
QUATRE PYRAMIDES POUR UN TRESOR

Une activité pour travailler la géométrie dans l'espace au cycle 4

Groupe « Situations problèmes
en géométrie au collège »¹
Irem de Clermont-Ferrand

Contexte

Notre groupe, après avoir travaillé sur le thème des angles au collège, a choisi de s'intéresser à la question de l'enseignement de la géométrie dans l'espace de la 6e à la 3e.

Il a conçu et testé des activités dans les classes, celles-ci sont présentées dans la brochure « Espace et géométrie - reconnaître, construire, représenter... des activités solides en main pour les cycles 3 et 4 ». Elles s'inscrivent dans le cadre des nouveaux programmes de cycle 3 et de cycle 4 aussi bien dans la forme que sur le fond. Nous avons fait le choix

de centrer ces dernières sur les interactions objet/perspective cavalière, estimant que de nombreuses autres ressources existaient déjà sur les autres aspects cités précédemment.

Ces activités prennent différentes formes :

- Réalisation d'un projet individuel des élèves : conception d'un objet (le flexacube en fin de cycle 3) tout au long de nombreuses séances incluses dans une ou plusieurs séquences de la progression annuelle. Sur le plan mathématique, elle conduit les élèves à redécouvrir en situation le vocabulaire de géométrie dans l'espace, rechercher différents patrons d'un même solide, étudier plus particulièrement le cube et le parallélépipède rectangle, mettre en œuvre les règles de dessin en perspective cavalière de solides simples ou d'assemblages de solides simples.

¹ Ont participé à ce travail : Bernon Céline (Collège Jean Zay, Montluçon), Fraisse Ariane (Collège Albert Camus, Clermont-Ferrand), Maze Monique (IREM Clermont-Ferrand), Rosalba Claire (Collège Mortaix, Pont du Château), Roudel Aurélie (Collège Louise Michel, Maringues), Roux Aurélie (ESPE Clermont-Auvergne), Tournaire Olivier (Collège Jean Zay, Montluçon).

 CLE EN MAIN

- Tâche à prise d’initiative (la station de métro) : Les élèves doivent résoudre un problème faisant appel à des connaissances antérieures (grandeurs et mesures, application de théorèmes de géométrie plane) tout en découvrant les sections de solides usuels.
- Situations autour de puzzles dans l’espace : les élèves travaillent seuls ou en groupe, l’objectif visé détermine les modalités de travail. L’entrée dans certaines activités se fait par la manipulation des objets pour conduire un travail de représentation. Dans d’autres, la donnée de différents types de représentation d’un solide permet la réalisation de patrons pour construire l’objet. Chaque élève réalise ainsi une des pièces d’un puzzle puis intègre un groupe qui a la charge de reconstituer le puzzle. Cette reconstitution valide le travail de chacun des élèves.

Des fichiers utilisant un logiciel de géométrie dynamique sont conçus et téléchargeables sur le site de l’Irem de Clermont-Ferrand. Ils sont un support possible pour illustrer les propos de l’enseignant, parfois des supports de raisonnement mais ne remplacent en aucun cas la manipulation des objets réels.

Nous vous présentons ci-dessous l’une de ces activités, intitulée « Quatre pyramides pour un trésor » pour le cycle 4.

Choix didactiques et pédagogiques

Dans leur quotidien, les enfants rencontrent et manipulent des objets. Dès le cycle 1, deux types de connaissance sont mises en œuvre : des connaissances spatiales et des connaissances géométriques permettant de modéliser l’espace sensible. À l’école, les élèves s’approprient de premiers savoirs géométriques par des problèmes de caractérisation (nombre de faces, d’arêtes, de sommets, forme des faces, ...), reconnaissance, représentation et construction

de solides. Les solides étudiés sont nombreux : prismes dont pavé droit et cube, cylindre, cône, pyramide et boule. Les supports et les procédures d’élèves varient d’année en année.

Par exemple :

- pour construire un solide, les élèves pourront disposer de pâte à modeler pour réaliser un moulage, de polydrons à assembler, de tiges et connecteurs pour produire un squelette de solides, d’un patron donné à plier ;
- pour représenter, les élèves pourront dessiner par empreinte, avec des pochoirs, des assemblages par des représentations planes sans effet de profondeur (un rond pour une boule, un carré pour le cube, ...), dessiner des vues (vue de dessus, ...), dessiner en perspective cavalière ou à point de fuite sur papier uni, pointé, quadrillé ;
- pour la conception de patrons, les élèves peuvent disposer ou non des solides en main, disposer d’une amorce de patrons, procéder par empreinte du solide, disposer de faces prédécoupées à assembler.

