SIMULER UN NIVEAU DE CHANTIER ET UN THEODOLITE

Deux modèles d'appareil avec GeoGebra, comme support pour le cours de topographie

Hubert RAYMONDAUD
Stephan MANGANELLI

Résumé : La compréhension et le sens des formules utilisées en topographie pour calculer des distances à partir de mesures faites en TP avec des niveaux de chantier ou des théodolites posent des problèmes aux étudiants de BTSA Aménagement Paysagers. La simulation de situations de terrain avec des modèles d'appareil construits avec GeoGebra a facilité la compréhension du fonctionnement et la maîtrise de ces outils.

1. — Introduction

L'objectif de l'article est de témoigner de l'initiation d'une démarche pluridisciplinaire entre l'enseignement de la topographie, les mathématiques et l'informatique, entreprise pour la première année.

Le principal but de cette démarche est de réinvestir quelques outils mathématiques pour améliorer la compréhension et l'utilisation de deux outils utilisés en topographie, le niveau de chantier et le théodolite.

Cette démarche est née d'une discussion avec notre collègue chargé de l'enseignement de la topographie en classe de BTSA Aménagements Paysagers, confronté à des difficultés face aux nouveaux publics majoritairement issus de baccalauréat professionnel. Sans avoir plus de précision sur ces difficultés, ni sur les modèles concrets utilisés par les appareils, nous avons proposé de rechercher des outils mathématiques simples pouvant modéliser les appareils et permettant de travailler en cours et en séances de travaux dirigés, sur les thématiques suivantes :

1. Transposer le théorème de Thalès aux appareils utilisés et comprendre l'origine de la constante k (= 100).
2. Justifier les deux formules utilisées en faisant un calcul approché a priori légitime.
3. Appliquer le théorème de Thalès à une situation simulée de calcul de distance.

4. Comprendre la différence des situations de Thalès entre le niveau de chantier et le théodolite.
5. Comprendre les approximations faites dans la formule du théodolite.
6. Par curiosité des enseignants, rechercher une formule exacte pour le calcul de distance, si elle existe ?

Dans un premier temps l'objet GeoGebra simulant un niveau de chantier est utilisé *en cours* (1 heure) comme support et illustration de l'application du théorème de Thalès. La démonstration est l'occasion de comprendre l'origine de la constante k = OD / FE, calibrée à 100 sur ce type d'appareil.

Les objets GeoGebra sont des modèles d'appareil dans le sens où ils permettent de simuler des mesures de distance sur le terrain, tout comme un modèle mathématique d'expérience aléatoire mise en œuvre dans un langage informatique permet de simuler un tirage aléatoire dans une urne.

La position de la mire [MQ] peut être modifiée et l'on peut faire afficher le résultat du calcul de la distance recherchée PQ, que l'on peut comparer à la distance "observée" sur le graphique.

Une séance de TD (1 heure) est consacrée à quelques applications du théorème de Thalès (la croix du bûcheron) et quelques calculs de distances, que l'on apprend à vérifier en utilisant le modèle GeoGebra.

Dans un deuxième temps le modèle GeoGebra de théodolite est utilisée *en cours* (1h) pour illustrer l'application du théorème de Thalès et mettre en évidence l'approximation faite pour obtenir la formule utilisée par les topographes. La démonstration est l'occasion de réinvestir quelques résultats classiques sur les triangles et les angles.

2. — La problématique

Le lycée est équipé de niveaux de chantier et de théodolites, optiques. Pour le calcul des distances, dans un lever des points délimitant une parcelle, les topographes utilisent deux formules qu'il faut expliquer aux étudiants et dont la démonstration permet de réinvestir et légitimer certains outils mathématiques. Nous avons suggéré d'utiliser GeoGebra pour simuler les deux appareils afin d'illustrer et d'expliquer les formules utilisées. Les démonstrations viendront ensuite.

Les niveaux de chantier du lycée sont utilisés pour effectuer des mesures d'angles planimétriques[1] et des mesures optiques de distances à l'aide de deux lignes stadimétriques sur une mire située à la même altitude (cf. figure 1). Les théodolites du lycée sont utilisés pour effectuer des mesures d'angles planimétriques, mais aussi d'angles altimétriques[2] (ce que ne permet pas le niveau de chantier) et des mesures optiques de distances à l'aide de deux lignes stadimétriques[3], en élévation, c'est-à-dire sur une mire qui peut ne pas être située à la même altitude que l'appareil (cf. figure 2).

