythagore.*

Figure 2 : *Authentique coupe de Pythagore.*

3 Les Grecs ne les désignaient pas les notes par les noms DO, RE, MI, …. Ce sont des moines du XIe siècle qui les ont ainsi nommées.

4 L'instrument ainsi constitué s'appelle un monocorde.

5 Tout le monde ne l'entend pas de cette oreille ; au besoin, admettons cela comme une convention.

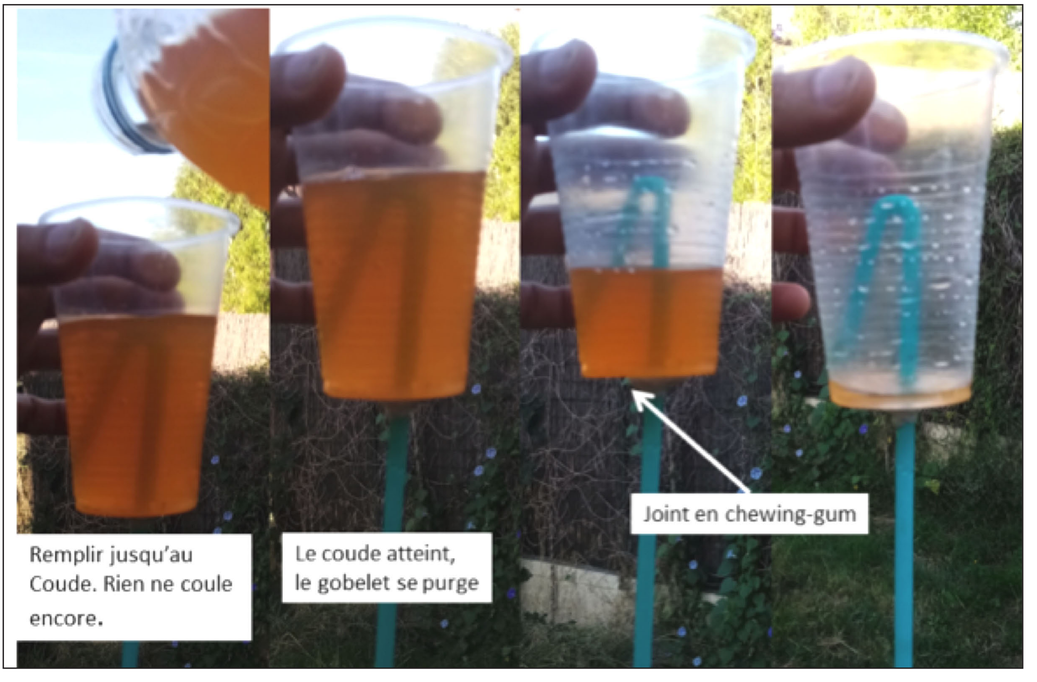

Figure 3 : *Numéro de magie avec un gobelet de Pythagore (en fin de vidange à droite après avoir été rempli jusqu'au niveau du coude).*

Physicien, Pythagore aurait inventé la coupe de Tantale. Ce vase étonnant qui, rempli au-delà d'une certaine jauge, se vide tout seul de son contenu sert (croit-on) à limiter la consommation de vin. Son principe, très simple, repose sur un siphon habilement dissimulé en son centre, dont un montage improvisé d'un gobelet plastique, une paille et un joint de chewing-gum dévoilent le mécanisme (figures 2 et 3). Autre avantage : en plomberie, le système maintient toujours du liquide au fond d'une évacuation, comme dans les toilettes ou la bonde d'un évier. Cette réserve d'eau bloque les remontées d'air indésirables et piège les déchets qui obtureraient ensuite les canalisations.

L'étude méticuleuse des nombres et des affinités propres ou mutuelles qu'ils entretiennent avec leurs diviseurs conduit aux notions arithmétiques de perfection ou d'amitiés.

Un entier est parfait (respectivement excessif, resp. défectif) quand la somme de ses diviseurs stricts lui sont égaux (respectivement supérieur, resp. inférieur). C'est le cas de 28 car $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Quant à 220 et 280, ils forment une paire amiable : la somme des diviseurs stricts de l'un quelconque des deux vaut l'autre, essayez ! Si l'École pythagoricienne s'intéressa à ces propriétés numériques, c'est d'abord pour son théorème de géométrie qu'elle s'est rendue célèbre. « Son » théorème ?

La relation qu'il impose entre les côtés d'un triangle rectangle lui aurait été antérieure, déjà connue des Babyloniens voilà quatre mille ans. Une tablette d'argile découverte en Irak, Plimpton 322 (de son numéro d'enregistrement au sein de la collection éponyme, aujourd'hui conservée à New-York), recense ainsi plusieurs triplets pythagoriciens – pardon pour l'anachronisme – et pas forcément les plus évidents [10]. Citons $a = 60^2$; $b = 54 \times 60 + 10$; $c = 60^2 + 20 \times 60 + 50$, codés tels que en sexagésimal : ils vérifient l'égalité $a^2 + b^2 = c^2$… qu'il est maintenant temps de remonter à sa source,

Théorème 1 (Pythagore) : *Dans un triangle ABC rectangle en C, les longueurs des côtés partagent la relation* $BC^2 + CA^2 = AB^2$.

