REPERES - IREM. N° 115 - avril 2019

EXPLIQUER, JUSTIFIER, PROUVER, DEMONTRER ?

Émilie BARON, Christophe HACHE
Irem de Paris
LDAR, Université Paris Diderot

Le fait de justifier[1] est une pratique omniprésente de l'enseignement, dans toutes les disciplines, et dans la vie courante. Nous pouvons prendre l'exemple du mot « justifier ». On peut en effet « justifier une absence », « justifier de son identité », choisir de « justifier les lignes d'un texte » quand on le met en page, et nous le retrouvons dans certaines expressions bien connues, par exemple : « la fin justifie les moyens ».

Dans l'enseignement au collège, une grande variété de mots est utilisée pour mettre les élèves dans une activité de justification. Cette variété est très apparente dans les instructions officielles, quelle que soit la discipline, et dans les usages. En ce qui concerne les mathématiques, nous avons relevé, au cours de nos recherches (Baron, 2016), un champ lexical très varié, mais très peu explicité pour parler des diverses activités liées à la justification : « expliquer », « justifier », « prouver », « démontrer », « montrer », etc. Nous avons aussi mis en évidence la polysémie de ces mots et la diversité de ces usages d'un enseignant à l'autre, d'un manuel à l'autre, mais aussi pour un même enseignant ou un même manuel. Les mots utilisés ne sont pourtant pas neutres pour la compréhension par les élèves de la nature du travail mathématique, notamment dans les phases de raisonnement.

Un autre phénomène concourt à brouiller les pistes. En mathématiques au collège plusieurs paradigmes de justification cohabitent : certains existent au primaire et continuent à être présents au collège (justification matérielle, instrumentale, explication du comment, raisonnement sur des exemples ou à partir d'exemples, etc.), d'autres apparaissent au collège et font l'objet d'un apprentissage (raisonnement hypothético - déductif, démonstration).

1 Les mots « justifier » ou « justification » sont à prendre dans cette introduction dans un sens très large.

Dans cet article, nous nous intéresserons à illustrer cette variété. Nous interrogerons les différentes nuances de sens que recouvrent ces mots, en prenant en compte le rôle particulier de la démonstration en mathématique dans la pratique de la justification. Nous commencerons par une rapide analyse des programmes, puis nous aborderons ces questions de formulation liées aux activités d'explication et de justification dans différents contextes.

Dans un premier temps, nous étudierons des contenus de manuels. Qu'on lise ces manuels comme des exemples de mise en œuvre des programmes ou comme des ressources dont les enseignants s'inspirent, il est en effet instructif d'analyser la façon dont sont exprimées les consignes liées à la justification. Dans un second temps nous présenterons, à partir d'entretiens menés avec des enseignants de mathématiques de collège, la diversité de la façon dont ils évoquent la justification, et le travail en classe à ce sujet. Nous terminerons par la présentation d'une expérimentation menée avec des élèves de collège.

Nous soulignons ici que nous n'avons pas pour but de définir les mots « expliquer », « justifier », « prouver » ou « démontrer », mais d'alimenter la réflexion sur les différents sens possibles (pour chacun et collectivement, dans l'enseignement des mathématiques), et sur la façon dont les élèves peuvent s'approprier les notions sous-jacentes.

La justification dans les programmes

Dans les programmes de cycle 4 mis en place en 2016 (Ministère, 2016), nous pouvons trouver :

— En Technologie, « les matériaux utilisés doivent être *justifiés* »[2] (p 360).

— En Éducation Musicale, les élèves doivent « *justifier* des choix d'interprétation et de création, *justifier* un avis sur une œuvre et défendre un point de vue en argumentant » (p 279).

— En Français, ils doivent « *justifier* de leur interprétation d'un texte à partir d'éléments du texte » (p 235).

— En SVT, un des attendus de fin de cycle est la « *justification* des comportements responsables face à l'environnement et à la préservation des ressources limitées de la planète » (p 343).

— En mathématiques, les élèves doivent, par exemple, « *justifier* leurs affirmations et rechercher la validité des informations dont ils disposent », ils sont conduits à « *justifier* par un raisonnement l'égalité de deux quotients », à « *justifier* qu'un nombre est ou non l'inverse d'un autre ».

— En Histoire-Géographie, une des compétences travaillées est « *justifier* une démarche » (p 308).

On trouve aussi dans les programme d'autres mots associés à la pratique de la justification. Une recherche plus large par mots-clés[3] dans ces documents a permis d'obtenir le décompte suivant, toutes disciplines confondues : 111 occurrences des termes « argumenter » / « argumentation » / « argument » (10 en mathématiques), 83 occurrences des termes « explication » / « expliquer » (5 en mathématiques), 58 occurrences des termes « justifier » / « justification » (5 en mathématiques), 35 occurrences des termes « raisonner »/ « raisonnement » (15 en mathématiques), 14 occurrences des termes « démonstration » / « démontrer » (7 en mathématiques) et 8 occurrences des termes « preuve » / « prouver » (3 en mathématiques)[4].

2 Nous soulignons (italique) dans cet extrait et dans les suivants les mots-clés que nous avons sélectionnés.

3 Mots que nous associons assez largement à l'idée de justification.

4 Le groupe « Léo » de l'Irem de Paris a fait un relevé par disciplines des termes liés à la justification au sens large dans les programmes (Léo, 2017).

Les termes utilisés sont donc variés. Ils sont, de plus, peu définis. Comme le montrent ces extraits des programmes de cycles 3 et 4 à propos du domaine 3 « La formation de la personne et du citoyen » du socle commun, traitant de la justification, de l'argumentation et de la preuve :

> « Tous les enseignements contribuent à la formation du jugement. En histoire plus particulièrement, les élèves sont amenés à distinguer l'histoire de la fiction. Les mathématiques contribuent à construire chez les élèves l'idée de *preuve* et d'*argumentation* » (cycle 3, Ministère, 2016 p 97)

> « La capacité à exprimer ses émotions et sa pensée, à *justifier* ses choix, à s'insérer dans des controverses en respectant les autres ; la capacité à vivre et travailler dans un collectif et dans la société en général ; les connaissances scientifiques et techniques qui permettent d'accéder à la vérité et à la *preuve*, de la différencier d'une simple opinion, de comprendre les enjeux éthiques des applications scientifiques et techniques ; le respect des règles et la possibilité de les modifier ; les savoirs littéraires et historiques indispensables à la compréhension du sens de la citoyenneté, de la place de l'individu dans la société et du devoir de défense » (cycle 4, Ministère, 2016 p 224)

On perçoit que la justification et l'argumentation ont ainsi pour objectifs de participer à la compréhension du monde et à la construction d'un jugement critique.

