LES « REMUE-MENINGES »

Motivation des élèves en classe de mathématiques de 2nde, par la mise en place d'un rituel de recherche de problèmes ouverts

Pierre GLASSON
Xavier DURAND
Irem de Grenoble

Ce texte est également consultable en ligne sur le portail des Irem, onglet : Repères IREM http://www.univ-irem.fr/

Résumé : Constatant la nécessité de motiver les élèves en cours de mathématiques de 2nde, et d'améliorer leurs apprentissages, nous avons trouvé dans les activités de recherche de problèmes ouverts des caractéristiques propices à éveiller l'intérêt, en plaçant les mathématiques dans leur environnement. La mise en place d'un travail ritualisé de recherche de problèmes ouverts, appelé « remue-méninges », a été expérimenté dans l'objectif de générer de la motivation chez les élèves, de développer leurs compétences de recherche scientifique, et de structurer leurs connaissances. Les résultats obtenus confirment un effet bénéfique, avec une évolution positive de l'activité des élèves, qui interagissent entre eux, parlent mathématiques. La préparation et le choix des sujets a son importance sur ce résultat. La phase de débat permet la confrontation des travaux, et la valorisation des recherches de tous les élèves. Pour accentuer ces résultats, l'activité de recherche ritualisée devrait être mise en place dès le début de l'année scolaire, avec périodiquement un travail de recherche en groupe. La motivation naissante serait ainsi entretenue et permettrait de structurer progressivement les connaissances des élèves.

Contexte de l'étude

Cet article fait suite au mémoire de Master sur lequel nous avons travaillé conjointement sous la direction de Daniela GUIOL et Michèle GANDIT. Au cours de notre année de stage de professeur de mathématiques, nous avons constaté la nécessité de motiver nos élèves de classes de 2nde pour améliorer leurs apprentissages. Nos métiers d'ingénieurs respectifs nous ont confrontés à des situations problématiques liées au développement d'un produit, et nous les avons résolues par un travail d'équipe. Il nous a donc semblé naturel d'initier nos élèves aux situations professionnelles par un travail de recherche en groupes, qui leur apporterait la satisfaction d'appliquer leurs connaissances. Nous avons alors ciblé dans les activités de recherche de problèmes ouverts, les caractéristiques propices à générer de l'intérêt pour nos élèves, en plaçant les mathématiques dans leur environnement.

Cette étude a été réalisée dans une classe de seconde du Lycée de la Matheysine, à La Mure en Isère. Situé à 40 km au sud de Grenoble dans un environnement montagneux, le plateau Matheysin est un ancien bassin minier en restructuration, où l'activité économique, principalement agricole, offre peu de travail. Les élèves sont issus de milieux sociaux divers et beaucoup de parents travaillent dans la banlieue grenobloise. De ce fait, les centres d'intérêt, les perspectives et les motivations des élèves sont très variés. L'effectif de la classe est de 32 élèves. Après un premier trimestre de travail, il est apparu un écart important de motivations et de connaissances entre les élèves. D'une part, un tiers de la classe présentait un niveau correct, avec un groupe d'élèves ayant de l'intérêt pour les sciences et de bonnes facultés d'apprentissage, et d'autre part, un tiers des élèves rencontrait de grandes difficultés d'apprentissage entrainant une tendance au décrochage, à la passivité.

Dans ce contexte, nous avons expérimenté la mise en place d'un travail ritualisé de recherche de problèmes ouverts, que nous appelons « remue-méninges », dans l'objectif de générer de la motivation chez les élèves, de développer leurs compétences de recherche scientifique, et de structurer leurs connaissances.

Points d'appuis de l'expérimentation

Les mathématiques constituent une science vivante dont le développement se poursuit continuellement au rythme des questions que les mathématiciens se posent dans leurs tentatives de résolution de problèmes. Pour enseigner les mathématiques comme une science vivante, qui évolue, se développe, génère de l'échange, Arsac et Mante, de l'Irem de Lyon (2007), ont placé les élèves en situation de recherche de problèmes ouverts en groupes. L'apprentissage se fait en interaction entre les élèves dans l'esprit du socioconstructivisme. Un débat entre pairs organisé après la phase de recherche, sensibilise les élèves au besoin de démontrer pour convaincre. La classe devient un mini-laboratoire de recherche en mathématiques où les élèves peuvent prendre « possession » de la situation en utilisant des méthodes de recherche scientifique. On donne un véritable statut à la phase de tâtonnement tant redoutée par les élèves car elle les place dans une situation incertaine, non maitrisée. Ce tâtonnement est pourtant nécessaire à la construction et l'organisation de leurs connaissances. Pour cette construction des connaissances, l'APMEP (2003) préconise de « mettre si possible en jeu plusieurs cadres (*) et/ou registres » dans les activités de recherche. Par exemple, on peut modéliser une même situation dans le cadre géométrique, ou le cadre arithmétique. Cette aptitude à changer de cadre pour étudier un problème correspond aux compétences « représenter » et « modéliser ». Dans la suite des travaux de R.Douady, Robert et Rogalsky (2004) ont souligné la nécessité de confronter les élèves à l'expérimentation et l'exploration dans des situations multiples. Les activités proposées vont permettre diverses contextualisations de l'outil mathématique qui est enseigné.

Pour mettre en action nos élèves dans ces activités d'apprentissages, nous devons les motiver. La motivation constitue une notion complexe, dépendant de nombreux critères psychologiques qui diffèrent d'un individu à un autre. Fenouillet & Lieury (2013) décrivent deux types de motivations :

— La motivation intrinsèque, qui provient d'une relation interne, personnelle et directe entre l'élève et ses actes. L'élève ressent le besoin d'agir, d'explorer et s'engage de lui-même. Par exemple par curiosité.

— La motivation extrinsèque provenant d'un élément extérieur à l'élève, comme obtenir une bonne note, satisfaire son professeur, partager sa satisfaction avec des amis.

Nous souhaitons générer une motivation intrinsèque en éveillant la curiosité des élèves par les sujets proposés, et en leur permettant d'explorer, dans des situations de recherche, des domaines qu'ils pourront partiellement contrôler. Le travail en équipe et l'interaction entre pairs devraient par ailleurs être des facteurs de motivation extrinsèque.