Resserrons désormais le propos autour de ce résultat dont nous donnons ci-après une démonstration. Troisièmes syllabes (dont le C se trouve, ici, dédoublé),

3. — CC : c'est comment, c'est combien ?

Sans être la seule, prouver est une activité consubstantielle aux mathématiques. On ignore si Pythagore (ou sa communauté) démontra « son » théorème. Cela paraît toutefois vraisemblable car parmi les nombreux raisonnements possibles, l'un d'eux s'inspire directement des travaux, précurseurs, de Thalès :

Démonstration (théorème de Pythagore). Comme les anciens, posons un triangle rectangle en sur son hypoténuse (étymologiquement, le côté qui sous-tient l'angle droit, disposition la plus naturelle donc), figure 4.

Divisons-le en menant la hauteur issue de C jusqu'à son pied H et décomposons l'aire de ABC en deux :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{CAH} + \mathcal{A}_{BCH}$$

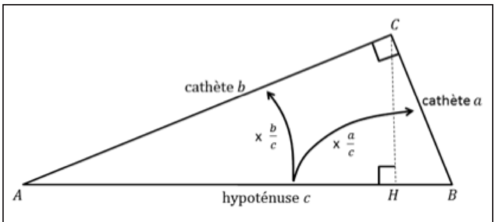

Figure 4 : *le théorème de Pythagore.*

Il n'est pas surprenant d'avoir à considérer des aires, c'est un moyen tangible de produire des carrés. Le triangle CAH est semblable à ABC puisqu'il partage avec lui deux angles. Le coefficient de proportionnalité se retrouve dans le rapport de leurs hypoténuses et intervient, au carré, dans le rapport de leurs aires.

Si bien que $\mathcal{A}_{CAH} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \mathcal{A}_{ABC}$. De même, $\mathcal{A}_{BCH} = \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 \mathcal{A}_{ABC}$.

C'est donc là que les Athéniens s'atteignirent… Comment est-on tombé sur une pareille pépite ? Possiblement en symétrisant d'abord les petits triangles relativement aux côtés $[CA]$ et $[BC]$. Les similitudes des triangles hachurés en figure 5 sautent alors aux yeux. Restait à en formaliser la preuve.

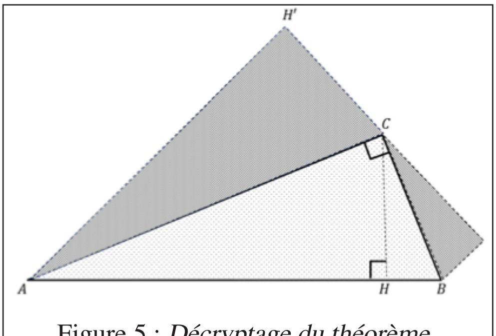

Figure 5 : *Décryptage du théorème.*

Exquise, cette démonstration vient en complément d'autres exposés, certes plus connus mais aussi élégants, telle l'iconique inscription (après rotation) d'un premier carré dans un second, plus grand, menant au(x) calcul(s) de $(a + b)^2$, figure 6 :

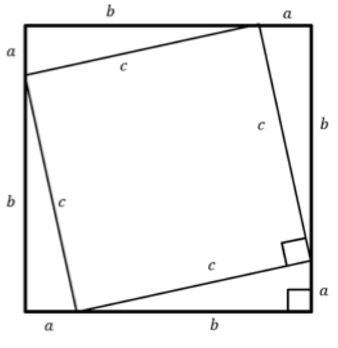

Figure 6 : *le théorème de Pythagore (version 2)*

C'est la marque des géants : comme son aîné le théorème de Thalès, par la seule vérité qu'il énonce, le théorème de Pythagore détient les clés de sa propre réciproque.

Théorème 2 (réciproque du théorème de Pythagore). *Un triangle ABC dont les longueurs des côtés partagent la relation* $BC^2 + CA^2 = AB^2$ *est rectangle en C.*

Démonstration. Soit B' le sommet du triangle $B'AC$ rectangle en C, de cathète $[CB']$ située du côté opposé à B relativement à la droite (CA) et telle que les longueurs CB' et CB soient égales. Appliqué au triangle $AB'C$, le théorème de Pythagore assure l'identité $B'A^2 = AC^2 + CB'^2$ (figure 7).