Dans les parties concernant plus précisément les mathématiques, ces mots sont aussi utilisés. On comprend que le fait de « justifier » évolue dans l'enseignement des mathématiques, le support de validation change : « prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités [du cycle 3] permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'*explicitation* de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le *raisonnement* et l'*argumentation* » (Ministère 2016, p 209). Au cycle 4, les programmes parlent ainsi de « [*justifier*] par un *raisonnement* l'égalité de deux quotients » (Ministère 2016, p 374).

Les instructions officielles restent imprécises quant aux sens de ces mots, sauf pour le mot « démontrer » qui est introduit et défini explicitement au cycle 4 : « *démontrer* : utiliser un *raisonnement logique* et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion » (Ministère 2016, p 370). Le terme « démontrer » cohabite avec le mot « argumenter » qui n'est pas précisé, mais semble avoir un sens plus large : l'élève doit savoir « fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'*argumentation* » (Ministère 2016, p 370), « comprendre les *explications* d'un autre et *argumenter* dans l'échange » (Ministère 2016, p 371).

Le manque global de précision constaté ne nous permet pas de savoir comment est évoquée la justification en classe et le sens des mots qui sont utilisés par les enseignants et les élèves, notamment en cours de mathématiques. Nous proposons maintenant un premier éclairage de l'usage de ces mots par une analyse de manuels.

La justification dans les manuels

Les manuels proposent des activités, des cours, des méthodes et des exercices mettant en application les programmes d'enseignement. Ils reflètent les représentations et les choix pédagogiques des auteurs par rapport aux instructions officielles, ce qui fait d'eux

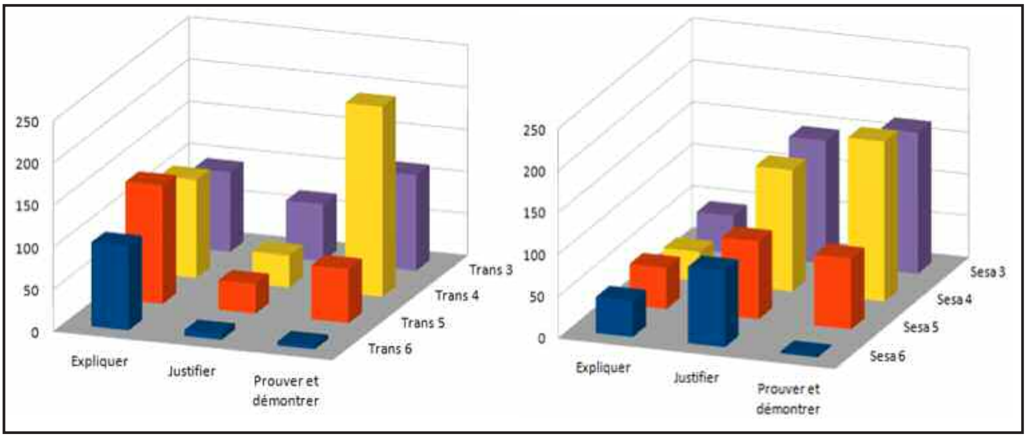


Figure 1 : *Comparaison de l'usage des mots dans deux manuels*

une forme d'interprétation des contenus des programmes.

Pour avoir une première idée de la fréquence d'utilisation de chacun des termes pointés dans l'enseignement des mathématiques au collège, nous avons réalisé une petite enquête dans deux collections de manuels : Sésamath (Sésamath, 2006) et Transmath (Transmath, 2006).

À la lecture de ces deux manuels nous voyons que ces mots ne sont pas utilisés de façon homogène. Les résultats de cette enquête soulèvent des questions, par exemple :

— Que traduisent les différences d'usage de ces familles de mots entre ces deux collections ? (« expliquer » est, par exemple, relativement peu utilisé par les manuels Sésamath alors que « justifier » l'est beaucoup, et inversement dans les manuels Transmath)

— Comment comprendre les évolutions de la 6e à la 3e dans un manuel donné ?

Pour nous aider à répondre à ces questions et mieux comprendre les différents sens de ces mots et de leurs usages, nous nous sommes inspirés du travail de Nicolas Balacheff et Sophie Soury-Lavergne (Balacheff, Soury-Lavergne, 1996). Nous avons placé la justification au sein d'une catégorie plus large, l'explication. Nous adaptons les catégories qu'ils proposent pour distinguer trois types d'explication selon leurs fonctions (dans la suite du texte, les deux dernières seront celles auxquelles nous nous référerons quand nous parlerons de « justification », la dernière étant associée ici au mot « démonstration ») :

— l'explication pour comprendre, faire comprendre : décrire, formuler ou reformuler une pensée, une affirmation, une technique, un savoir, un savoir faire, rendre compréhensible, faire des liens, rendre rationnel, expliciter des étapes d'un processus, lever des implicites, définir ou redéfinir certains objets en jeu, éclairer, etc.

— l'explication pour convaincre : donner des arguments, des raisons pour montrer que ce que l'on dit, ce qu'on affirme, ce qu'on fait est juste, cohérent, vraisemblable, pertinent, conforme à une norme… pour faire adhérer l'interlocuteur à ce que l'on affirme ou à ce que l'on fait,

— l'explication pour prouver : proposer un raisonnement valide dans un certain modèle, dans une communauté, en cohérence avec des règles préétablies. Dans certaines communautés une preuve est caractérisée par sa réfutabilité. Nous distinguerons celles qui sont basées sur les règles d'inférences spécifiques aux mathématiques, explicitées notamment par les logiciens.

En mathématiques, au collège, on croise ces divers niveaux d'explication. Les manuels demandent par exemple aux élèves d'« Expliquer une construction » et /ou de « Justifier une construction », à la question « Vrai ou faux ? » d'« Expliquer la réponse » et / ou de « Justifier la réponse. », l'élève va aussi être amené à « Justifier une conjecture », « Calculer mentalement [et] expliquer le procédé choisi », « Démontrer que (…) », « Prouver que (…) », etc. (Citations d'énoncés d'exercices de manuels de collège).

Dans la suite de cette partie, nous nous référons à une étude déjà existante effectuée début 2016 sur des manuels édités en 2006 (Baron, 2016). Nous présentons ici la manière dont nous avons analysé les manuels et les conclusions auxquelles nous sommes parvenus. Cette analyse s'articule autour des questions suivantes :

— Sur quels éléments s'appuie le manuel pour introduire et motiver la pratique de la justification ? Quelles sont les propositions pour donner du sens à cette pratique dans une situation d'enseignement ? Dans quel contexte et dans quel but apparaît la justification dans le manuel ?

— Quelles sont les attentes et les exigences du manuel sur le contenu et la forme des justifications ? Comment les élèves peuvent-ils interpréter les consignes ? Leurs initiatives sont-elles possibles et si oui, comment sont-elles prises en compte ?

— Quelle progression dans les apprentissages de la justification et de la démonstration est-elle mise en œuvre dans le manuel ?