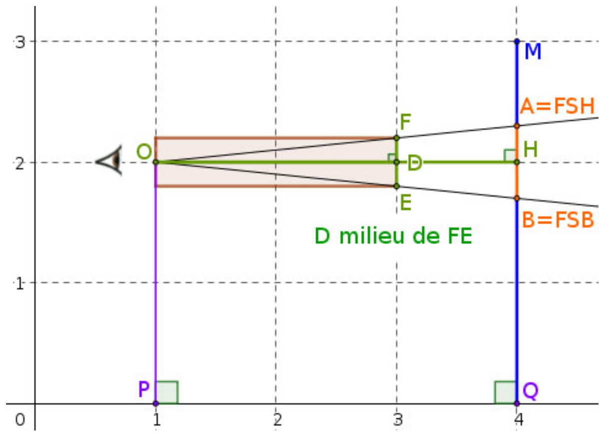
Les formules utilisées pour le calcul des distances sont présentées sur les figures 1 et 2 de la page ci-contre.

1 C'est l'angle (horaire) que fait le nord géographique avec la direction du point où est positionné la mire du niveau de chantier.

2 C'est l'angle GOH illustré dans la figure 2.

3 On parle de lignes car la mire ayant une certaine largeur, les points A et B sont deux des intersections de ces lignes horizontales avec une droite représentant un bord de la mire. Dans la visée l'opérateur voit ces deux lignes s'afficher sur la face plate de la mire.

Figure 1 : Le niveau de chantier

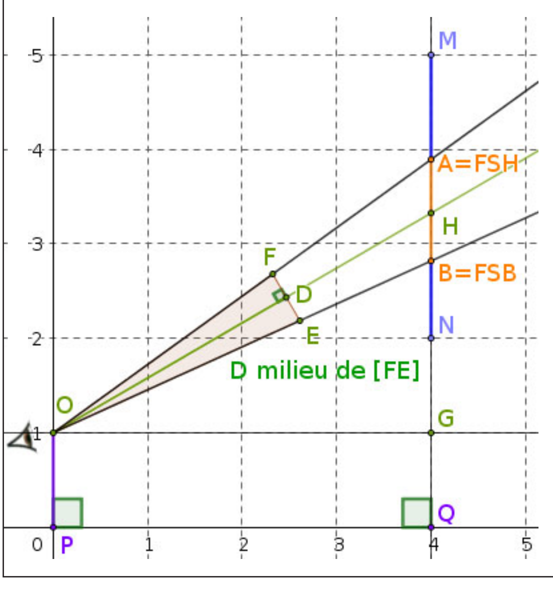


Le triangle OFE représente le système optique du *niveau de chantier*, MQ représente la mire vue de côté. FSH et FSB sont les deux lignes stadimétriques repérées par visée optique. AB représente la distance entre ces deux lignes notée FSH – FSB.

La formule fournie par la notice de l'appareil est :

PQ = OH = 100 × (FSH – FSB).

Figure 2 : Le théodolite



Le triangle OFE représente le système optique du t*héodolite*, MN représente la mire vue de côté. FSH et FSB sont les deux lignes stadimétriques repérées par visée optique. v est l'angle GOH.

AB = FSH – FSB.

La formule fournie par la notice de l'appareil est :

PQ = OG
= 100 × (FSH – FSB) × cos²v.

Les objectifs de la séance de travaux dirigés (2 heures) sont, pour chacun des deux appareils :

1. Simuler des mesures de distance pour comparer distance simulée (mesurée avec les fonctions de GeoGebra) et distance calculée avec les formules topographiques, par exemple, avec le niveau de chantier, Distance(O,H) comparé à $k \times \mathrm{AB}$. ($k = 100$ habituellement).
2. Illustrer les propriétés géométriques des figures représentant les appareils et les mesures effectuées, illustrer les théorèmes utilisés pour démontrer les formules et les approximations faites en topographie.
3. Optionnellement, selon le degré de maîtrise du logiciel, faire construire les modèles GeoGebra des appareils, permettant les simulations vues au 1°.

3. — Un modèle GeoGebra de niveau de chantier

3.1. *Caractéristiques et fonctionnalités du modèle (Figure 3)*

— Les points O, F, A, les points O, E, B, les points F, D, E, les points M, A, H, B, Q sont alignés.