Par comparaison, sachant déjà $CB' = CB$, nous obtenons $B'A = BA$. Il en résulte que la droite (CA) est médiatrice de $[BB']$. Par le point B' passent deux droites, $(B'B)$ et $(B'C)$ perpendiculaires à une droite donnée, (CA). Via l'axiome d'Euclide, $(B'B) = (B'C)$, puis B', C, B sont alignés, enfin (CA) est perpendiculaire à (CB).

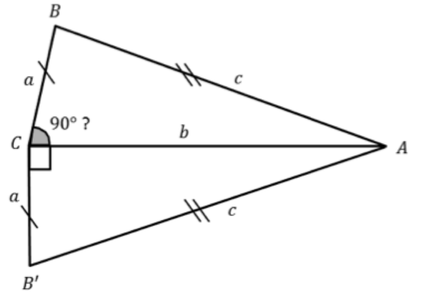

Figure 7 : *la réciproque du théorème de Pythagore.*

Autrement dit, les théorèmes 1 et 2 signent une équivalence dont l'aller paye le retour.

Qu'advient-il du théorème de Pythagore dans d'autres contextes ? Sur un cylindre (sous réserve d'y définir les « lignes droites »), le résultat n'y résiste pas, figure 8 :

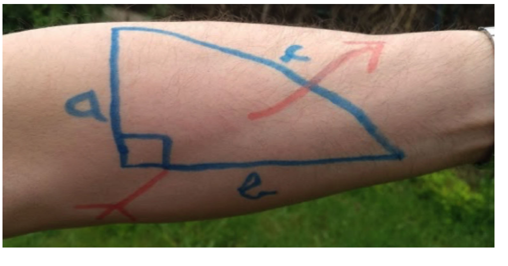

Figure 8 : *Un tatouage non pythagoricien.*

À plat mais quelconque, un triangle s'en affranchit… à moins d'adjoindre un terme cosinusoïdal qu'intègre la formule dite d'Al Kashi (environ 1400 après J.-C). Déjà connue d'Euclide, deux-cent ans après Pythagore, elle se démontre grâce à ce dernier. Énonçons,

Théorème 3 (Al-Kashi, ou loi des cosinus[6]) *Dans un triangle ABC quelconque, les longueurs des côtés partagent la relation :*

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2\, BC.CA.\cos\hat{C}\ .$$

Démonstration (simplifiée). Projetons cette fois B sur (AC) selon un point K, figure 9 :

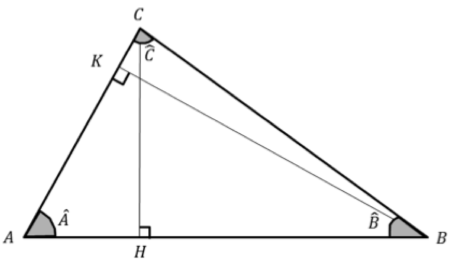

Figure 9 : *La formule d'Al Kashi (cas d'un triangle acutangle, de sorte que H et K soient intérieurs aux côtés).*

Dans le triangle ABK, rectangle en K, $AB^2 = BK^2 + KA^2$. Or $BK = BC.\sin\hat{C}$ et $KA = CA - CK = CA - BC.\cos\hat{C}$. D'où :

$$AB^2 = (BC.\sin\hat{C})^2 + (CA - BC.\cos\hat{C})^2\ .$$

En développant :

$$AB^2 = BC^2.(\sin^2\hat{C} + \cos 2^2\hat{C}) + CA^2 - 2BC.CA.\cos\hat{C}\ .$$

Reste à remplacer $\sin^2\hat{C} + \cos^2\hat{C}$ par 1, merci encore au théorème de Pythagore ! Sans grand effort supplémentaire, on déduit des calculs ci-dessus la

Proposition 1 (addition d'angles) :

$$\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos\hat{A}\cos\hat{B} - \sin\hat{A}\sin\hat{B}\ .$$

6 Ainsi parfois nommée car Al Kashi n'en a pas la paternité (il l'a redémontra, bien des années après).

Démonstration (simplifiée, selon la même configuration de points). Reposons-nous également sur le pied H de la hauteur menée depuis C, figure 9, et recalculons AB^2. Ainsi : $AB = HB + HA$ donc $AB^2 = HB^2 + HA^2 + 2\,HB.HA$. En actionnant deux fois le théorème de Pythagore, il vient

$$AB^2 = (BC^2 - CH^2) + (CA^2 - CH^2) + 2BC.CA.\cos\hat{B}\cos\hat{A}\ ,$$

que l'on confronte à la loi des cosinus après avoir noté que $CH^2 = BC.CA.\sin\hat{B}\sin\hat{A}$, et dont on tire :

$$-\cos\hat{C} = \cos\hat{B}\cos\hat{A} - \sin\hat{B}\sin\hat{A}\ .$$

Le résultat en découle puisque $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$.