Pour entretenir l'état de motivation obtenu, nous avons choisi de mettre en œuvre l'activité de recherche sous forme de rituel. On trouve dans la revue « Recherches en Éducation » coordonnée par Merri et Vannier (HS n°8, 2015), des informations montrant l'importance du rituel pour les élèves. Dans notre société contemporaine en mouvement et en transformation constante, le rituel a une action régulative dont l'homme ne peut se passer. En période d'apprentissage, l'élève se trouve confronté à un univers moderne parfois contradictoire, lié à la libre expression, la perte de symboles, l'individualité. L'instauration de rituels apporte aux élèves des repères stables.

Les rituels ont des fonctions collectives qui permettent l'accueil et le rassemblement dans l'établissement scolaire d'élèves d'origines sociales et culturelles variées. On trouve également dans les rituels des fonctions de régulation de l'action, permettant de dominer le corps et l'émotion à l'entrée dans le temps scolaire. L'apprentissage nécessite un lâcher-prise, un déséquilibre vers l'inconnu, qui met l'élève dans une situation d'appréhension et de crainte, voire de refus. Le rituel va donner à l'élève des repères familiers, le plaçant en situation d'apprentissage. Nous avons imaginé le rituel du « remue-méninges » comme un rendez-vous hebdomadaire avec une fonction didactique. Sa conception n'est pas statique, comme le serait une conduite ancrée dans l'institution sociale, un protocole à suivre à la lettre, mais dynamique. En effet, l'élève doit prendre un rôle et interagir avec le cadre pour trouver sa propre façon de faire dans son activité de recherche. On retrouve la fonction sociale du rituel où l'élève contribue à l'effort collectif, et la fonction de régulation en plaçant l'élève dans un cadre de recherche qui devient habituel.

En utilisant ces points d'appuis, nous avons défini un travail ritualisé de recherche de questions ouvertes et de problèmes ouverts en classe. Les sujets des activités proposées devront donner du sens aux mathématiques, s'ouvrir aux plus faibles et les initier aux mathématiques expérimentales. La phase de mutualisation des résultats fera des mathématiques une matière vivante, un sujet d'échanges. Chacun pourra apporter sa contribution dans l'étude du problème, qu'il soit résolu ou non. Ce rituel doit permettre d'entretenir un climat de recherche et de questionnement.

Mise en place de l'expérimentation

Un travail régulier sur des problèmes ouverts dans une situation de recherche a été mis en place suivant deux formules :

— Des activités de recherche hebdomadaires, ritualisées, sur des problèmes courts, que nous avons appelés les « remue-méninges ».

— Des activités de recherche en travail de groupes, sur une heure, pour traiter des problèmes ouverts nécessitant plus de temps de recherche. Une séance ultérieure a été prévue pour le débat et la présentation des recherches. Deux configurations ont été testées pour la constitution des groupes. Soit en laissant leur constitution libre par affinités entre élèves, ce qui peut générer de la motivation extrinsèque mais avec le risque que les élèves en difficulté se laissent porter par le groupe. Soit en associant des élèves de même niveau, pour que chacun se trouve contraint à contribuer au travail du collectif, avec ses connaissances et capacités propres.

Les problèmes posés aux élèves sont désignés par des titres. Certains d'entre eux vont être développés ci-après, et la description des autres se trouve en annexe. Les sujets ont été travaillés sur une séquence de deux mois dans l'ordre suivant :

— Un travail initial de recherche avec une constitution libre des groupes : sujet « Le verger »

— Le rituel hebdomadaire « remue-méninges » :
1ère semaine : sujet « La traversée du fleuve ».
2ème semaine : sujet « Jolie bouteille ».
3ème semaine : sujet « Le triangle puzzle ».
4ème semaine : sujet « Carrément équilibré ».
5ème semaine : sujet « Calcul mental ».

— Un travail final de recherche avec une constitution imposée des groupes : sujet « Affaire d'héritage »

En encadrant de cette façon les « remue-méninges » par deux séances de recherche en groupes nous avons, au terme de cette séquence, observé l'effet du rituel sur le travail réalisé par les élèves.

Conformément aux recommandations de Robert et Rogalsky (2004), les thèmes ont été choisis en variant les contextes et les difficultés. Nous avons également pris en référence les critères de Viau (2000) favorisant la motivation des élèves. Ainsi les sujets proposés sont signifiants aux yeux des élèves, ils leur proposent un défi abordable en sollicitant un investissement cognitif (rechercher, organiser, tester), et les responsabilisent en leur donnant la possibilité de faire des choix. De même, le travail en groupe et le débat permettent aux élèves d'interagir et de collaborer avec les autres, de produire et de présenter un résultat. Enfin, dans l'organisation de la séance, on prend soin de donner des consignes claires et précises, en prévoyant un temps de travail suffisant.

Après une présentation des observations faites lors du travail initial de recherche en groupes, nous allons analyser en détail le remue-méninges « Carrément équilibré » ainsi que le travail final de recherche en groupe « Affaire d'héritage ».

Observations faites lors du travail initial de recherche en groupes « Le verger »

La séance s'est effectuée dans une ambiance studieuse. Cependant, dans la constitution des équipes par affinités, les plus faibles ont manqué d'intérêt pour l'activité et se sont laissés porter par leurs équipiers. L'analyse des comptes-rendus de recherche fait apparaitre des difficultés pour représenter les observations, qui ont été principalement décrites par des phrases et très peu sous forme de tableaux de valeurs ou de représentations graphiques.

La modélisation du problème a constitué une étape difficile à franchir pour beaucoup. Des erreurs de calculs, pourtant simples, n'ont pas été pas auto-vérifiées. Les propriétés conjecturées ont été testées sur quelques cas et ensuite directement généralisées sans recherche de démonstration. La phase de débat a révélé son rôle en faisant apparaitre l'importance de la présentation des résultats sous forme de tableaux de valeurs et de graphiques. Les élèves ont aussi découvert les notions de « conjecture » et d'« extrapolation », très importantes dans une démarche de recherche scientifique. Au bilan, on constate la nécessité de développer chez les élèves les compétences de recherche et particulièrement de représentation, de modélisation et de démonstration.