— La valeur de k (rapport OD / FE) est une caractéristique physique des appareils utilisés. k vaut 100 dans la pratique. J'ai utilisé un curseur pour pouvoir faire varier sa valeur, la figure est réalisée avec k = 5 pour garder un bonne lisibilité de ses éléments, en repère orthonormé.

— La mire peut se déplacer horizontalement pour illustrer le calcul de la distance OH = PQ, en fonction de la valeur de AB obtenue par la visée.

— On peut comparer la valeur calculée de OH avec la valeur simulée de PQ obtenue avec l'instruction Distance(P, Q) ou Distance(O, H), de GeoGebra.

3.2. *Démonstration de la formule utilisée par les topographes*

Elle découle de l'application du théorème de Thalès dans les triangles AOB et AOH.

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OF}} \text{ et } \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OD}}$$

donc $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{FE}} = \dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OD}}$, d'où :

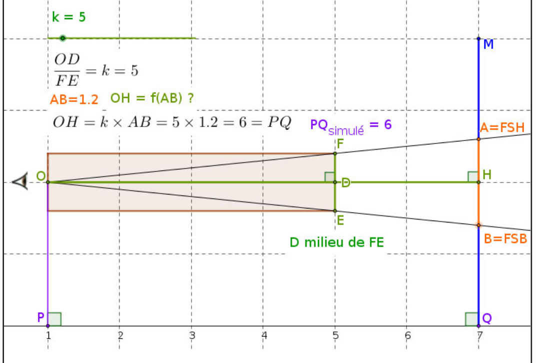
$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{FE}} \times \mathrm{AB} = k \times \mathrm{AB}.$$

Dans la simulation représentée à la figure 3, le calcul 5 × 1,2 = 6 donne bien le même résultat que la valeur simulée avec le modèle GeoGebra de niveau de chantier :

$$\text{Distance(P, Q)} = 6.$$

Que se passe-t-il lorsque la visée se fait en situation d'élévation, c'est-à-dire lorsque Q n'est pas au même niveau que P ? C'est ce que nous allons voir dans la partie 4…

Figure 3



OH = PQ = 100 × AB.

4. — Un modèle GeoGebra de théodolite

4.1. *Caractéristiques et fonctionnalités du modèle (Figure 4)*

— Les points O, F, G, A, les points O, E, B, I, les points F, D, E, les points M, A, H, B, K, Q, et les points G, H, I, sont alignés.

— La valeur de k (rapport OD / FE) est une caractéristique physique des appareils utilisés. *k* vaut 100 dans la pratique. J'ai utilisé un curseur pour pouvoir faire varier sa valeur, la figure est réalisée avec *k* = 5 pour garder un bonne lisibilité de ses éléments, en repère orthonormé.

— La mire peut se déplacer horizontalement et l'angle vertical v peut varier, pour illustrer le calcul de la distance OK = PQ, en fonction de la valeur de AB et de l'angle v, obtenus par la visée.

— On peut comparer la valeur calculée de OK avec la valeur simulée de PQ obtenue avec l'instruction Distance(P, Q) ou Distance(O, K), de GeoGebra.

4.2. *Démonstration de la formule utilisée par les topographes*

PQ = OK = OH × cos(v) et OH = *k* × GI, d'où OK = k × GI × cos(v). Or la visée ne fournit pas GI mais AB et l'angle v. L'angle v (KOH) d'élévation se retrouve en BHI et AHG (angles à deux côtés perpendiculaires). Il faut donc calculer GI à partir de AB.

Pour calculer GI en fonction de AB, les topographes on fait l'approximation consistant à considérer l'angle u (HIB ou OGH) comme un angle droit. Dans un premier temps, la simulation figure 5 nous montre que l'erreur faite sur OK est minime. Elle est d'autant plus petite que v est faible. Lorsque v = 0 , GI = AB.