Dans le cas général, on manipulerait ci-dessus des mesures algébriques. Dans l'espace à n dimensions, la version vectorielle du théorème de Pythagore s'étend à une multitude de côtés $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ deux à deux orthogonaux, à savoir :

Théorème 4 (Pythagore vectoriel) *Dans un espace euclidien où $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$, sont deux à deux orthogonaux,*

$$\| \vec{v_1} + \vec{v_2} + \ldots + \vec{v_n} \|^2 = \| \vec{v_1} \|^2 + \| \vec{v_2} \|^2 + \ldots + \| \vec{v_n} \|^2\ .$$

Ainsi, en dimension 3, on exprime la distance de deux points M et N placés sur deux droites en l'articulant à la perpendiculaire commune, laquelle révèle donc un infimum : voir la figure 10 de la page suivante.

Cependant, la variante énoncée au théorème 4 n'admet plus de réciproque. [Considérer $\vec{v_1} = (1, 1, 1)$, $\vec{v_2} = (1, -1, 0)$ et $\vec{v_3} = (0, 1, 0)$].

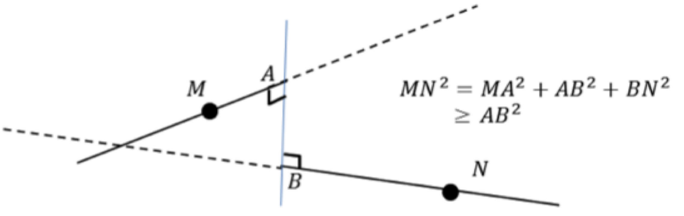

Figure 10 : *distance entre deux droites de l'espace.*

Dernière syllabe,

4. — P : c'est Pour quoi ?

Mais avant, demandons-nous ce qu'il ne dit pas…

Non, le théorème de Pythagore ne permet pas de mesurer le cercle. Bien qu'il en commence phonétiquement par la lettre, il n'a rien à voir avec le nombre π.

Non, faux-amis, l'hypoténuse et l'hypothèse n'ont pas le même suffixe, pas plus que l'hypoténuse et l'hippopotame n'ont le même préfixe.

Non, il n'est pas vital de connaître le théorème de Pythagore pour savoir que l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus grand de ses côtés. Au collège, on peut par exemple symétriser le triangle par rapport à l'un de ses côtés adjacents[7] puis invoquer l'inégalité triangulaire :

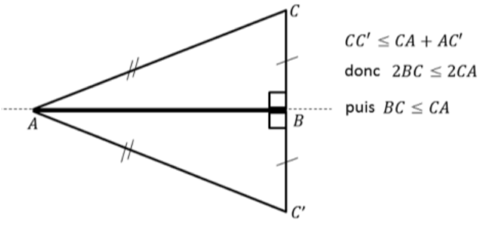

Figure 11 : *L'hypoténuse est le plus grand côté.*

Non, la corde à treize nœuds (douze quand elle se referme) n'est pas un produit dérivé du théorème de Pythagore, mais de sa réciproque, figure 12. Robuste et pliable, contrairement à sa grande sœur l'équerre, elle vous accompagnera sur tous vos chantiers. Facile à proportionner, l'écart entre les deux premiers nœuds définit, par report, où faire les suivants.

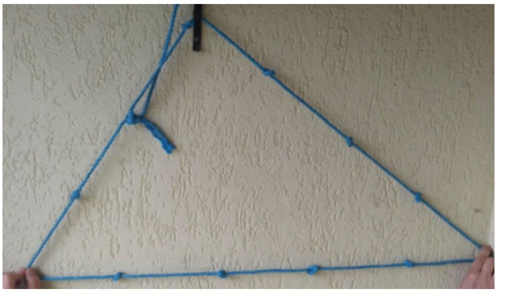

Figure 12 : *Usage d'une corde à 13 nœuds.*

Alors, quel est l'intérêt du fameux théorème s'il ne sert pas à montrer qu'un triangle est rectangle, puisque sa réciproque y pourvoit ?

Il permet en contrepoint d'affirmer qu'un triangle n'est pas rectangle à l'instant où aucune des relations aux longueurs n'est vérifiée. Il suffit[8] même de ne tester que celle dont c désigne

7 Qu'on appelle aussi des « cathètes » car, disposés en équerre sur un plan horizontal, ils se dressent verticaux tels des cathédrales.

8 La stratégie est identique avec les inégalités triangulaires.

le plus grand côté, sans quoi $a^2 + b^2 > c^2$. Par exemple, un triangle de côtés 5, 7, 6 n'est pas rectangle car $7 < 5 + 6$, c'est un triangle comme il n'a pas d'angle droit comme $7^2 \neq 5^2 + 6^2$.