Pour avoir des éléments de réponses à ces questions, nous avons étudié dans le manuel Transmath 5e (Transmath, 2006) toutes les situations susceptibles d'amener à la production d'une justification. Pour les repérer, nous avons choisi d'effectuer une recherche par mots clés sur l'intégralité de la version numérique du manuel. Il nous a paru peu raisonnable de nous centrer uniquement sur l'emploi des termes « justification » et « justifier » car cela ne nous permettait pas d'avoir accès à toutes les situations de justification dans le sens où nous l'avons définie précédemment. De plus, en nous limitant à ces seuls termes, nous attachions plus d'importance au mot « justifier » qu'à son sens et donc au fait de justifier. Nous avons donc choisi d'élargir la recherche de mots en établissant la liste de mots clés suivante (à laquelle il faut ajouter toutes les formulations dérivées : conjugaison, substantifs, etc.) : « expliquer », « pourquoi », « comment », « affirmer », « justifier », « expliquer », « vrai ou faux », « prouver », « argumenter », « démontrer » et « montrer ». Nous admettons que ce type de recherche a pour inconvénient de laisser de côté toutes les situations dans laquelle la demande de justification n'est pas explicitement formulée bien qu'elle soit attendue.

Nous caractérisons chacune des situations repérées selon deux axes.

D'une part, nous étudions le cadre dans lequel s'inscrit la justification selon les items suivants : le domaine mathématique (les instructions officielles recommandent de pratiquer la justification dans tous les thèmes développés au collège), le contexte et les objectifs (la découverte de nouvelles connaissances, le réinvestissement de connaissances préalablement abordées dans le cours pour résoudre une tâche simple ou complexe, la résolution d'un problème), la formulation de la demande (la question est-elle ouverte ou le résultat est-il donné ? Quel est le vocabulaire utilisé ? La demande de justification est-elle explicite ? Des précisions sont-elles données quant au type de justification attendu ?) et l'implication potentielle de l'élève (à quel point la justification est-elle à la charge de l'élève ? Quelle marge de manœuvre a-t-il ?).

D'autre part, nous nous intéressons à la justification elle-même : sa fonction (valider ou invalider, expliquer comment, expliquer pourquoi, démontrer), l'objet sur lequel elle porte (un choix, une affirmation, un résultat, une démarche, une définition, une proposition ou un théorème) et, le cas échéant, ses sources de validité (les arguments peuvent prendre appui sur un calcul, une propriété mathématique, une figure ou construction géométrique, un exemple générique, un contre-exemple, un graphique, des données empiriques, un argument d'autorité, l'usage d'un instrument comme la calculatrice, les outils de géométrie, un ordinateur, un logiciel de géométrie dynamique).

Pour illustrer notre propos, nous présentons dans l'encadré ci-contre l'analyse d'un exercice extrait du premier chapitre « Enchaînement d'opérations » et situé dans la rubrique « Exercice d'approfondissement ».

D'un point de vue quantitatif, l'étude menée sur l'ensemble du manuel montre que la justification est abordée dans tous les domaines enseignés au collège (numérique, algébrique, statistique, des grandeurs et des mesures, géométrique). La répartition demeure cependant très hétérogène : la géométrie reste le domaine privilégié concentrant une grande majorité des exercices exigeant une justification. Nous avons en effet décompté :

— 26 situations[5] mettant en jeu une justification dans la partie « Nombres et calculs » (avec une moyenne d'environ 6 exercices par chapitre),
— 10 dans la partie « Organisation et gestion de données, fonctions » (avec une moyenne de 5 exercices par chapitre),
— et 151 dans la partie « Géométrie, grandeurs et mesures » (avec une moyenne d'environ 21 exercices par chapitre).

Avec 44 exercices d'application concernés par une justification, le chapitre « Parallélogrammes et quadrilatères » centralise à lui tout seul un tiers de tous les exercices et environ un quart des situations relatives à la justification du manuel. Par ailleurs, et ce quel que soit le thème, la pratique de la justification est peu représentée dans les exercices « de consolidation », dont l'objectif est d'apprendre à l'élève à travailler en autonomie.

D'un point de vue plus qualitatif, nous avons relevé différents éléments nous permettant de comprendre la façon dont est motivée la production d'une justification dans le manuel.

Le rôle du doute est important pour donner du sens à la justification. Il occupe cependant une place minime dans les situations relevées : nous n'avons trouvé qu'un seul exercice dans lequel la solution allait à l'encontre de l'intuition (un exercice dans lequel il est demandé de prouver qu'une conjecture est fausse bien qu'elle soit vérifiée préalablement pour des cas particuliers). Dans toutes les autres situations le résultat est patent et s'avère finalement vrai. Par-

5 Nous distinguons ici les exercices des situations. Les situations recouvrent un plus grand nombre de contextes : corrections d'exercices, activités, etc.

86 Un programme de calcul

- Choisir un nombre entier.
- Ajouter le nombre qui le suit.
- Multiplier par 2.
- Retrancher 2.
- Diviser par 4.

1. Appliquer ce programme de calcul à chacun des nombres de départ suivants :
a. 1 b. 5 c. 37 d. 128

2. Ce que l'on constate avec les nombres précédents est-il général ? Expliquer.

Figure 2: exercice n°86 p24, Transmath 5e

Cadre dans lequel s'inscrit la justification

Domaine mathématique

Algébrique.

Contexte et objectifs

Considéré comme un exercice d'approfondissement, il apparaît dans la rubrique « s'initier au raisonnement ».
Remarque : Au sein de la même rubrique, dans un exercice précédent intitulé « de la conjecture à la généralisation », le manuel propose une méthode en trois étapes pour guider l'élève dans la construction d'un raisonnement à l'aide du calcul littéral pour démontrer une conjecture : calculs sur des exemples particuliers, formulation d'une conjecture et preuve avec introduction d'une lettre.

Formulation de la demande

« Expliquer » (question 2).

Implication personnelle de l'élève

La question pour laquelle on attend une explication est ouverte donc l'implication de l'élève dans le résultat attendu est importante. De plus, aucune indication n'est donnée sur la démarche à suivre laissant toute liberté à l'élève dans la production de son explication.