Figure 4 PQ = 100 × AB × cos²v

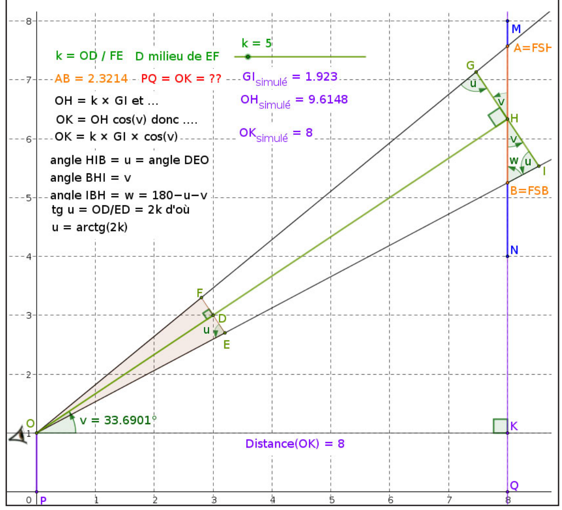
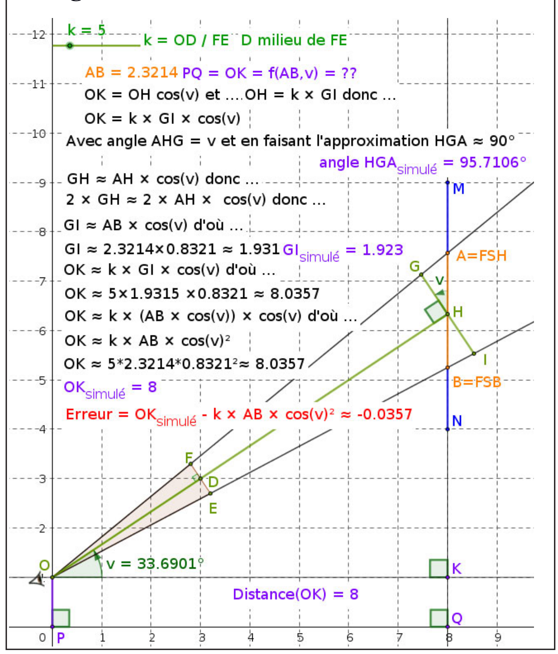


Figure 5



En considérant que u est un angle droit, H devient le milieu de AB, AGH un triangle rectangle en G et HIB un triangle rectangle en I.

On a alors : GH = AH × cos(v) d'où 2 × GH = 2 × AH × cos(v) donc GI = AB × cos(v). En remplaçant GI dans OK = k × GI × cos(v), on a alors

$$OK = k \times AB \times \cos(v) \times \cos(v)$$

$$= k \times AB \times \cos^2(v).$$

On a bien démontré la formule des topographes.

Nous nous sommes demandé si les traités de topographie mentionnent la formule exacte. Après quelques recherches infructueuses nous nous sommes penchés sur le problème, guidé par les simulations, et avons trouvé une solution proposée en 4.3. Cette partie n'a pas encore fait l'objet d'un travail avec les élèves.

4.3. *Démonstration de la formule exacte*

Il s'agit donc d'exprimer GI en fonction de k, caractéristique de l'appareil, et de AB et de v, les deux seules valeurs fournies par la visée : *Voir l'encadré de la page ci-contre.*

On peut notamment vérifier un résultat de la formule générale du théodolite, dans le cas particulier v = 0 et k = 100, ce qui revient au cas du niveau de chantier :

$$PQ = AB\left(k\left(\frac{cos\,(v)}{sin\,(u)}\right)^2 - \frac{1}{4\ k}\right),$$

avec $u = tan^{-1}(2k)$. On a cos(v) = cos(0) = 1.

$$PQ = AB\left(100\left(\frac{1}{sin^2\,(tan^{-1}(200))}\right) - \frac{1}{400}\right)$$

C'est-à-dire :

PQ = AB (100 × 1,000025 − 0,0025)

PQ = AB × 100.

On retrouve bien la formule utilisée pour le niveau de chantier.

5. — Conclusion

La formation des étudiants de BTSA AP, à l'origine et au sens des formules utilisées en topographie a été grandement facilitée par la simulation sur GeoGebra. Le calcul exact pourra fournir un sujet de problème concret pour des terminales scientifiques. La construction des modèles GeoGebra d'appareils, pourra faire l'objet d'une autre séquence.

Les deux activités proposées en travaux dirigés ont suscité une bonne adhésion des étudiants qui se sont dits intéressés par l'application concrète du théorème de Thalès qui leur a permis de comprendre le fonctionnement des appareils de topographie et donner du sens aux outils mathématiques utilisés "on voit à quoi ça sert".

Sur le terrain le collègue de topographie a pu noter une prise en main plus rapide des appareils avec un meilleure compréhension des consignes d'utilisation donc moins d'erreurs dans les relevés et les calculs effectués.