Le remue-méninges « carrément équilibré »

L'activité ritualisée « remue-méninges », est un rendez-vous donné aux élèves une fois par semaine, en classe entière, pour réfléchir sur un problème ouvert. Lors de la première séance de « remue-méninges » les élèves ont montré une réaction plutôt négative face à cette activité inattendue. Mais par la suite, l'effet recherché sur la motivation des élèves est apparu positivement. Ils se sont montrés majoritairement favorables à cette possibilité de sortir du cadre habituel du cours. On peut penser que cela provient de l'activité qui ne nécessite pas d'apprendre au sens scolaire mais de chercher, d'échanger autour d'un problème, sans évaluation. Finalement, le rendez-vous du lundi avait bien été intégré, et modifier le rituel du « remue-méninges » entrainait surprise et déception.

Afin de favoriser la mise en action des élèves, les énoncés sont courts et permettent à tous de débuter une recherche. On sélectionne des problèmes plaçant les élèves dans une situation familière, éveillant la curiosité, l'interrogation. L'énoncé est projeté au tableau sous forme de schéma, texte ou vidéo, et une version sur feuille est distribuée à chaque élève.

L'activité, d'une durée de 20 minutes, est partagée entre un temps de recherche individuel (5 min.), un temps d'échange et de recherche en binôme (5-10 min.), et la mutualisation des résultats (10 min.). Les élèves doivent commencer par chercher individuellement pour s'adapter aux particularités du problème, se poser des questions, élaborer une méthode avec leurs moyens propres. A l'issue du temps de travail individuel chacun doit inscrire une réflexion, une question sur son sujet, pour ensuite continuer la recherche avec son binôme. Aucune indication n'est donnée sur la méthode à suivre et la solution à trouver, et de préférence, il n'y a pas de lien direct avec la séquence en cours, pour que la recherche ne soit pas orientée.

Dans le problème « carrément équilibré », les élèves vont devoir rechercher les propriétés de la figure qui permettront de répondre à la question posée. L'énoncé comporte peu d'indications, et la position du grand carré est libre. Elle constitue la variable du problème. D'où la nécessité d'introduire comme variables les

Carrément équilibré

Deux carrés ont respectivement 3 cm et 5 cm de côté.

Un sommet du grand carré est le centre du petit carré.

Quelle est l'aire de la zone commune aux deux carrés ?

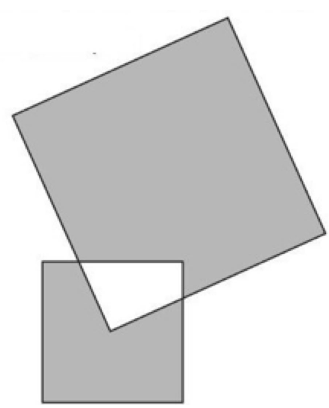


Figure 1 : sujet du remue-méninges « carrément équilibré »
(Source : Rallye Mathématique de l'académie de Lyon, sujets 2016)

points d'intersection des deux carrés et de se rendre compte que ces variables sont liées. Aussi, il va falloir étudier quelques cas particuliers, émettre une conjecture et la démontrer. En première approche, on constate que les dimensions du grand carré n'ont aucune importance. On peut donc chercher à mettre en évidence des propriétés autour du petit carré, en utilisant la codification de la figure 2. L'aire que l'on recherche est celle du quadrilatère IA'JB'. On place B le milieu de [KJ] et A le milieu de [JM]. L'étude de deux cas particuliers va donner des indications.

— Premier cas particulier : I est le sommet du grand carré donc $\widehat{B'IA'} = 90°$. Si on fait pivoter le grand carré pour faire coïncider B' avec B, comme JKLM est un carré avec $\widehat{BIA} = 90°$, alors A' coïncide avec A. Dans ce cas, IA'JB' est un carré dont la surface est le quart de celle de JKLM, soit : $\frac{3^2}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25\ \text{cm}^2$.

— Deuxième cas particulier : Comme JKLM est un carré, ses diagonales sont perpendiculaires, donc $\widehat{KIJ} = 90°$. Si on fait coïncider B' avec K, comme $\widehat{B'IA'} = 90°$, alors A' coïncide avec J. Dans ce cas B'IA' est un triangle isocèle rectangle en I, dont la surface est le quart de celle de JKLM, soit $2{,}25\ \text{cm}^2$.

A partir de ces deux cas particuliers on est tenté de conjecturer que l'aire du quadrilatère IA'JB' a pour surface de façon générale le quart de celle de JKLM, soit $2{,}25\ \text{cm}^2$. Il faut le démontrer : comme $\widehat{AIB} = \widehat{A'IB'} = 90°$, alors $\widehat{AIA'} = \widehat{BIB'}$; de plus $\widehat{IAA'} = \widehat{IBB'} = 90°$,

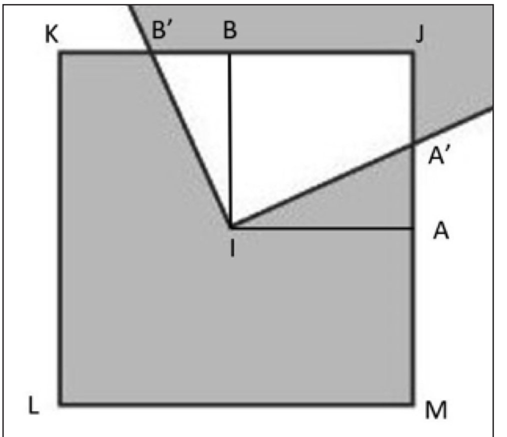


Figure 2

et IA = IB. Donc, les triangles IAA' et IBB' sont égaux et de même surface. On en déduit que le quadrilatère IA'JB' a la même aire que le carré IAJB, soit $2{,}25\ \text{cm}^2$.

On voit que les connaissances en jeu dans la recherche de ce sujet sont les propriétés du carré et de ses diagonales, les cas d'égalité des triangles, et les triangles rectangles.

Durant le temps de recherche, l'enseignant circule dans les rangs, observe l'avancement des travaux, et aide les élèves en difficulté en leur posant des questions pour faire avancer leur réflexion. Ces indications ont été préparées à l'avance en fonction des particularités du problème :

— Que se passe-t-il si on change les dimensions du grand carré ?

— En faisant pivoter le grand carré, peut-on obtenir une position plus simple à étudier ?

— Y a-t-il plusieurs cas particuliers simples à étudier ?

— Quels sont les angles droits sur cette figure ?

— Comment décomposer la surface commune aux deux carrés ?