Types de justification

Objet et fonction

L'explication porte sur un constat avec deux fonctions possibles :
- Valider ou invalider la généralisation de résultats observés dans des cas particuliers
- Démontrer une conjecture

Sources de validation

L'explication attendue à la seconde question dépend des résultats obtenus à la question précédente. Nous considérons le cas où ses résultats sont corrects, nous distinguons trois explications possibles selon le type de raisonnement mis en jeu mais aussi selon la nature de ce que l'on cherche à expliquer :
- explication mettant en œuvre un raisonnement inductif : la généralisation s'obtient directement à partir des observations sur des exemples particuliers.
- explication mettant en œuvre un raisonnement déductif avec l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre initial quelconque : il fait fonctionner le programme sur ce nombre puis par transformation d'expressions littérales selon les règles de la distributivité, il en déduit la généralisation de son constat.
- explication de la non suffisance d'une vérification sur quelques cas particuliers pour justifier un résultat général. Dans ce cas, l'accent est mis sur le fait qu'en mathématique, l'observation sur quelques exemples particuliers ne permet pas d'établir la vérité d'une règle générale. L'explication renseigne sur les sources de validation d'un raisonnement en mathématiques.

fois l'énoncé demande à l'élève de formuler une conjecture et affirme qu'elle est vraie [6] : la conjecture attendue est si évidente qu'il semble que l'élève ne peut en émettre une autre, l'énoncé laisse entendre que ce que dit ou pense l'élève (fondé sur des observations et sur l'intuition) est nécessairement vrai, toute justification devient dès lors inutile, ou, au moins, artificielle. Nous pouvons penser que la répétition de ce type de situations ne participe pas à la prise de sens

6 Exemple : « Que semble-t-on pouvoir dire du point N pour le cercle ? Prouver votre affirmation » (exercice 123, chapitre 3, question b)

pour l'élève de l'idée de démonstration, voire de raisonnement.

Un autre facteur dont nous pensons qu'il ne facilite pas la production de démonstrations est la place donnée aux figures dans les résolutions. Dans l'activité ci-dessous par exemple (chapitre « Angles et parallélisme » du manuel), la figure est utilisée à la fois pour formuler une conjecture dans la première partie, mais également pour prouver des propriétés : ici dans la question 6.a il est demandé à l'élève de déterminer l'image de différents objets géométrique par symétrie centrale en reprenant la figure ayant servi à établir la conjecture. La structure de l'énoncé dissimule le processus de validation de ces résultats par des propriétés liées à la symétrie centrale, processus qui est pourtant essentiel pour parler de démonstration dans cette situation.

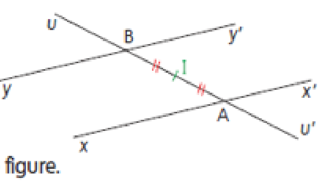
Que ce soit dans la vie courante ou à l'école, le fait de justifier prend son sens dans des situations mettant en jeu plusieurs interlocuteurs qui interagissent et débattent, confrontant leurs idées et leurs arguments dans le but de se faire comprendre, de convaincre ou de persuader. Il est difficile de se rendre compte de la réalité des situations de communication en travaillant sur un manuel, nous avons donc cherché si ce manuel offrait des moyens alternatifs de faire naître chez l'élève le besoin de recourir à des notions théoriques pour valider un résultat afin de l'amener progressivement vers l'idée de vérité de faits mathématiques et de validité des raisonnements.

Dans certains exercices dits de consolidation ou d'approfondissement, la notion mathématique à mobiliser apparaît dans le titre de l'exercice ou dans l'aide complémentaire proposée

Angles formés par deux parallèles et une sécante

5 Expérimentation

Objectif
Réfléchir sur les affirmations dont on est sûr et celles pour lesquelles on ne l'est pas.



La droite (uu') coupe les droites parallèles (xx') et (yy') en A et B.
Le point I est le milieu du segment $[AB]$.

a. Citer les angles opposés par le sommet de cette figure.

b. Conjecturer d'autres angles de même mesure.

6 Une preuve

Objectif
Justifier les conjectures émises à l'activité 5.

On reprend la figure de l'activité précédente.

a. Par la symétrie de centre I, quel est le symétrique :
- du point A ?
- de la demi-droite $[Ax)$?
- de la demi-droite $[AI)$?

Quelle propriété de la symétrie centrale permet de conclure que $\widehat{xAB} = \widehat{ABy'}$?

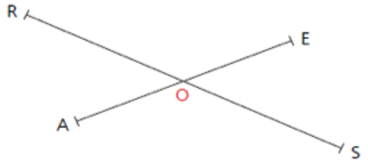
b. Expliquer alors pourquoi $\widehat{xAB} = \widehat{yBu}$.

c. Énoncer les propriétés ainsi démontrées.

@ nathan.fr

Figure 3 : *activités p168, Transmath 5e*

51 **Penser à une symétrie centrale**



Ces deux segments [RS] et [AE] ont le même milieu O. Que peut-on dire des droites (AR) et (ES) ? des longueurs AR et ES ? Expliquer.

Aide

Cet énoncé n'emploie absolument pas le mot « symétrie ». Malgré tout, traduis le fait que O soit le milieu de [RS] et [AE] en termes de symétrie centrale.

Figure 4 : *exercice n°51p141, Transmath 5e*

bien que la question reste, elle, ouverte. Cela peut, peut-être, s'expliquer par le fait, pour les auteurs, de vouloir éviter toute ambiguïté quant à leurs attentes vis-à-vis de la réponse à élaborer par l'élève, ou de la notion qui doit être travaillée. Parfois, plusieurs méthodes de résolution pourraient être mises en œuvre par les élèves pour répondre à la demande de justification et certaines n'impliquent pas nécessairement la mobilisation de la notion mentionnée par les auteurs.

Dans la majorité des cas, le fait qu'il soit demandé à l'élève de fournir une justification est explicite, la formulation est variée. Les auteurs emploient par exemple des termes tels que « justifier », « expliquer » ou « prouver ». Notons cependant que lorsqu'il est employé seul, le mot « expliquer » est polysémique : il peut signifier « expliquer comment » ou « expliquer pourquoi ». Le premier sens relève de la description d'un procédé ou d'un calcul en détaillant les différentes étapes successives amenant au résultat. Dans ce cas, l'explication est une simple description de la démarche. Le second sens revient à exposer les raisons ou les arguments qui assurent qu'un résultat ou un procédé est vrai par le fait qu'il s'appuie sur des propriétés mathématiques et un raisonnement valide.

L'emploi du terme « expliquer » permet une liberté quant à la nature de la justification. L'utilisation simultanée et souvent indifférenciée des termes « justifier », « expliquer » et « prouver » a donc pour conséquence de brouiller les exigences des auteurs concernant la validation en mathématiques.

La justification dans le discours des enseignants

Nous nous sommes posé la question de la représentation des enseignants de mathématiques au collège à propos de la justification. Nous avons donc interrogé individuellement des enseignants de mathématiques en les faisant réagir à cinq énoncés d'exercices préalablement sélectionnés pour la variété des questions qu'ils permettent de soulever à ce sujet. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la façon dont ils interprétaient les formulations de la demande de justification dans les énoncés présentés en essayant ainsi de comprendre leurs propres usages dans ce domaine. Lors des entretiens, nous avons notamment présenté aux enseignants l'exercice sur le programme de calcul présenté précédemment (voir n°86 « Un programme de calcul » ci-dessus p 5).

La réaction des enseignants quant à l'utilisation, dans l'énoncé, du terme « expliquer » révèle des interprétations variées.