Nous renouvellerons ces séances en étoffant les séances de travaux dirigés par des exercices favorisant la manipulation de GeoGebra, par exemple en construisant une progression pour la démonstration la formule du niveau de chantier et la formule approchée du théodolite. La démonstration de la formule exacte n'est pas un objectif du programme de BTS.

Figure 6

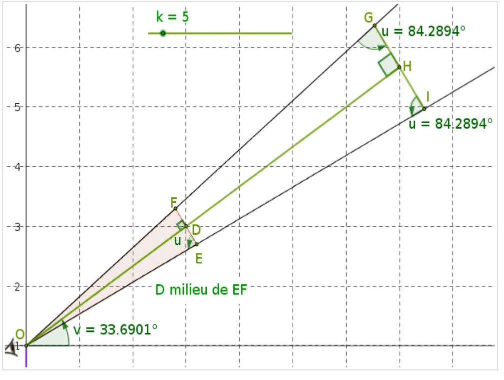
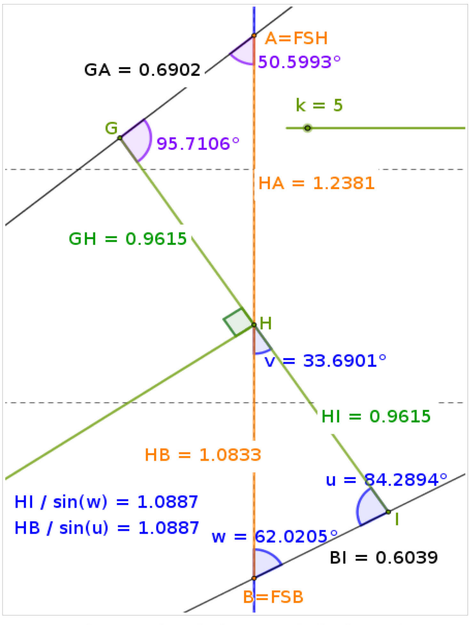


Figure 7



- On peut connaître facilement les mesures de tous les angles des triangles AGH et HIB.
  Dans le triangle HIB, la mesure de l'angle **v** est une donnée originale fournie par la visée, la mesure de l'angle u est tg^{-1}(DO / DE) = $\tan^{-1}$(2k), et la mesure de l'angle w est 180° – (u + **v**).
  Dans le triangle AGH, la mesure de l'angle **AHG** est égal à celle de **v**, la mesure de l'angle HGA est égale à 180° – u, et la mesure de l'angle GAH est u – **v**.
- La formule des 3 sinus donne :
  Dans le triangle AGH,

$$\frac{HB}{\sin(u)} = \frac{HI}{\sin(180°-(u+v))} \text{ d'où HB} = \frac{HI\sin(u)}{\sin(u+v)}.$$

Dans le triangle HIB,

$$\frac{HA}{\sin(180°-u)} = \frac{HG}{\sin(u-v)} \text{ d'où HA} = \frac{HG\sin(u)}{\sin(u-v)}.$$

- Comme HA + HB = AB (on est sur la mire), on a :

$$AB = \sin(u)\left(\frac{HG}{\sin(u-v)} + \frac{HI}{\sin(u+v)}\right) \text{ d'où}$$

$$AB = \frac{1}{2}GI\sin(u)\left(\frac{1}{\sin(u-v)} + \frac{1}{\sin(u+v)}\right) \text{ et donc}$$

$$GI = \frac{2AB}{\sin(u)\left(\frac{1}{\sin(u-v)} + \frac{1}{\sin(u+v)}\right)}.$$

Comme

$$\frac{1}{\sin(u-v)} + \frac{1}{\sin(u+v)} = \frac{2\sin(u)\cos(v)}{\cos^2(v)-\cos^2(u)}, \text{ alors}$$

$$GI = AB\frac{\cos^2(v)-\cos^2(u)}{\sin^2(u)\cos(v)} \text{ avec u} = \tan^{-1}(2k).$$

- La formule finale est donc :

PQ = k × **GI** × cos(**v**), ce qui donne

$$PQ = AB\left(k\left(\frac{\cos(v)}{\sin(u)}\right)^2 - \frac{1}{4k}\right) \text{ avec u} = \tan^{-1}(2k)$$

- Avec des données de mesures à 4 décimales, la formule exacte donne PQ = 7,9999 alors que la formule des topographes donne 8,0356.