La figure géométrique proposée dans le sujet « carrément équilibré » a suscité beaucoup d'intérêt chez les élèves qui ont tous pu débuter une recherche, avoir une intuition. La difficulté fut de démontrer la solution pressentie. On observe que les élèves ne font pas clairement de différence entre une conjecture déduite d'une figure approximative et la démonstration d'une propriété. Beaucoup ont eu besoin de mesurer des longueurs sur la figure. La plupart se sont placés dans des cas particuliers et ont généralisé la solution trouvée sans démonstration. Dans les recherches les plus abouties, la démonstration de la solution utilisant des triangles égaux a été visualisée mais non réalisée.

Dans l'exemple présenté figure 3, un cas particulier est bien identifié, mais pourquoi peut-on le généraliser ?

Sur la figure 4, un début de démonstration se profile. Les deux triangles rectangles représentés sont-ils égaux ?

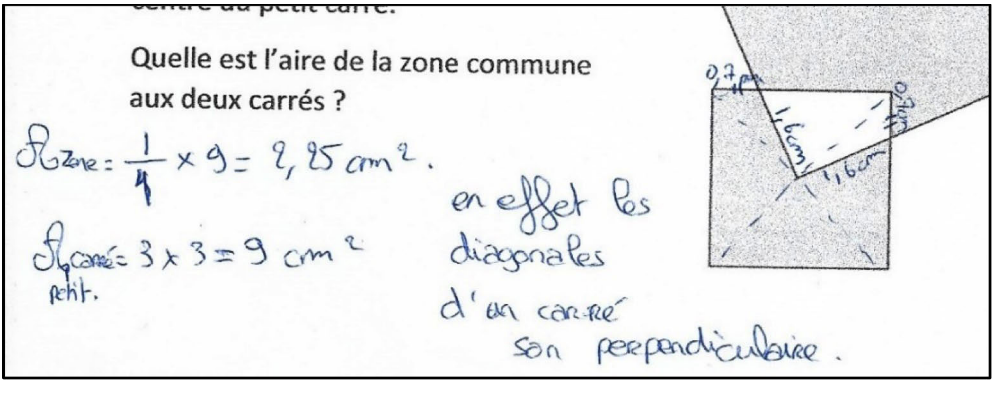


Figure 3 : Identification d'un cas particulier

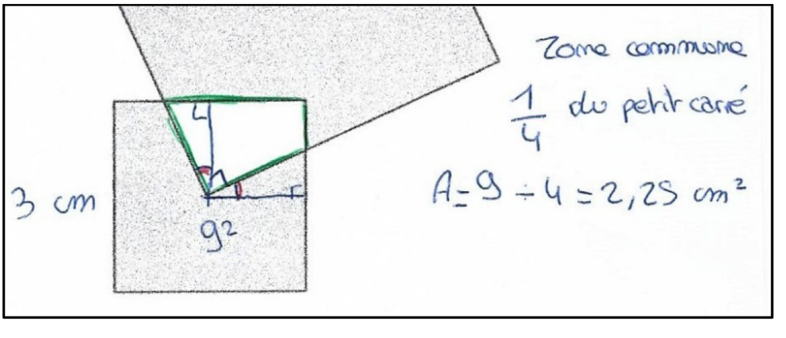


Figure 4 : Un début de démonstration

La phase finale de mutualisation est importante car elle doit donner à la classe sa forme de petite communauté scientifique où l'échange entre pairs et le débat vont faire apparaitre la solution, ou permettre de s'en approcher. Un élève expose sa recherche au tableau, et on fait analyser ce travail par le reste de la classe. L'enseignant prend un rôle d'animateur, il peut orienter la discussion ou poser des questions si nécessaire pour faire avancer la recherche. Pour être bénéfique, cette phase demande le respect de règles strictes dans son organisation, dans la prise de parole et l'écoute. L'important n'est pas de trouver la solution immédiatement mais de débattre entre élèves, de confronter les démonstrations, de se questionner, de chercher une réponse acceptable. Il faut que les élèves qui ont rencontré des difficultés puissent faire part de leurs questions. La solution pourra être mise en ligne par la suite sur l'Environnement Numérique de Travail.

Le débat sur la résolution de ce problème a connu une bonne participation de la classe. L'échange et les interventions des élèves ont permis de rassembler toutes les observations faites et de mettre au point une démonstration satisfaisante. Au fil des séances, l'écoute et la participation orale s'améliore.

Dans cette activité « remue-méninges », nous souhaitons suivre la progression de la classe dans la recherche de problèmes, et l'évolution de leur motivation au fil des séances. Une grille (premier tableau ci-contre) est présente sur les sujets permettant à chaque élève, en fin de séance, de s'auto-évaluer suivant quatre critères qui le conduisent à s'interroger sur son rapport à l'activité de recherche. Une échelle de quatre niveaux de cotation est proposée. L'émoticône 🙁 symbolise l'insatisfaction, soit le niveau 1, et l'émoticône 🙂 la satisfaction, donc le niveau 4. La synthèse (deuxième tableau) de l'ensemble des cotations données par chacun des élèves permet d'évaluer le résultat de la séance.

On observe une bonne motivation des élèves dans l'étude de ce problème, et globalement une bonne satisfaction dans leurs recherches et leurs méthodes. « Carrément équilibré » était le 4$^{\text{ème}}$ rendez-vous de remue-méninges, et on constate une évolution positive de la confiance des élèves dans leur recherche.

Analyse de l'ensemble de l'activité « remue-méninges »

Au terme de la séquence des cinq « remue-méninges », l'expérience montre combien le sujet du problème doit être d'une difficulté bien dosée. Trop facile, les élèves de bon niveau estiment « perdre du temps », trop compliqué, il ne correspond plus au critère recherché du problème court et les élèves en difficultés se sentent abandonnés. Ce fut le cas de « Traversée du fleuve » qui s'est révélé trop simple et l'effet motivant recherché n'a pas bien fonctionné. Le problème suivant « Jolie bouteille » a obtenu une meilleure appréciation et une bonne activité de la classe. Les problèmes géométriques ont obtenu le plus de succès avec un investissement de tous les élèves, une figure géométrique représentant une configuration à partir de laquelle chacun peut débuter sa recherche. Dans un autre registre, le problème « calcul mental » avec le défi lancé par le personnage a bien fonctionné.

Auto évaluation dans la recherche du problème	🙁			🙂
Ma motivation				
Ma méthode				
Ma démonstration				
Ai-je compris ?				