Le cycle 3 voit donc apparaître de nouveaux modes de représentation telles que les perspectives. La perspective cavalière est usuellement enseignée à partir du collège. Elle a l’avantage de conserver certaines propriétés (parallélisme, milieux, ...) tout en offrant une image voisine de celle obtenue à la vue. Néanmoins, cette perspective résultant d’une projection parallèle, certaines informations sur l’objet sont perdues. Il est donc important que soient proposées régulièrement des situations d’apprentissage permettant une interaction entre la représentation et la maquette. L’élève peut ainsi développer des représentations mentales.

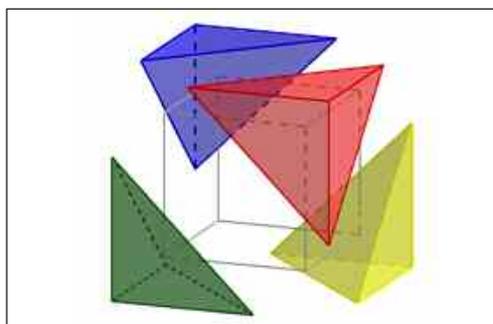
Les procédures de représentation et de construction continuent d’évoluer au collè-

ge. L'enjeu est alors de conduire les élèves à davantage d'abstraction. La géométrie dans l'espace devient un cadre privilégié de la géométrie déductive. Les propriétés des solides, les règles de dessin en perspective cavalière, en particulier le fait que ce « qui se voit sur le dessin en perspective » n'est pas toujours conforme à la réalité, doivent conduire à des activités de raisonnement. Cependant, les manipulations concrètes restent essentielles pour favoriser l'apprentissage des élèves et les accompagner dans la construction d'abstractions. Aussi, nous avons fait le choix d'utiliser conjointement les objets et les représentations de ces derniers.

C'est dans ce sens que notre groupe a construit ces situations d'apprentissage.

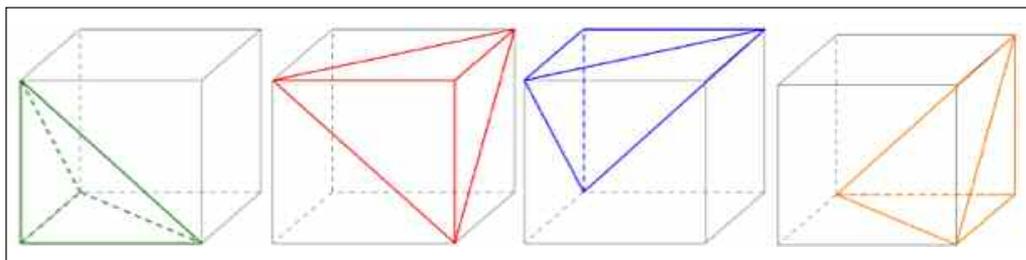
Objectifs de l'activité

Cette activité vise à apprendre aux élèves à raisonner dans l'espace et à savoir lire et décoder une perspective cavalière pour construire le patron de pyramides non régulières. Elle permet, dans un second temps, de réinvestir la formule de calcul de volume d'une pyramide dans le cas de pyramide non régulière et de faire vivre la propriété d'additivité des volumes (calcul du volume d'une pièce par soustraction de volumes).



Matériel et support(s)-élève

- Au moins un puzzle complet en couleur pouvant être fabriqué avec les patrons fournis
 - Feuilles de couleur (rouge, bleue, verte, orange) et feuilles blanches en grande quantité (autres couleurs possibles à condition d'adapter les fichiers de présentation de l'activité)
 - Vidéoprojecteur
 - Logiciel de géométrie dynamique, éventuellement GeoGebra3D
 - Ciseaux
 - Ruban adhésif
 - Éventuellement une connexion Internet.
- Fichiers à télécharger sur le site de l'Irem de Clermont-Ferrand :
- 4 pyramides 3D.ggb
 - 4 pyramides séparément.pdf



Présentation de l'activité

Cette activité permet d'observer des pyramides représentées en perspective cavalière à l'intérieur d'un cube, de construire leur patron et de calculer leur volume. Les élèves auront la surprise de découvrir un tétraèdre régulier : le solide qui permet avec les quatre pyramides de reconstituer le cube. Son patron est obtenu à partir de sections d'un cube par un plan.