> « Je leur aurais fait poser avec *x*, et essayer d'écrire l'expression. Comme on avait fait un peu de développement (…). Et réduire l'expression derrière pour justement expliquer ça [montre la question 2 de l'exercice] »

Cet enseignant, que nous appellerons Martin, assimile ici le terme « expliquer » à « prouver » (prouver en ayant recours au calcul littéral). Pour un autre collègue, que nous appellerons Corine, à propos du même exercice :

> « “Expliquer” ça laisse plus libre de la forme d'explication. Du coup en cinquième, c'est pas mal, parce qu'on n'attend pas forcément l'expression littérale. (…) [Je travaillerais ce type d'exercice] sous la forme de conjecture. (…) Avec ce type de “expliquer”, il faudrait vraiment qu'[ils utilisent] “on a l'impression que”, “il semblerait”, qu'il y ait une nuance »

Ici, l'explication permet de travailler la notion de conjecture avec les élèves dans le but de comprendre la différence entre une affirmation vérifiée dans des cas particuliers et une affirmation démontrée

Les deux extraits des discours d'enseignants illustrent la variabilité du sens donné au verbe « expliquer », il peut être entendu de différentes façons qui ne relèvent pas nécessairement de la démonstration comme nous l'avons décrit dans l'analyse de l'exercice page 41.

Cette diversité est un obstacle, mais il peut être aussi intéressant de la prendre en compte pour permettre une réflexivité sur les usages langagiers, voire construire une progressivité dans les apprentissages.

A propos des exercices de géométrie présentés, les différentes formulations traduisent chez les enseignants différents types de productions attendues de l'élève :

— présenter, « raconter » une démarche, une construction ou un calcul,

— identifier la propriété mathématique clé,

— formuler un raisonnement structuré (plus ou moins rédigé).

Pour Corinne, ces trois types de justifications correspondent respectivement aux verbes « expliquer », « justifier » et « démontrer » :

> « Il y a “expliquer" et “justifier”. Pour moi “expliquer” ça va être… comment il a fait pour sa construction, où il a mis… sa règle, son compas… Et justifier ça va être l'argument mathématique, justement, la propriété ».

> « “Justifier” cela pourrait être juste… euh [la conclusion] et avec la propriété qui tombe du ciel alors que “démontrer” on voudrait plus qu'ils exposent leur raisonnement “on est parti de là et grâce à cette propriété”, avec le schéma “données / propriété / conclusion” (…) le raisonnement plus visible alors que “justifier” ça pourrait être juste “je m'appuie sur ça” ».

Pour Martin, le premier type de production (récit d'une démarche) n'est pas évoqué. Le mot « expliquer » renvoie par contre à l'identification d'une propriété mathématique clé (« justifier » pour Corinne). Enfin, contrairement à Corinne, il ne distingue pas les mots « justifier » et « démontrer » qui sont tous les deux associés à la production d'un discours mathématique structuré.

> « Pour moi dans “expliquer”, j'attends qu'ils me ressortent l'idée. […] Je n'attends pas forcément qu'ils me fassent une démarche structurée ou une démonstration rigoureuse (…) Je veux juste que dans ce qu'ils me disent je vois le sens du truc alors que dans “justifier” j'attends quelque chose de construit »

En ce qui concerne le domaine algébrique, Corinne associe le terme « expliquer » au fait d'énoncer une conjecture, de présenter des exemples numériques tandis que « justifier » prendrait le sens de « démontrer » avec le recours au calcul littéral :

> « “Expliquer” ce serait plus une conjecture, un constat visuel, tu vois… une constatation

que tu…présentes (…) “Justifier” pour moi ça sous-entend un peu plus un vocabulaire mathématique, ça sous entendrait plus une expression littérale »

Pour Martin, la demande d’explication nécessite une réponse par un calcul algébrique. Il laisse ainsi entendre qu’il utilise les mots « expliquer », « justifier » et « démontrer » de manière indifférente. Par exemple, à propos de la question 2 de l’exercice 86 (présenté ci-dessus).

Nous nous demandons comment la formulation d’un exercice peut motiver ou non la pratique de la justification. Nous avons relevé quelques éléments montrant que le vocabulaire utilisé pour formuler une demande de justification constitue une variable, un levier pour les enseignants de façon à motiver la production d’une justification par l’élève. L’usage d’un mot plutôt qu’un autre servirait à compenser la difficulté d’un exercice pour que l’élève puisse malgré tout entrer dans la tâche de résolution. Lorsqu’un exercice est déjà difficile pour les élèves, mathématiquement parlant, Martin fait le choix de demander d’« expliquer » plutôt que de « justifier » laissant entendre qu’avec le premier terme, les exigences sont apparemment moins élevées. Dans ce cas, l’accent est mis sur la phase de recherche en donnant moins d’importance à la rédaction de la réponse afin d’éviter d’ajouter des difficultés éventuelles liées à la rédaction d’une justification.

— « Question : Donc tu penses que la formulation, ici “expliquer la construction” et “justifier la construction”, a un impact sur les élèves, ou même sur ta manière de…

— M : …sur les termes “expliquer” et “justifier” ?…

— Question : Est-ce que tu ferais une distinction ou pas ?

— M : bah clairement moi je lis “expliquer” ouais…(il réfléchit)…à la limite j’aurais peut-être inversé les deux j’aurais plus mis “justifier” ici et "expliquer" là

— Question : Du fait de la difficulté de l’exercice ?

— M : oui clairement même je n’aurais pas mis “expliquer la construction”, j’aurais mis “donner les étapes de… qui permettent de construire…” ».

Dans cet extrait, nous remarquons également que la formulation au moyen du terme « expliquer » ne semble pas être suffisamment satisfaisante pour cet enseignant pour amener les élèves à décrire les étapes de leur démarche. Ainsi, il le formulerait plutôt sous la forme moins ambiguë « donner les étapes qui ont permis de… ». Nous pouvons rapprocher cela avec son interprétation du mot « expliquer » qui renvoie à une réponse faisant apparaître la notion mathématique mobilisée. Selon ce sens, il devient alors nécessaire d’utiliser une autre formulation lorsque la réponse attendue est un programme de construction.

Les entretiens mettent ainsi en évidence le fait que les enseignants ont conscience de l’influence du vocabulaire sur la production des élèves dans le cadre d’une demande de justification. Les reformulations de consignes sont des traces des représentations des enseignants sur ce thème.

Par ailleurs, dans certains exercices, l’usage du mot « expliquer » est utilisé par Corinne pour sensibiliser les élèves à la distinction entre une supposition (vérifiée expérimentalement dans des cas particuliers et généralement basée sur les perceptions sensorielles) et une propriété prouvée en travaillant essentiellement sur l’utilisation d’un vocabulaire adapté sans nécessairement produire une démonstration. L’objectif de cette phase d'explication est d'obtenir l'adhésion des élèves à la nécessité de produire un raisonnement spécifique pour établir des vérités dites générales sans pour autant entrer dans la phase d'élaboration.