Carrément équilibré	Moyenne	Ecart type
Ma motivation	3,4	1,0
Ma méthode	3,4	0,8
Ma démonstration	3,4	0,8
Ai-je compris ?	3,8	0,8

L'analyse des travaux des élèves en phase de recherche montre les mêmes difficultés que celles observées pour « Le verger », particulièrement pour la représentation et la démonstration d'une solution. Sur les deux premières séances, on constate une amélioration de l'activité et de la qualité du travail de la classe, qui peut s'expliquer par la « mise en route » du rituel. Par ailleurs, la diversité des contextes offerte par les sujets proposés a permis aux élèves de varier leurs approches, et d'améliorer leurs compétences de recherche et de modélisation.

La phase de débat a fait réaliser aux élèves la difficulté d'expliquer une solution. La justification d'une solution a souvent pris du temps pour s'élaborer, en nécessitant l'intervention de plusieurs élèves. La difficulté a été d'éviter que le débat tourne en rond ou se trouve dans une impasse. Des élèves peuvent se perdre dans les étapes et avoir du mal à visualiser l'ensemble de la démarche de résolution, et dans ce cas, le caractère motivant de l'activité ne fonctionne plus. Cette difficulté a été observée pour « jolie bouteille ».

Dans le principe d'auto-évaluation, certains élèves se sont imaginés qu'en mettant la cotation maximale à tous les critères ils auraient une bonne note, ce qui a pour effet de surévaluer le résultat. Par ailleurs, un élève peut considérer avoir compris alors que ce n'est pas le cas. Tout dépend du débat et de la démonstration qui en émerge, de la distinction entre conjecture et propriété démontrée, et des contre-exemples qui ont été donnés. On constate toutefois que la motivation évaluée reste toujours forte, ce qui est une indication encourageante. On peut supposer que les élèves sont sincères sur ce point, car si un sujet ne les avait pas intéressés ils l'auraient manifesté. Le sujet « Triangle puzzle » semble avoir généré de l'incertitude, et les élèves ont ressenti plus d'assurance sur les deux sujets suivants, « carrément équilibré » et « calcul mental », ce qui indique une amélioration de leur engagement dans l'activité.

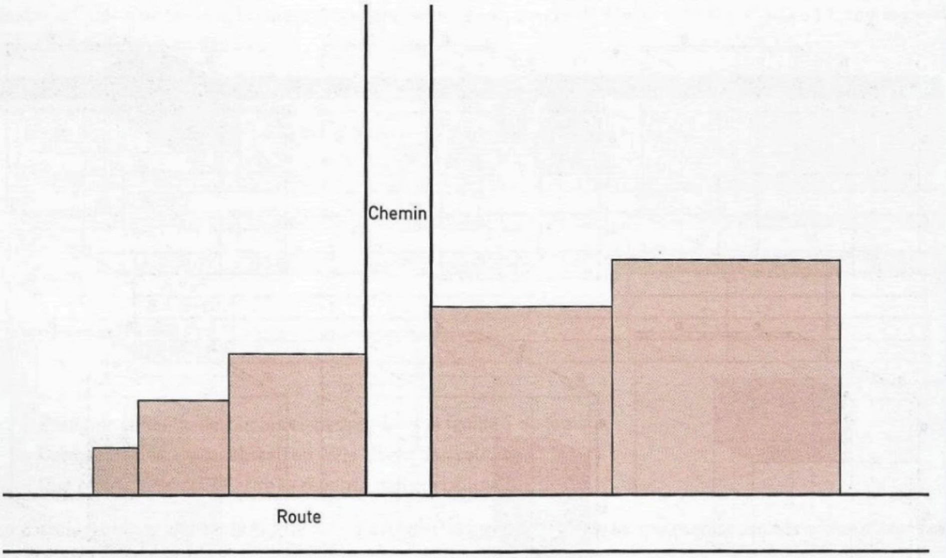
L'effet recherché par le rituel « remue-méninges » est bien observé, avec l'augmentation de la motivation des élèves et le développement des compétences de recherche, modélisation et démonstration.

Le travail final de recherche en groupes « Affaire d'héritage »

Cette activité (présentée dans l'encadré de la page suivante) devait permettre d'évaluer l'effet du rituel sur le travail de recherche des élèves. Le travail se divise en deux séances de 55 minutes, une séance de recherche en groupes suivie d'une séance de présentation des résultats. La séance de recherche se fait en demi-classe pour limiter le niveau sonore et favoriser une ambiance studieuse. Les groupes sont constitués de 3 à 4 élèves. Chaque élève se voit attribuer un rôle qui le rend responsable d'une tâche dans le groupe : le secrétaire, le chargé d'interroger le professeur, le responsable de la discipline, le rapporteur. Le sujet est alors distribué à tous les élèves. Comme pour le « remue-méninges », l'activité débute par un temps de travail individuel de 5 minutes, qui permet au professeur de s'assurer que chaque élève a lu l'énoncé et constitué son approche personnelle. A la fin de cette phase, l'élève doit inscrire sur son sujet une réflexion ou une question permettant de débuter et d'orienter la recherche. Le travail en groupes commence alors, pour une durée d'à peu près 40minutes.

Dans ce problème, les élèves prennent le rôle du notaire qui va devoir faire la répartition des terrains. On peut remarquer que la situation serait plus concrète avec une indication des unités de mesures des longueurs des côtés. Pour déterminer cette répartition, on peut choisir une variable, par exemple la longueur du côté

Deux frères ont hérité de cinq terrains carrés dont les côtés ont pour longueur cinq nombres entiers consécutifs. Les terrains sont disposés en deux groupes le long d'une route : les trois « plus petits » d'un côté d'un chemin et les deux « plus grands » de l'autre côté du chemin, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On souhaite déterminer les dimensions des terrains telles que les aires de part et d'autre du chemin soient égales.

Figure 5 : Sujet du problème « Affaire d'héritage »
(Source : Mathématiques classe de 3ème, Méthodes en Pratiques, D. Duponchel, M. Bilas, 2011, SCEREN.)

du plus petit terrain, et exprimer les aires des autres terrains en fonction de cette variable. On se ramène ensuite à la résolution d'une équation dans l'ensemble des nombres entiers naturels. Si n désigne la longueur du terrain qui a le plus petit côté, la répartition recherchée des surfaces se traduit par l'égalité :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2.$$

En développant les deux membres, on se ramène à la résolution de l'équation $n^2 - 8n - 20 = 0$. On dispose ensuite de méthodes de résolution graphique ou algébrique. Finalement, la solution entière $n = 10$ unités de longueur donne une répartition équitable des terrains, avec une surface de 365 unités carré.