Du triangle rectangle isocèle naît la racine de deux. Émergent ensuite $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, … d'un échafaudage dont chaque nouveau radical sert de base au suivant par l'empilement de cathètes unité. En s'élevant la structure se spirale à mesure qu'on y applique le théorème de Pythagore :

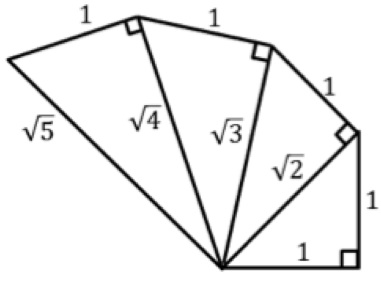

Figure 13 : *Un escargot pythagoricien.*

Cette construction exige patience… et précision car les erreurs s'y accumulent. Le tracé direct de $\sqrt{n}$ est heureusement aussi possible.

On remonte pour cela le schéma de la figure 4 en partant d'une base $[AB]$ de longueur $n + 1$. On y place H à distance 1 et n des bords. On en part à angle droit jusqu'à intersecter le cercle de diamètre $[AB]$ en C, (figure 14). Les triangles CAH et BCH sont semblables au même triangle ABC, donc semblables entre eux. De ce fait les rapports internes $\frac{HC}{HA}$ et $\frac{HB}{HC}$ se valent. D'où, $HC^2 = HA.HB$ et $HC = \sqrt{n}$.

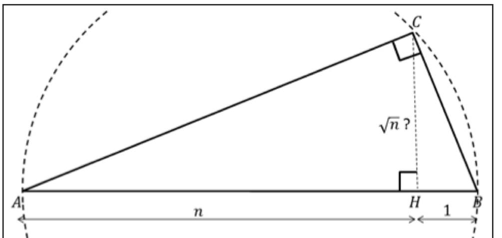

Figure 14 : *Construire* $\sqrt{n}$ *à la règle et au compas.*

Les pythagoriciens auraient renié leur propre découverte. Refusant d'entendre raison, ils rejetèrent l'idée que des nombres pussent ne pas être rationnels (et de ce fait, qualifiés d'irrationnels dans son sens figuré). Il faudra cependant s'y faire : $\sqrt{2}$, pour ne parler que de lui, ne saurait jamais être ce qu'un entier peut être à un autre. Il n'y a que l'absurde pour montrer ce résultat « inconcevable ».

Proposition 2 *(irrationalité) Le nombre* $\sqrt{2}$ *est irrationnel, soit* $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Démonstration. Aussi intimidant soit-il, la vraie difficulté de cet énoncé tient à son orthographe : tantôt le *n* est doublé quand il est dans l'irratio*nn*el, tantôt il ne l'est pas quand il est dans l'irratio*n*alité[9].

Bref, supposons que $\sqrt{2}$ s'écrive sous la forme irréductible $\frac{a}{b}$. On peut ensuite pousser dans deux directions :

— Classiquement, élever au carré l'égalité $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ conduit à $a^2 = 2b^2$. Ceci ordon-

9 Ces bizarreries n'affectent pas les mots proportio*nn*el et proportio*nn*alité, tous deux munis de deux *n*.

ne la parité de a, lequel s'écrit donc $a = 2a'$. Dès lors $2a'^2 = b^2$ et b est aussi pair. Il y a contradiction.

— Judicieusement, l'enchaînement :

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

fournit $\sqrt{2} = \dfrac{2b-a}{a-b}$. Or $2b - a < a$ et $a - b < b$ car $b < a < 2b$. Le représentant $\frac{a}{b}$ de $\sqrt{2}$ n'est plus le meilleur. Contradiction.

Ravissante, cette seconde approche possède une interprétation géométrique non moins lumineuse, que reflète le schéma en figure 15. Partant d'un triangle isocèle rectangle ABC de côté b, sa diagonale mesurera $\sqrt{2}\,b = a$. Rabattons le côté $[BA]$ sur le côté $[BC]$. Le coin A se reporte en A' tandis que le pli marque le point I, au croisement de la bissectrice de $\hat{B}$ et du côté $[AC]$. Immanquablement, $AI = A'I$ et $\hat{A}'$ est droit. Comme $\hat{C} = \pi/4$, le triangle CIA' est isocèle rectangle. En particulier, $A'I = CA'$, puis $AI = A'I = CA' = a - b$ et $CI = 2b - a$. Le triangle $A'CI$ ici construit a les mêmes proportions que celui d'origine, ABC.

Tout cela est bel et bon. Néanmoins, hors des mathématiques, à quoi le théorème de Pythagore peut-il être utile ? « Une fourchette, ça sert à manger, un couteau, ça sert à couper, une chaise à s'asseoir » disait Jankélévitch quand il s'interrogeait sur le sens de la philosophie. « Et les mathématiques, ça sert à quoi ? » aimerions-nous lui demander. À quels besoins du quotidien ? À quels désirs d'élévation de l'âme ? Eh bien, pas seulement à déterminer la hauteur d'appui d'une échelle inclinée contre un mur. Mais également à fabriquer des ustensiles et des idées qui, à leur tour, servent à quelque chose. Nous en donnerons trois exemples, les deux premiers de nature géographique, le troisième, géologique.