La justification selon les élèves

Présentation de l'expérience

Pour étudier l'impact éventuel de la formulation d'une demande de justification sur le type de justification produite par les élèves, nous avons choisi un énoncé d'exercice pour lequel nous proposons trois formulations possibles (« expliquer », « justifier » ou « prouver ») de la demande de justification.

La classe choisie pour l'expérimentation est une classe de 5e. Les 24 élèves de la classe se sont répartis en 6 groupes de 4 élèves. Pour chaque groupe, un dictaphone était posé sur la table afin d'enregistrer les discussions entre les élèves. L'enseignant ne devait pas intervenir dans la résolution de l'exercice. La communication entre les groupes n'était pas permise. La durée de ce travail a été de 30 minutes.

Voici (ci-dessous) l'énoncé de l'exercice que nous avons proposé à chaque groupe. Deux groupes devaient « justifier la construction », deux autres devaient « expliquer la construction » et les deux derniers groupes devaient « prouver la construction ».

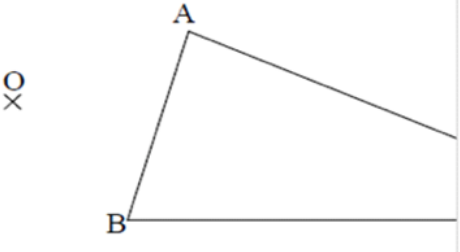
Analyse a priori

Cette expérience a eu lieu lors de la dernière séance de la séquence sur la symétrie centrale. Sa résolution repose sur les pré-requis suivants (étudiés en 5e) :

— savoir construire l'image d'un point, d'un segment par la symétrie centrale
— connaître et savoir utiliser les propriétés de conservation de la symétrie centrale

Nous avons choisi une tâche à prise d'initiative dont la résolution est laissée à la charge de l'élève. En proposant ce type de tâche, nous voulions que les élèves puissent discuter, argu-

Le sommet C du triangle ABC ci-dessous ne tient pas sur cette feuille. Sans rien tracer hors de la feuille, construire le triangle A'B'C' image du triangle ABC par la symétrie de centre O. Justifier/expliquer/prouver la construction



Justification/explication/preuve de la construction :

Figure 6 : *Énoncé de l'exercice*

menter lors de la résolution. Nous voulions ainsi observer la façon dont les élèves parlent de la justification et ce, en fonction de la consigne ; et de manière plus générale faire apparaître leurs représentations de la justification.

Habituellement, la construction du symétrique d'un triangle nécessite la construction du symétrique de chacun de ses sommets puis le tracé des côtés du triangle. Dans cette situation, l'absence du point C empêche l'élève de construire directement son image par la symétrie de centre O l'obligeant ainsi à mettre en œuvre une procédure qui s'appuie sur les propriétés de conservation de la symétrie centrale abordées précédemment dans le cours. Les procédures attendues sont les suivantes.

L'élève construit les images des points A et B par rapport à O appelées respectivement A' et B' dans l'énoncé puis trace le segment [A'B']. Ensuite, plusieurs démarches sont possibles :

— Ajout de points sur la figure initiale : placer deux points (qui peuvent être nommés E et F), un sur la partie visible du segment [AB] et l'autre sur la partie visible du segment [BC], puis construire leur symétrique (nommés par exemple E' et F'). Le point C' est le point d'intersection des demi-droites [A'E') et [B'F'). Cette construction peut se faire au compas et à la règle. Le report de mesures peut être effectué à la règle graduée.

— Utilisation de la conservation des angles : reporter les mesures des angles et respectivement à partir des sommets A' et B' et du côté [A'B'] pour obtenir le point C' à l'intersection de deux demi-droites. Cette construction peut se faire au compas, au rapporteur ou avec du papier calque. Il n'y avait aucune restriction.

— Utilisation du parallélisme entre une droite et son image par symétrie centrale : tracer les parallèles des droites (AC) et (BC) passant respectivement par A' et B'. Le point C' est à l'intersection de ces deux droites. Cette construction peut se faire à l'équerre, au compas et à la règle.

On peut s'attendre à divers types de réponses. Nous proposons ici trois rédactions fictives selon la formulation de la demande.

À la demande « expliquer », nous pouvons attendre une description du « comment » qui consisterait à produire un programme explicitant les différentes étapes de construction. Dans ce cas, l'explication est considérée comme valide lorsque les conditions suivantes sont respectées :

— Les étapes de construction sont décrites sans ambiguïté notamment avec l'usage d'un vocabulaire adapté,

— Les étapes sont données dans un ordre cohérent,

— La figure obtenue est celle attendue.

La validation reste ici expérimentale. Voici un exemple de rédaction susceptible d'être produite selon ces critères :

> J'ai tracé avec le compas et la règle le symétrique de A et de B. J'ai placé un point sur le segment qui part de A et un autre sur celui qui part de B et j'ai tracé leur symétrique. J'ai tracé deux demi-droites avec les symétriques et le point d'intersection est C'.

Pour « justifier », une réponse que l'on considérerait comme correcte consiste à produire un programme de construction (comme dans une explication) en formulant les raisons qui valident les étapes de la construction c'est-à-dire les raisons pour lesquelles le protocole mis en œuvre permet effectivement d'obtenir la figure attendue. La formulation de ces raisons ne fait pas l'objet d'une rigueur excessive. Voici un exemple de rédaction :

> On construit le symétrique de [AB] qui est le segment [A'B'] car A' et B' sont les symétriques respectifs de A et de B. On reporte la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ à partir du sommet A' et du côté [A'B'] car $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ doivent être symétriques. Et, pour la même raison, on reporte la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à partir du sommet B' et du côté [A'B']. Les deux demi-droites tracées se coupent en C'.

L'égalité des mesures d'angles n'est pas explicitement formulée mais le fait de reporter des mesures montre que l'élève a compris qu'elle est vérifiée.

Une autre forme de justification pourrait être de formuler une explication en ajoutant la description d'une validation expérimentale. Par exemple, l'élève peut décrire l'utilisation du papier calque pour vérifier la superposition de la figure initiale et de la figure obtenue après un demi-tour autour du point O.

Et enfin la réponse à la demande de « preuve » consisterait à détailler les étapes de la construction en explicitant les propriétés mathématiques sous-jacentes.

> On construit les points A' et B' images respectives de A et B par la symétrie de centre O. $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont symétriques par rapport à O. Et comme la symétrie centrale conserve la mesure des angles, on en déduit que nécessairement mes($\widehat{BAC}$) = mes($\widehat{B'A'C'}$). On mesure l'angle $\widehat{BAC}$ et on construit donc l'angle $\widehat{B'A'C'}$ en reportant la mesure à partir de la demi-droite [A'B'). On construit de même l'angle $\widehat{A'B'C'}$ en reportant la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à partir de la demi-droite [B'A'). Les angles tracés délimitent un triangle qui est l'image du triangle ABC par la symétrie de centre O.