Remarque sur le choix de l'inconnue : en posant n comme longueur du côté du 3ème carré, l'égalité s'écrit alors

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2.$$

avec $n \geq 2$ pour avoir des longueurs positives.

En développant les membres on obtient une équation plus simple à résoudre $n(n - 12) = 0$, dont les solutions sont 0 ou 12. Comme $n \geq 2$, la seule solution possible est 12 unités de longueur.

Les connaissances en jeu pour la recherche de ce sujet sont le calcul de l'aire d'un carré, le calcul algébrique (le développement d'un produit, les identités remarquables, la mise en équation d'un problème) et l'utilisation des fonctions du second degré.

La résolution de ce problème montre la nécessité de passer du cadre géométrique au cadre algébrique. La phase de tâtonnement et de recherche sera valorisée dans cette activité.

Pour éviter les blocages éventuels, chaque groupe pourra poser trois questions. C'est un élève désigné par l'enseignant, celui ayant le plus faible niveau dans le groupe, qui sera chargé de transmettre la question à l'enseignant et de communiquer la réponse au groupe. D'une façon générale, il est important pour l'enseignant de se taire et d'attendre les questions des élèves, de ne pas fermer le problème en donnant des indications qui orienteraient les recherches et de répondre autant que possible par des questions préparées à l'avance :

— Si le premier terrain fait 3 m de côté, la répartition est-elle équitable ?

— Si le premier terrain a un côté de longueur n, n désignant un entier naturel, quelles sont les dimensions des autres terrains ?

— Quelles sont, en fonction de n, les aires de chacun des terrains ?

— Comment s'écrit algébriquement l'égalité recherchée ?

— Comment résoudre cette égalité, trouver une solution ?

Un compte-rendu écrit du travail réalisé est demandé pour chaque groupe. Il est rédigé durant la phase de recherche. On ne demande pas principalement de trouver une solution, mais de rendre compte de la recherche effectuée en décrivant le plus rigoureusement possible les étapes de la recherche, de façon chronologique, en indiquant les erreurs et les réussites, les observations importantes issues de cette recherche, l'explication du résultat obtenu. Le comportement des groupes est également évalué par l'enseignant durant la séance : le sérieux, l'organisation, la cohésion.

La mise au travail des élèves a été immédiate et on pouvait sentir une volonté d'en découdre avec le problème proposé. Cela constitue une progression dans l'investissement des élèves dans la recherche et un signe de motivation générale. La constitution imposée des groupes par élèves de même niveau, a été jugée injuste par des élèves qui s'estimaient défavorisés par rapport aux groupes de bon niveau. Mais ce choix apporte plusieurs atouts : inciter les élèves à s'investir dans la recherche, valoriser leur démarche même si la solution n'est pas trouvée, et favoriser l'émergence d'un résultat de niveau intéressant dans les travaux des meilleurs groupes, bien que cela ne soit pas garanti.

Rapidement une équipe d'élèves a trouvé une solution mais ne savait pas comment l'expliquer. Les consignes indiquant clairement que la solution ne constitue pas l'élément principal du compte rendu, il leur a fallu détailler leur travail de recherche. On remarque toujours des difficultés pour modéliser, représenter un problème, et démontrer les résultats obtenus. Même si cette recherche ne nécessitait pas l'établissement de conjecture, il fallait appuyer les résultats sur une démarche de recherche. Plusieurs groupes ont su mettre en équation le problème, et réduire l'expression, mais tous ont recherché une solution par tâtonnement, sans penser à réaliser une résolution graphique.

Beaucoup plus de questions ont été posées par les élèves que lors de la première séance de travail en groupes. Par exemple :

— « Comment rédiger la démonstration ? c'est logique, c'est tout ! » Ce qui montre les difficultés à exprimer un raisonnement même chez les bons élèves.

— « La figure est-elle à l'échelle ? » Venant des élèves qui espèrent trouver une solution en mesurant des longueurs sur la figure.

— « L'équation que nous avons obtenue est-elle juste ? » Cette question est revenue très souvent, ce qui montre la difficulté des élèves à se contrôler.

On peut apprécier, sur la rédaction présentée en figure 7, la difficulté à exprimer algébriquement une configuration, à modéliser un problème. L'équation posée est correcte, mais elle comporte cinq inconnues. Les élèves ont bien compris que les côtés des carrés étaient des entiers consécutifs, mais ils ne l'ont pas exprimé algébriquement. Pourtant ils ont appliqué cette condition pour trouver une solution par tâtonnements.

Un groupe d'élèves a eu l'idée d'écrire un algorithme qui testerait successivement tous les entiers positifs jusqu'à trouver une solution. L'idée est bonne, mais, comme le montre leur rédaction (figure 8), l'écriture de l'algorithme reste sommaire, et la boucle d'itération conditionnelle manque de rigueur. Les élèves auraient pu également avoir l'idée d'utiliser un tableur.

L'intérêt aurait été de programmer cet algorithme pour trouver la solution. Cela n'a pas pu être réalisé durant la séance faute de temps et d'aisance des élèves dans la programmation sur calculatrice ou avec un ordinateur.

L'aire des 3 petits carrés est égal à celle des 2 grands carrés.
Aire 3 petitscarrés = Aire 2 grands carrés
$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$
Soient a, b, c, d, e des nombres entiers consécutifs.

Étape 1 : Tout d'abord, nous avons essayé l'équation du dessus avec tous les nombres entiers jusqu'à 10 et nous avons trouvé :

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$
$365 = 365$

Figure 7

A, B des entiers
$A = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$
$B = (x+3)^2 + (x+4)^2$ * afficher résultat
si* A = B alors fin
sinon ajouter +1 à x

Figure 8

Le mode de travail en groupes s'est montré difficile pour certains élèves qui aiment travailler seuls et préfèrent trouver par eux-mêmes. Certains ont tendance à considérer leurs équipiers comme une charge ou un obstacle plutôt qu'une aide. Par contre, on remarque de nombreux élèves qui recherchent un appui, un soutien dans le groupe, une aide dans l'activité, et pour eux le travail en groupes peut être bénéfique. Des élèves montrent également une nature à aider les autres, ce qui est un comportement positif pour le groupe. Le fonctionnement apparait bien meilleur quand l'homogénéité du groupe incite les élèves à s'investir dans la recherche, indépendamment des affinités existantes.