Cette activité est enrichie par la visualisation d'images d'un logiciel de géométrie dynamique. Un puzzle dessiné en perspective cavalière est projeté : le professeur présente les quatre pyramides découpées dans les « quatre coins » d'un cube et demande à la classe si ces quatre pyramides reconstituent entièrement le cube. En réalité, il reste « au milieu » un tétraèdre régulier (que nous appellerons le trésor). Le professeur n'indique surtout pas son existence, cette question est une motivation pour les élèves. En effet, pour répondre, chaque élève doit, à partir de cette perspective cavalière, construire le patron d'une des

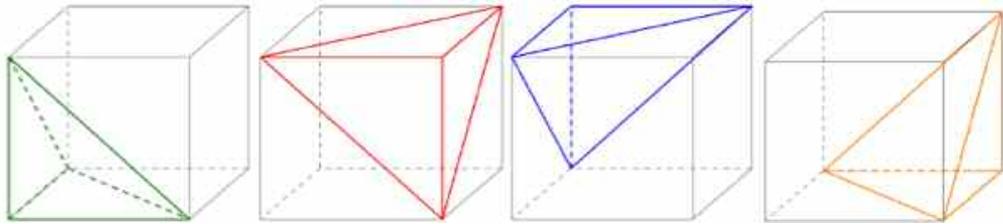
quatre pyramides. Ce puzzle comporte des pièces identiques ; le professeur ne le dit pas. On pourrait penser que les élèves s'en aperçoivent vite. Or, les vues de ces pièces étant différentes, la plupart des élèves ne s'en aperçoit pas immédiatement. Les pyramides dont on doit produire le patron ne sont pas régulières, trois de leurs faces sont des triangles rectangles, la quatrième est un triangle équilatéral. La tâche n'est pas simple et demande aux élèves de raisonner à partir du dessin en perspective cavalière.

Chaque groupe de quatre élèves reconstitue ensuite le cube. Les élèves s'aperçoivent qu'il reste « un trou » et doivent produire le patron de la pièce manquante, le « trésor ». On suppose la formule de calcul du volume d'une pyramide connue des élèves. L'activité invite à déterminer le volume de la pièce manquante. Cette consigne donne l'occasion de refaire vivre en cycle 4 la propriété d'additivité des volumes : au volume du cube, les élèves doivent soustraire le volume des quatre pyramides construites.

Grandes lignes d'un scénario possible

Ce que fait ou dit le professeur	Ce que font ou disent les élèves
<p>Après avoir mis les élèves par groupe de quatre, le professeur projette le dessin en perspective cavalière du cube et des quatre pyramides à l'intérieur, le trésor n'étant pas affiché. Il utilise le fichier 4 pyramides 3D.ggb (annexe).</p> <p>Le professeur affiche les pyramides les unes après les autres dans le cube en utilisant les commandes du fichier (voir « pense bête » téléchargeable). Puis il affiche au tableau le fichier 4 pyramides séparément.pdf (annexe) sur lequel on voit les quatre pyramides, chacune dans un cube. Il laisse cette image affichée le temps du travail.</p>	