Le GPS. Pour calculer la longueur d'un itinéraire, le logiciel de bord le décompose (virtuellement) en petits tronçons rectilignes comme autant de minuscules segments juxtaposés qui en longent le chemin, figure 16 :

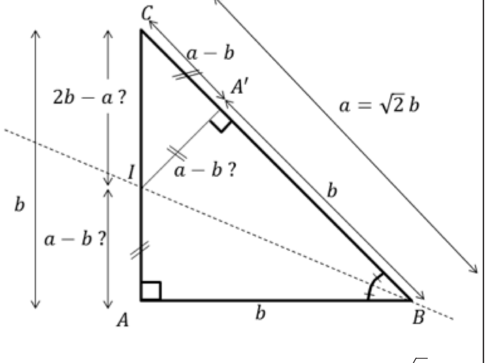

Figure 15 : *De l'irrationalité de* $\sqrt{2}$.

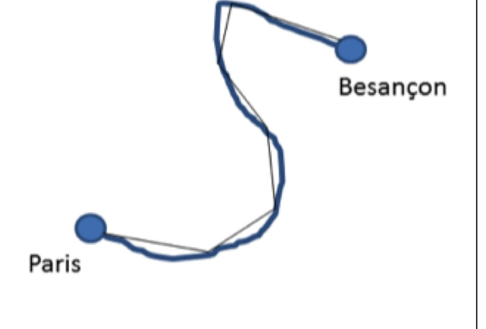

Figure 16 : *Interpolation affine d'un itinéraire*

Chaque portion relie des points dûment cartographiés, et est par conséquent repérée par un vecteur de coordonnées cartésiennes Δx et Δy. La distance du trajet s'obtient en sommant les quantités $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ sur la subdivision considérée.

La circonférence terrestre. Contemporain d'Euclide, Ératosthène est bien connu pour avoir mesuré la Terre [11]. Avant lui, les pythagoriciens avaient déjà conscience de sa rotondité et probablement d'une méthode toute scolaire pour en calculer le rayon (sans en faire le tour) [12]. Ce n'est pas un mirage : un observateur A face à l'océan voit les bateaux disparaître en s'éloignant, comme s'ils sombraient en passant sous la ligne d'horizon. Nommons d la distance de A au point culminant B du bateau quand l'extrémité du mât va s'effacer [10], h la hauteur du bâtiment, R le rayon de la Terre. La coupe [11] réalisée en figure 17 met en évidence un triangle rectangle, le théorème de Pythagore s'y exerce :

$$(R + h)^2 = R^2 + d^2 .$$

Puis, après simplification, $h(h + 2R) = d^2$. Et donc : $R = \dfrac{d^2 - h^2}{2h}$.

Évidemment h est connu. Il n'est pas question d'aller mesurer d à vol d'oiseau, on l'obtient donc par triangulation. Pour cela, on marque autour de A des amers A' et A'', c'est-à-dire des points de référence sur la côte, figure 18 (ici $A'' = A$, sans que cela soit impératif cependant). On mesure l'écartement $A'A'' = e$. On relève par visée les angles $\hat{A}'$ et $\hat{A}''$ du triangle dont A', A'', et B sont les sommets.

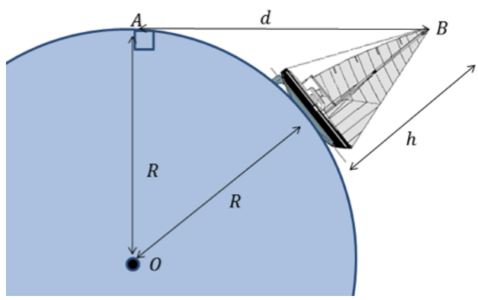

Figure 17 : *La Terre emporte un voilier dans sa courbure (la figure n'est pas à l'échelle).*

On reproduit à petite échelle la situation, on y mesure la hauteur d en réduction. On la dilate du coefficient de proportionnalité ad-hoc, à savoir $\dfrac{e}{e_{\text{réduit}}}$: dans l'ombre, le théorème de Thalès fait son office.