La séance de présentation des résultats s'est déroulée en classe entière le lendemain, après un délai court permettant de conserver la continuité de l'étude. Les comptes-rendus ont été scannés pour être projetés au tableau et servir de support aux élèves. L'ordre des présentations est organisé par l'enseignant de façon progressive afin qu'apparaissent les différentes étapes de recherches intermédiaires dans les travaux réalisés par les groupes : observations, conjectures, présentation de résultats et finalement démonstrations. Tout d'abord, nous avons vu le questionnement des groupes dont les recherches n'ont pas abouti, puis les travaux des groupes ayant un premier résultat non démontré, les idées intéressantes, et finalement les groupes présentant une preuve sous la forme d'un calcul donnant la bonne répartition. Les élèves ont pu suivre de cette façon un cheminement analogue à celui de la recherche scientifique, où les questions posées trouvent des réponses pas à pas, avec les apports et découvertes des différents intervenants. Le débat a permis aux élèves de confronter leur travail à ceux des autres groupes, et d'auto-évaluer dans cet échange leurs méthodes et résultats.

Le travail réalisé par chaque groupe durant ces séances a été évalué aussi précisément que possible par l'enseignant en suivant une grille de critères issus en partie des compétences du lycée en mathématiques. Le tableau ci-dessous présente la synthèse des évaluations sur l'ensemble des groupes. On constate que les compétences manquent encore de développement dans la modélisation du problème, les représentations utilisées, et la réalisation des démonstrations. Cependant, l'activité de recherche et le travail

Problème « l'héritage »	Quelques essais	En dévelop- -pement	En bonne voie	Maitrisé
Activité de recherche du groupe				X
Traiter l'information utile				X
Traduction en langage mathématique			X	
Méthodes de recherche utilisées			X	
Modélisations		X		
Représentations utilisées		X		
Qualité des démonstrations		X		
Vérifications des résultats			X	
Niveau du travail réalisé, du résultat			X	
Rigueur du travail			X	
Soin du rapport			X	

réalisé sont en progression, ce qui semble indiquer une bonne motivation des élèves.

Synthèse et perspectives

L'ensemble des résultats de cette étude permet d'apprécier positivement le parcours réalisé avec la classe de 2nd du lycée de la Matheysine. L'expérimentation confirme la nécessité de faire des activités de recherche en classe, sur des problèmes aux contextes variés, pour faire appliquer aux élèves leurs connaissances en mathématiques et les structurer. Dans cette activité de recherche les élèves sont actifs dans leur apprentissage, ils doivent s'adapter et échanger avec les autres. Les élèves interagissent entre eux, parlent mathématiques, et cette matière prend place dans leur environnement. Mais tous les élèves n'ont pas montré l'engagement prévu. On constate chez certains une limitation volontaire du travail réalisé : « Quel est le minimum à faire pour avoir une note correcte ? », d'autres brident leur créativité par une démarche scolaire « Que dois-je répondre pour être conforme à ce que l'on attend de moi ? »

La mise en action dans le travail de recherche s'est bien améliorée durant l'expérimentation avec une évolution positive du comportement des élèves. Dans les travaux de recherche réalisés, même si des solutions aux problèmes posés sont effectivement trouvées, les compétences de représentation, de démonstration et de validation doivent encore être développées. L'étayage envisagé par le travail en équipe ne fonctionne pas dans ce cas car, de façon générale, les élèves doivent travailler ces compétences et ne peuvent pas soutenir leurs camarades. A ce titre, la phase de débat est très importante car elle permet l'échafaudage pas à pas de la solution au problème et la présentation des différentes voies possibles. On y montre les possibilités de représentation et de démonstration des propriétés conjecturées et la nécessité de valider les solutions trouvées. Dans ce débat, les élèves ont la parole, mais le rôle d'animateur de l'enseignant est crucial. Une préparation fine de la séance est nécessaire pour en apporter tout le bénéfice aux élèves et une stricte discipline doit être instaurée pour que chacun puisse s'exprimer et pour garantir l'écoute de tous. Le débat permet aux élèves d'auto-évaluer leur travail et de trouver par eux-mêmes une correction dans les présentations des autres élèves. Mais cet apprentissage nécessite une pratique répétée régulièrement tout au long de l'année pour être effective.

Du point de vue de la motivation, les élèves ont bien adopté les recherches ritualisées « remue-méninges ». Leurs motivations sont bien sûr multiples :le défi de la recherche, l'intérêt du sujet proposé, la curiosité, la nouveauté de l'activité, le fait de sortir du cadre habituel de travail. Les élèves de bon niveau veulent des sujets intéressants, et les élèves plus faibles font des propositions, participent au débat. Certains même souhaitent proposer des problèmes, et il n'est pas rare lors de l'interclasse qu'un élève vienne proposer une question défi. On constate la nécessité de bien préparer les sujets, de les cibler habilement. L'expérience permettra d'avoir une sélection de sujets propices à ce type de recherche et de les rôder.

On observe donc un effet positif sur la motivation mais également dans le développement des compétences de recherche et dans la capacité à travailler en groupes. Ces résultats sont encourageants et montrent que l'activité de recherche ritualisée « remue-méninges » mériterait d'être organisée de façon régulière dès le début de l'année, avec périodiquement un travail de recherche en groupes. De cette façon, la motivation naissante serait entretenue et l'activité de recherche utilisée pour donner du sens aux mathématiques et structurer progressivement les connaissances des élèves.

Bibliographie

Arsac, G & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert.* IREM de Lyon, CRDP de Lyon, Villeurbanne, Collection : Repères pour agir.

APMEP (2003) brochures n°150 et n°154 : « *Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au Lycée* » - Tome 1 : en référence privilégiée à des contenus - Tome 2 : en référence privilégiée à des objectifs méthodologiques

Brun, J. (1999). Revue Math-Ecole, n°141, 1999.

Fenouillet, G & Lieury, A. (2013). *Motivation et réussite scolaire*, Paris, Edition Dunod.