<p>Dans chaque groupe, il distribue quatre feuilles de couleurs différentes ; les pyramides bleue et orange sont attribuées aux élèves plus à l'aise. Il donne alors la consigne suivante : « À chacun de vous a été attribuée une couleur, celle de la pyramide dont vous devez construire un patron. L'arête du cube dans lequel sont les pyramides est de 6 cm. »</p>	
<p>Il pose la question : « Avec vos quatre pyramides, pensez-vous reconstituer le cube en entier ? » Le professeur procède à un vote à main levée et relève le nombre de réponses positives et négatives.</p>	<p>La majorité des élèves pense que le cube sera reconstitué. Quelques élèves se doutent qu'il y a un piège puisque le professeur a attiré l'attention sur cette question mais ne voient pas ce qui pourrait manquer au cube.</p>
<p>Le professeur donne la consigne : « Maintenant, construisez votre patron. »</p> <p>Le professeur doit prévoir suffisamment de feuilles pour permettre aux élèves de demander autant de feuilles que nécessaire. Ils peuvent se tromper, découper, plier, recommencer. Donner les feuilles de couleur est important, les élèves ne voulant pas les gaspiller, ils cherchent vraiment à réussir.</p>	<p>Les élèves commencent des schémas au brouillon en indiquant les longueurs des côtés. Les dessins en perspective des quatre pyramides étant différents, la plupart des élèves ne se rendent pas compte que les quatre pyramides sont identiques. Certains même pensent avoir une pyramide plus difficile à construire que les autres (la bleue et/ou orange). Dans un premier temps, si un élève signale que les pyramides sont identiques, le professeur veille à ce que la classe ne prête pas attention à cette remarque.</p>
<p>Lorsqu'un élève a construit son patron, le professeur lui tend la pyramide correspondante.</p> <p>Aux élèves en grande difficulté, le professeur peut prêter une pyramide afin qu'ils puissent procéder par empreinte.</p>	<p>L'élève valide ou non son patron en enveloppant la pyramide que lui prête le professeur. S'il n'est pas validé, il cherche à corriger. Si son patron est validé, il peut aider les autres membres de son groupe. Chaque groupe assemble les pièces. Beaucoup d'élèves sont surpris d'avoir un « trou » dans leur cube.</p>
<p>Lorsque tous les groupes ont construit leurs quatre pyramides, le professeur peut montrer des patrons à l'aide du logiciel et insister sur le fait que finalement les quatre pyramides sont identiques. Il propose alors de déterminer le patron du solide (le trésor) qui remplirait exactement le « trou ». Il projette éventuellement le « trésor » en 3D, en le faisant tourner.</p>	<p>Les élèves, toujours en groupes, recherchent ce patron. Comme précédemment, ils peuvent valider leur patron à l'aide de la pyramide que le professeur possède.</p>
<p>Le professeur demande de calculer le volume des quatre premières pyramides et celui du trésor.</p> <p>Aux élèves les plus rapides ou pour prolonger cette activité, le professeur peut proposer l'exercice : Si cette pyramide était en or (puisqu'après tout c'est un trésor !) quelle serait sa valeur en euros ?</p>	<p>Les élèves le calculent soit en classe soit en travail pour la prochaine séance. Pour le volume du « trésor », la démarche attendue est celle du calcul du volume du cube auquel on enlève le volume des quatre pyramides. Les élèves doivent, après avoir calculé le volume de la pyramide, trouver le cours de l'or actuel qu'ils peuvent rechercher sur Internet.</p>



Suivant les progressivités choisies en cycle 4, le contenu du bilan collectif réalisé à la suite de l'activité et de la leçon qui en découle peut différer. Voici une proposition de trace écrite qu'il convient donc d'adapter à sa classe en conséquence.

Bilan possible

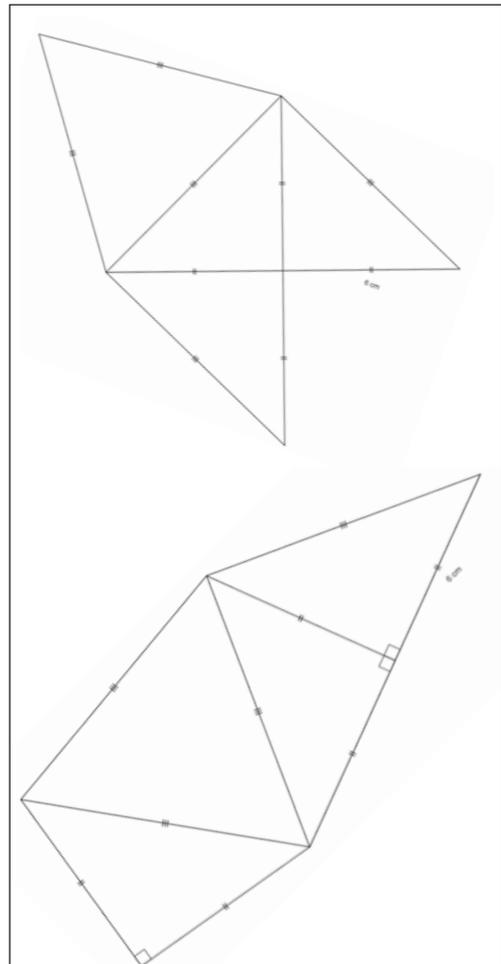
Si les représentations ci-dessus sont celles d'un cube d'arête 6cm alors les quatre représentations de pyramides sont en réalité la représentation d'une même pyramide dessinée sous quatre points de vue différents.

Cette pyramide comporte quatre faces qui sont toutes triangulaires, on la nomme aussi **tétraèdre**.

Elle comporte trois faces qui sont des triangles rectangles isocèles et une face qui est un triangle équilatéral. Il existe plusieurs patrons de cette pyramide, en voici deux possibles dans le cadre ci-contre.