Pourtant ingénieux mais faussé par les instruments de l'époque (les deux mires étant pra-

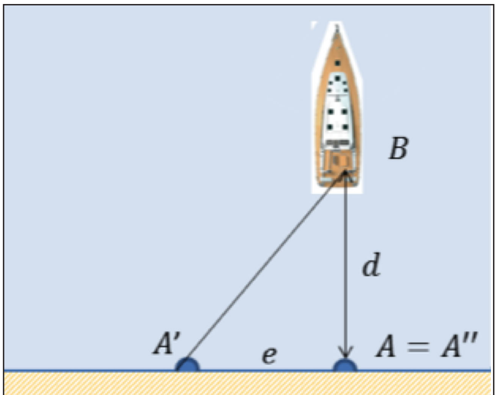

Figure 18 : *Calcul de la distance (rectiligne) d'un navire à la côte avec deux amers.*

10 Symétriquement, le regard de la vigie, perchée dans la hune, perd la côte.
11 Qui n'est pas à l'échelle.

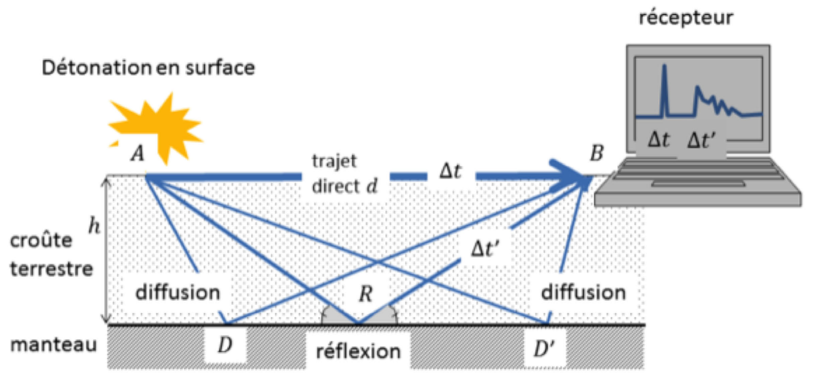

Figure 19 : *profondeur d'une discontinuité (« MOHO » en géologie)*

tiquement parallèles toute erreur d'angle déplace significativement le point de concours), le procédé s'avérera décevant pour estimer d, et donc R.

La profondeur d'une discontinuité plane. Pour calculer la profondeur h d'une discontinuité terrestre (roche) ou aquatique (fond marin), modélisée par un dioptre, on génère artificiellement un séisme par déflagration depuis une station émettrice. On en recueille les répliques sur un sismographe situé à distance d, figure 19. Éloigner la station réceptrice évite de l'endommager et, pour des considérations physiques liées à l'angle d'incidence s'il est suffisamment rasant [12], limite les pertes par réfraction au point de réflexion.

Synchrones, les horloges des dispositifs sont réglées très précisément à la même heure. Le premier pic enregistré, qui correspond au trajet direct, détermine par différence le temps Δt, donc aussi la vitesse $c = d/\Delta t$, de propagation des ondes sonores dans le milieu en présence. Avec retard, d'autres signaux de moindre amplitude parviennent au récepteur : un artéfact issu d'une réflexion obéissant à la loi de Snell-Descartes, qui devance une trainée d'autres soubresauts provenant des éventuelles diffusions (quand la frontière entre les deux strates n'est pas lisse). Ces derniers arrivent après l'onde réfléchie car leur trajet est plus long [13] comme l'illustre la figure 20 :

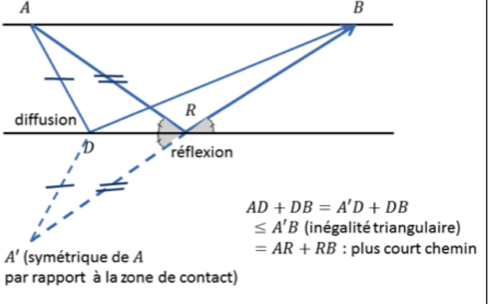

Figure 20 : *Deux rais indirects issus du foyer dont celui de plus court chemin.*

12 Un peu comme un galet qui fait des ricochets, l'inclinaison du lancer importe.

13 Noter que la courbe isochrone, lieu géométrique défini par $MA + MB = c\Delta t'$, est elliptique de foyers A et B, dont R est un sommet.

Le délai $\Delta t'$ se démarque ainsi nettement. Le théorème de Pythagore assemble l'équation $h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\,\Delta t'}{2}\right)^2$ dont on extrait h, ce que fit pour la première fois le météorologue Mohorovičić à l'orée du XXe siècle [13].

Conclusion

En restaurant une place à l'histoire des sciences, les nouveaux programmes de lycée [14] réaffirment combien chaque lemme, chaque définition, chaque propriété et au-delà toute découverte, est habitée par l'esprit humain [15]. L'attention que nous avons ici portée à l'écosystème pythagoricien via un questionnement circonstancié offre une grille de lecture possible. La règle QQOQCP que nous avons appliquée est, dans une certaine mesure, transposable à d'autres objets : une autre formule, un composé chimique, une loi physique, un principe économique, etc. Facile à retenir, elle n'est cependant pas le seul instrument d'analyse possible. Malgré toutes ses vertus, elle ne peut non plus totalement éclipser qu'une preuve en mathématiques met à l'épreuve, à l'instar d'une petite ou d'une grande ascension, et qu'elle détient sa part de mystère.