Glasson, P & Durand, X, (2018), « *Les « remue-méninges », motivation des élèves en classe de mathématiques de 2nde, par la mise en place d'un rituel de recherche de problèmes ouverts* » , mémoire de Master 2, ESPE Grenoble

Merri,M & Vannie r, MP (2015). Revue Recherches en Éducation HS N°8, Septembre 2015, « *Pour un renouveau des usages et des définitions des rituels à l'école* »

Ouvrier-Buffet, C. (2006) XXXIIIe colloque COPIRELEM. *Les situations-recherches pour la classe.*

Robert, A & Rogalsky, M (2004). *Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée.* Irem de Paris 7 et Irem de Lille. Repères Irem. n° 54 - janvier 2004, pages 77 à 103.

Vergnaud, G. (1986). *Psychologie du développement cognitif et didactique des Mathématiques.* Revue Grand N n°38, 1986.

Viau.R. (2000). *Des conditions à respecter pour susciter la motivation des élèves.* Volume 5, numéro 3.

Sources des sujets de problèmes :

Académie de Lyon, IREM de Lyon, APMEP de Lyon « *Le rallye mathématique* », créé en 2006

Repéré à http://rallye-math.univ-lyon1.fr/

Durand A. & Durand J. « *Les Problèmes DUDU* », Web-série démarrée début 2013

Repéré à :https://mathix.org/linux/problemes-ouverts/les-problemes-dudu

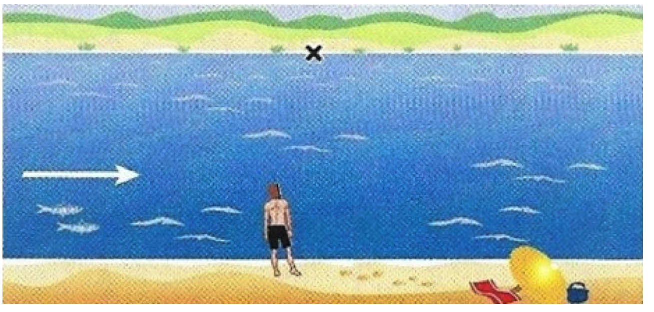
Monka Y. « *Les rubriques de «m@ths et tiques» !* », Académie de Strasbourg

Repéré à http://www.maths-et-tiques.fr

ANNEXE

Enoncé des sujets proposés
Recherche ritualisée : « remue-méninges »

Traversée du fleuve

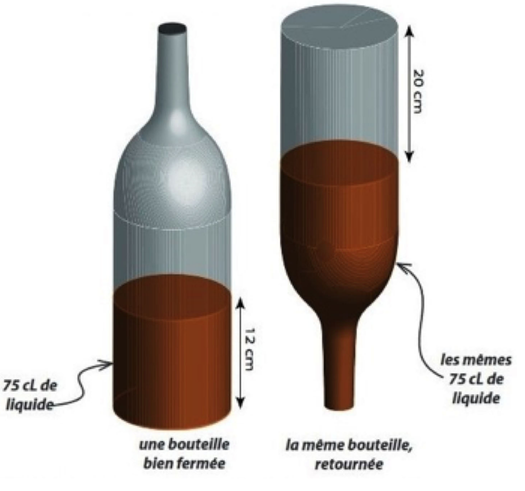


Ce nageur veut rejoindre le rivage d'en face au point B. La rivière a une largeur de 90 m. La vitesse du courant est de 4 km/h, et celle du nageur 2 km/h. Que faire ?
(Source : Transmath 2^{nde}, éditions Nathan, 2010)

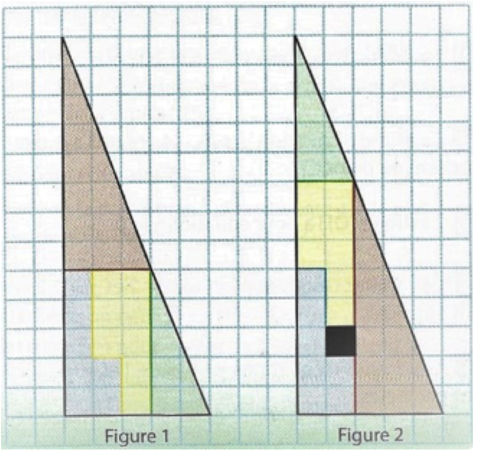
Jolie bouteille

Quelle est la contenance de cette bouteille ?
(Le dessin n'est pas à l'échelle)

(Source : Rallye Mathématique de l'académie de Lyon, sujets 2017)



Triangle puzzle



En réorganisant les pièces de la figure 1, on obtient la figure 2, mais un carré reste vide.

Que s'est-il passé ?

(Source : Transmath 2nde, éditions Nathan, 2010)

Problème à dudu : le calcul mental

L'énoncé se présente sous forme d'une vidéo projetée, dont voici le résumé :

Une personne lance un défi à son ami :
— Je suis très fort en calcul mental, donne-moi un nombre au hasard !
— 5, répond l'autre.
— Eh bien, la différence du carré de 6 et du carré de 5 est 11! Essaye-en un autre.
— ok, 10 ?
— La différence du carré de 11 et du carré de 10 est 21 !
— oui, mais attends… 17 ?
— La différence du carré de 18 et du carré de 17 ? c'est 35 ! .
— Alors 1789 !
— La différence du carré de 1790 et du carré de 1789 ? Voilà c'est 3579 !

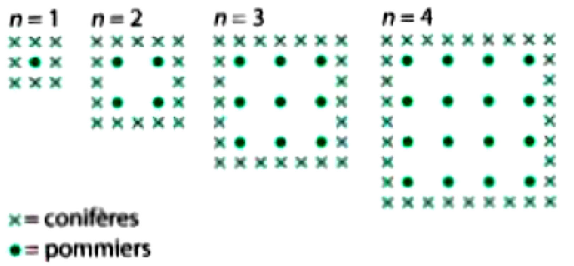
Quelle est l'astuce ?

(Source. « *Les Problèmes DUDU* », saison 4, 2015-2016, Durand A. & Durand J)

Problème recherché en groupes

Le verger

Un fermier plante des pommiers en carré. Pour les protéger du vent, il plante des conifères tout autour du verger.
Voici un schéma qui illustre la position des conifères et des pommiers pour un nombre *n* de rangées de pommiers.
Si le fermier veut faire un verger plus grand, le nombre de pommiers peut-il devenir plus grand que le nombre de conifères ?



(Source : Math'X 2nde, Editions Didier, 2014)