Variante sans utiliser la mesure des angles :

> Placer un point E et un point F respectivement sur les parties visibles des segments [AC] et [BC]. Construire leur symétrique respectif E' et F'. Les demi-droites [A'E') et [B'F') sont donc les images respectives des demi-droites [AE) et [BF). Les demi-droites [AE) et [BF) se coupent en C, et, comme la symétrie centrale conserve l'alignement des points, les demi-droites [A'E') et [B'F') se coupent en C'.

Analyse des productions des élèves :

En comparant les attentes et les productions des élèves, nous observons que l'écart est accentué lorsqu'il est question de « justifier ». Extrait des retranscriptions du premier groupe (voir sa production page ci-contre) :

— E1 : Et après il faut justifier la… Construction du triangle A'B'C' c'est ça ?

— E2 : Juste une question on essaye de reproduire la figure sur notre feuille

— E1 : Bah d'abord il faut le faire sur la feuille et après faire un programme de construction

— E3 : Ah mais après il faut faire la justification

— E1 : Oui il faut expliquer comment on a fait

— E2 : Qui sait écrire ? Enfin qui sait bien écrire ?

— E3 : On écrit on a reporté l'angle… Ouais d'abord il faut faire la figure

  [Les élèves poursuivent la construction, ils éprouvent des difficultés dans le report des mesures d'angles]

— E3 : On peut faire la rédaction

  (...)

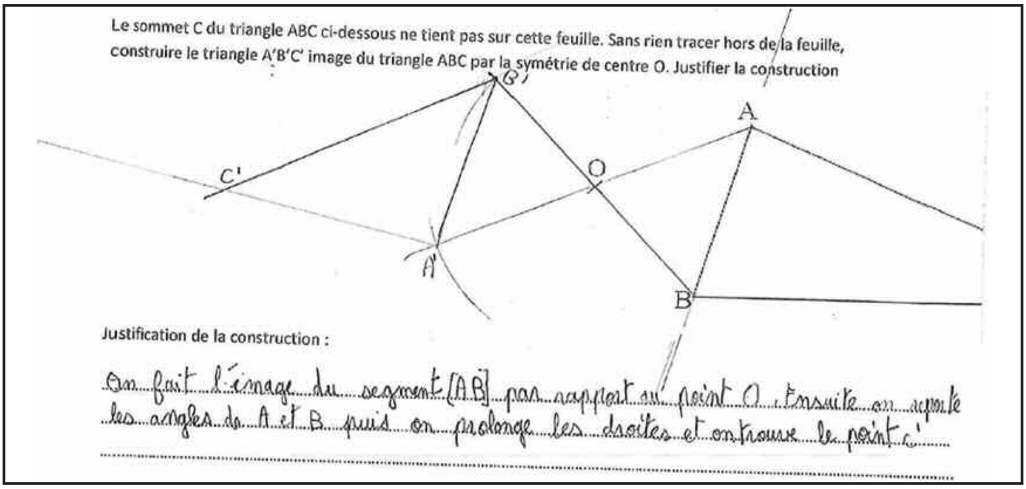


Figure 7 : *production écrite du premier groupe*

— E2 : Les filles c'est un programme de construction qu'on doit faire ou c'est une explication ?

— E1 : En fait c'est la justification de la construction

— E3 : Comment on a réussi à faire ça

— E2 : Ah OK donc il faut détailler les étapes ?

— E4 : Oui à peu près

— E1 : Par exemple c'est comme si on devait expliquer à quelqu'un comment on a fait

— E2 : Comment on a fait la construction ?

— E3 : Oui comment on a réussi

— E2 : OK

Dans cet échange, nous soulignons deux niveaux de justification qui se croisent, que nous pouvons interpréter à partir des formulations « comment on a fait » et « comment on a réussi ». Le texte produit décrit trois étapes dans un langage mathématique sans préciser les modalités de construction. La validation relative à l'obtention du point C' en tant que symétrique de C n'est pas explicitée à l'écrit bien qu'elle soit évoquée oralement par l'élève E3.

Dans un autre second groupe devant « justifier », les échanges montrent le parallélisme entre « justifier la construction » et « faire le français », rédiger :

— E4 : J'ai fini maintenant il faut faire le français

— E5 : Il faut faire la justification de la construction

— E4 : Mais en fait facile B il est droit et on a juste à prolonger A jusqu'à ce que ça arrive à B

— E5 : Prends une règle… c'est A qui est droit

— E6 : Non non c'est B qui est droit, le point B il est droit

— E4 : Je te dis pas que c'est un angle droit, je te dis c'est le trait, la droite, le segment il est droit donc en gros (…)

— E4 : On a tracé l'image du segment [AB] qui est [A'B']… Entre crochets vu que c'est un segment. Tu mets point et ensuite tu commences ta phrase par "ensuite nous avons prolongé le segment B" (…) mais le segment c'est comme si il y était déjà et après on l'a prolongé donc il ne faut pas marquer ça donc on a prolongé la droite B

— E5 : Le segment B ?

— E4 : Non le segment c'est entre deux points et la droite c'est un truc direct

Pour un troisième groupe, cas d'une demande de « preuve », certains élèves évoquent le fait de découper le texte en rubriques précisant les données du problème, la propriété utilisée et la conclusion tandis que d'autres semblent proposer une description en étapes de construction.

— E7 : Il faut rédiger il ne faut pas oublier (…)

— E8 : La preuve de la construction (…)

— E8 : Comment on rédige ? On fait les « données » (…)

— E7 : Il faut faire étape par étape, on a commencé par tracer un trait

— E9 : Je ne sais pas si on n'aurait pas dû commencer par « étape 1 », « étape 2 »…

— E8 : Bah non c'est « données », « propriété » et après on fait une « conclusion ».

C'est finalement l'idée ci-dessous qui est retenue :

Enfin, concernant une demande d'« explication », pour un quatrième groupe, les élèves discutent autour de la construction, mais également sur le fait de justifier « avec une propriété ». La question sur l'énonciation ou non d'une propriété reste sans réponse claire.

— E10 : Après il faut expliquer pourquoi… comment… il faut expliquer la construction, non, mais dites-moi, on marque quoi déjà ?

— E11 : Explication de la construction.

— E10 : On construit l'image de ABC.

— E12 : On construit le point A par rapport au point O qui va donner A'.

— E10 : Non on construit l'image de A… vous tracez et nous on fait le texte du mode de construction.

(…)

— E12 : On ne marque pas : « sur cette figure, ça conserve le parallélisme » ? Et là c'est plutôt parallèle non ? Ah bah non c'est pas parallèle.

— E10 : Cette figure concerne la symétrie centrale.

— E12 : Ah bah oui c'est la symétrie centrale…

— E13 : Regarde le cours.