Après l'équation de Pythagore, nous pouvions glisser vers celle de Fermat. Après l'étude de $\sqrt{2}$, nous pouvions l'approximer (transformation équi-aire d'un rectangle en carré par la méthode de Babylone) ; évoquer les proportions du format papier A4 qui, parce que $\sqrt{2} \cong 29{,}7/21$ les gouverne, passent si bien à l'échelle par simple pliage (format A5) ou juxtaposition (format A3, puis A2, etc.) ; aborder le réel [14] $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$; interroger l'origine de la notation $\sqrt{\ }$ des radicaux. Après les sommes de deux carrés, nous aurions envisagé celles de quatre et le théorème de Lagrange. Après la trigonométrie de l'addition, la modulation des ondes radio s'explique. Les ouvertures sont infinies.

Reste que le plus populaire des théorèmes continuera de faire couler beaucoup d'encre, et quelques larmes. Peut-être pour de faux : les vers qui suivent montrent que leurs auteurs avaient au fond tout compris – « théorèmes » apparaît au pluriel dans le texte – et qu'ils avançaient, certes poétiquement, les bonnes questions – Quand, Où, Pour quoi, Comment...

Je me suis chopé cinq cent lignes :
« Je ne dois pas parler en classe »
Ras le bol de la discipline!
Y en a marre c'est digoulasse!
C'est même pas moi qui parlais
Moi je répondais à Arthur
Qui me demandait, en anglais
***Comment** s'écrit No Future*

*Si on est punis **pour** ça*
Alors je dis: « Halte à tout! »
Explique-moi, Papa
*C'est **quand** qu'on va **où**? …*
Veulent me gaver comme une oie
Avec des matières indigestes
J'aurais oublié tout ça
Quand j'aurai appris tout le reste
Soulève un peu mon cartable
L'est lourd comme un cheval mort
Dix kilos d'indispensable
***Théorèmes**[15] de **Pythagore** !...*

R.Séchan/J.Clerc, « C'est quand qu'on va où ? » (extrait), À la belle de mai, 1994.

14 Qui, rationnel ou pas, permet d'assurer l'existence de deux irrationnels a et b tels que $a^b \in \mathbf{Q}$. S'il ne l'est pas, choisir en effet $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

15 Le théorème et le théorème réciproque.

L'auteur tient à remercier Frédérique Plantevin et Vincent Paillet pour leur relecture attentive et leurs remarques très précises, Robert Férachoglou pour son art du pliage, Antoine Landart pour son authentique coupe de Pythagore, ainsi que Christophe Lartigue pour nos intarissables discussions sur la discontinuité de Mohorovičić.

Références

[1] Radouane ABASSI (et ses élèves) et Sofiane ZERMANI, « Je suis passé chez Pythagore », 2017. https://www.youtube.com/watch?v=RWLVJAy4fGI

[2] Guillaume ALDEBERT, « La vie c'est quoi ? », Enfantillages 3, RCA, 2017.

[3] Renaud SECHAN et Julien CLERC, « C'est quand qu'on va où ? », À la belle de mai, Virgin records, 1994.

[4] Martin HEIDEGGER, Être et temps, Gallimard, 1927.

[5] Mogens NISS, "Mathematical competencies and the learning of mathematics", the Danish KOM project, 2003. http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs/KOMkompetenser.pdf

[6] Henri VALEINS, « QQOQCP : un problème bien posé est à moitié résolu», 2009. http://qualite-en-recherche.cnrs.fr/spip.php?article6

[7] Bertrand HAUCHECORNE et Daniel SURATTEAU, Des mathématiciens de A à Z , Ellipses, 2008.

[8] Bernard VITRAC, « Les géomètres de la Grèce antique », CultureMATH, 2004, http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/htm/Vitrac/grecs-index.htm

[9] Karim ZAYANA, « Mathématiques à/en portée », Au fil des math, 2018.

[10] Christine PROUST, « Trouver toutes les diagonales », Images des Mathématiques – CNRS, 2015, https://images.math.cnrs.fr/Trouver-toutes-les-diagonales.html

[11] Karim ZAYANA, « Bravo Monsieur le Monde », PLOT, 2017.

[12] Olympiades nationales de mathématiques, zone Asie - Nouvelle Calédonie – Polynésie Française, exercice 3 (séries autres que S), 2019. https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AsiePacifiqueNouvelleCaledoniePolynesieFrancaise2019.pdf

[13] BOEN spécial n°1 du 22 janvier 2019, première de spécialité sciences et vie de la Terre. https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/54/2/spe648_annexe_1063542.pdf

[14] BOEN spécial n°1 du 22 janvier 2019, mathématiques, seconde générale et technologique. https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf

[15] Jean DIEUDONNÉ, Pour l'honneur de l'esprit humain, Hachette, 1988.