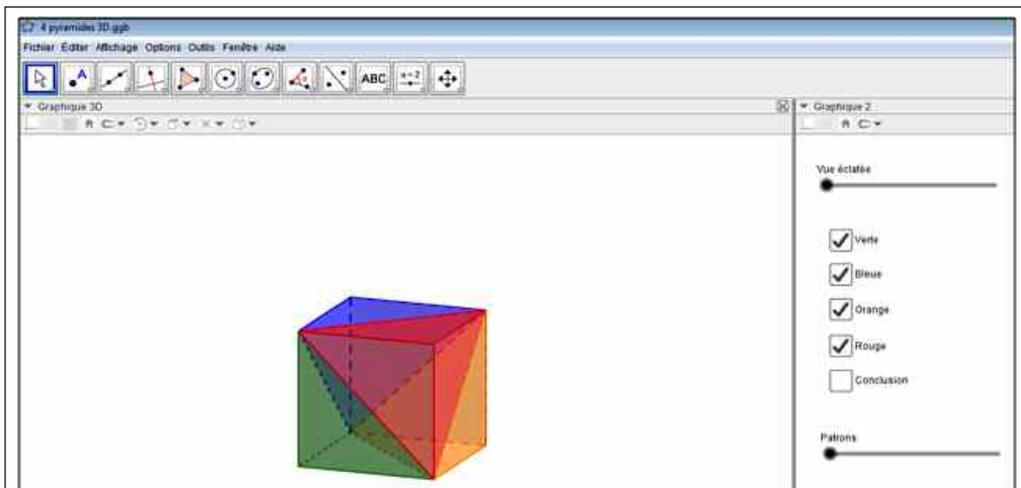
Lorsque les quatre pyramides identiques sont assemblées comme sur les dessins en perspective cavalière présents ci-dessus, le cube n'est pas reconstitué entièrement.

Il manque une pièce. Il s'agit d'une pyramide dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux identiques. On dit qu'il s'agit d'un tétraèdre régulier.



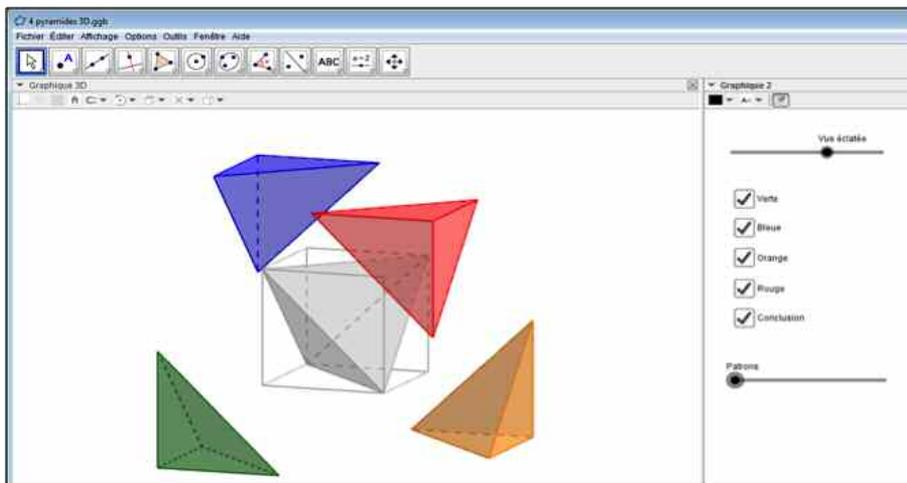
ANNEXE

Copies d'écran du fichier GeoGebra 4pyramides 3D.ggb :



Ce fichier fourni sur le site de l'Irem de Clermont-Ferrand permet à l'enseignant de faire apparaître, disparaître une à une les quatre pyramides, en cochant ou décochant les cases prévues à cet effet et d'obtenir une vue éclatée du puzzle en activant le curseur correspondant.

Il prévoit également de faire afficher en fin d'activité la pièce manquante :



En ne sélectionnant qu'une des pyramides, le professeur peut faire développer pas à pas un des patrons de cette pyramide en activant le curseur correspondant. Il peut faire pivoter les objets pour choisir la vue qui lui convient.

Références bibliographiques

- Bayart C., Gos C., HindeJang C., Keyling M-A, Mathern C., Ortlieb M., Rauscher J-C., Roesch G., Irem de Strasbourg (1997). *Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège*. Strasbourg : Irem de Strasbourg.
- Chaachoua H. (1997-1998) Géométrie dans l'espace – le point sur la lecture des dessins par des élèves en fin de collège. *Petit x* 48, 37-68.
- Parzysz, B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Diplôme de doctorat. Université Paris-7. Ed. Irem Paris-7.
- Petitjean S., Tummarello S., Jamart J-F., Adam F., Clerc F., Bourbion M. (2012) *La troisième dimension*. Villetaneuse : Irem de Paris Nord.