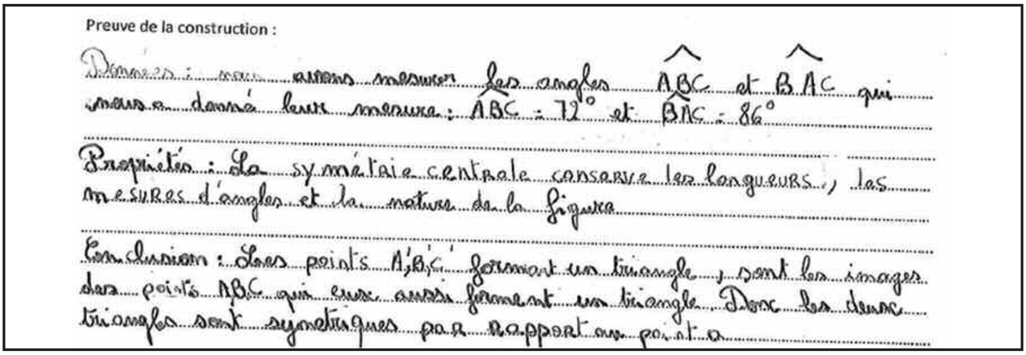

Preuve de la construction :
Données : nous avons mesurer les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$ qui nous a donné leur mesure : $\widehat{ABC}$ = 72° et $\widehat{BAC}$ = 86°
Propriétés : La symétrie centrale conserve les longueurs, les mesures d'angles et la nature de la figure
Conclusion : Les points A'B'C' formant un triangle, sont les images des points ABC qui eux aussi forment un triangle. Donc les deux triangles sont symetriques par rapport au point O

Figure 8: *Production du groupe 3*

— E12 : Y a les longueurs, le parallélisme, l'alignement.
— E10 : Bah là les points sont alignés.

La première réponse formulée par les élèves à la demande d'explication porte sur les étapes de la construction. Ils se questionnent également à l'oral sur les propriétés mises en jeu, mais cela n'apparaîtra pas dans leur production écrite. Deux interprétations sont possible, l'une liée à un manque de compréhension ou des difficultés à appliquer les propriétés en jeu, l'autre qui serait liée au sens du mot « expliquer » et à la non nécessité de formuler les propriétés dans une explication.

Conclusion

On a tout d'abord vu que l'institution insiste sur l'importance de la justification, du raisonnement, de l'argumentation, etc. dans toutes les disciplines, mais sans définir précisément ce dont il est question. L'usage des mots dans les pratiques de la justification repose donc beaucoup sur les conceptions épistémologiques des enseignants (ou des auteurs de manuels), il est variable comme nous l'avons vu dans notre étude. En se limitant au domaine des mathématiques, on constate aussi que le champ lexical relatif à la justification est varié, que les tâches liées sont nombreuses et de natures très différentes, sans qu'il y ait des pratiques stabilisées et consensuelles concernant l'usage de ces mots (et les tâches sous-jacentes). Nous avons également mis en évidence sur un exemple différentes interprétations de ces mots par les élèves, et l'influence qu'elles peuvent avoir sur leurs activités.

En mathématiques, nous pensons qu'il pourrait être intéressant pour les élèves comme pour les enseignants de s'appuyer sur les acceptions multiples de ces mots. Cela pourrait en effet permettre d'engager les élèves dans une prise de distance et une réflexion sur la nature des raisonnements en jeu. Ceci pourrait également accompagner à la fois la mise en place d'une progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et le développement d'un travail interdisciplinaire. Néanmoins, si cette variété et cette ouverture vont de pair avec un manque d'explicitation des différences de sens et d'usages d'une discipline à l'autre ou à l'intérieur des disciplines, on peut penser que cela a un impact négatif, notamment, concernant les mathématiques, à propos l'enseignement de la démonstration en mathématiques.

On peut donc penser qu'une attention particulière de chacun d'entre nous sur ces mots, leurs usages, et les attentes liées est nécessaire. Au-delà de cette attention individuelle, une réflexion entre enseignants de mathématiques d'un établissement et un travail entre collègues de toutes les disciplines semble tout aussi importante. Connaître les habitudes des autres (il ne s'agit pas d'exiger une uniformisation, mais plutôt une prise en conscience des proximités et des différences entre disciplines, proximités et différences que les élèves vivent en changeant de salle au fil de leur journée), savoir finement ce qu'est une justification, une explication, un raisonnement, etc. pour les collègues de français, d'histoire-géographie, de sciences expérimentales, etc. semble incontournable quand on enseigne les mathématiques.

Enfin un travail explicite (dans lequel on précise aux élèves que le travail qui est fait porte sur la langue et l'usage des mots, que ce travail est légitime et même fondamental à l'école), collectif (ce travail ne peut être riche et constructif que collectivement) et réflexif avec les élèves sur ces mots, leurs usages, sur les demandes correspondantes, sur les variations de tous ces points d'une discipline à l'autre nous semble essentiel. Il pourrait être mené au fil des séances (discussion avec les élèves sur le sens des mots des consignes liées à la justification, et les types de tâches attendues), ou institutionnalisé de façon plus forte (travail sur la compréhension des consignes en Aide Personnalisée avec un professeur d'une autre discipline, élaboration d'un dictionnaire en ligne participatif et interdisciplinaire de la classe).

Du point de vue de la recherche notre travail pourrait être complété par une étude des pratiques en classe. Une telle étude permettrait d'affiner nos conclusions et d'observer également ce qui se dit en classe à propos de la justification par les enseignants et par les élèves, y compris de façon très informelle.

Bibliographie

Association Sésamath (2006), Le manuel Sésamath, Génération 5.
http://manuel.sesamath.net/

Balacheff N. et Soury-Lavergne S. (1996), Explication et préceptorat, à propos d'une étude de cas dans TéléCabri, in Actes du Colloque commun des groupes explication et EIAO du PRC-GDR Intelligence Artificielle, 37-50, Rapport LAFORIA (96/33), UMPC.
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00190416/document

Baron E. (2016), Une étude de la justification dans le cadre de l'apprentissage de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques au collège, mémoire de master, Université Paris Diderot

Groupe "Léo" (2017), Les mots pour dire l'argumentation, la justification, le raisonnement, l'explication, etc. dans les programmes de cycles 2, 3 et 4 dans les différentes disciplines.
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Leo-20170227-Argumenter%20dans%20differentes%20disciplines.pdf

Malaval J. et al. (2006), Transmath, Nathan.

Ministère de l'éducation nationale (2016), Programmes pour les cycles 2, 3, 4, BO spécial du 26 novembre 2015, programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège.
http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/67/3/2015_programmes_cycles234_4_12_ok_508673.pdf

Ministère de l'éducation nationale (2016), Programmes pour les cycles 2, 3, 4, BO spécial du 26 novembre 2015, programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège.
http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/67/3/2015_programmes_cycles234_4_12_ok_508673.pdf