REPERES - IREM. N° 112 - juillet 2018

LA MATHEMATIQUE SOCIALE, UN ENSEIGNEMENT ELEMENTARISE AU SERVICE DU CITOYEN

Nicolas SABY, Cyril TEJEDO

Ce texte est également consultable en ligne sur le portail des IREM (onglet : Repères IREM) : http://www.univ-irem.fr/

1. — Introduction

Jusqu'au XXème siècle, rares étaient les mathématiciens à ne se focaliser que sur les mathématiques dites pures. La plupart d'entre eux consacraient une bonne partie de leur temps à réfléchir sur des problèmes concrets. Comme l'écrit Yves Chevallard [6], les mathématiques n'étaient pas aussi « purifiées » qu'aujourd'hui. Francis Bacon [2] (1561-1626), dans sa « Grande Restauration des sciences », identifie deux catégories dans les mathématiques : « Mathématique pure/Mathématiques mixtes ». Dans l'article de l'encyclopédie « Mathématiques », Jean le Rond D'Alembert [10] (1717-1783), définit les « Mathématiques mixtes », comme celles qui ont « pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable. Nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers ». Il précise ensuite : « Du nombre des mathématiques mixtes sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, La Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation etc »... En 1793, dans son Tableau Général de la science, le marquis de Condorcet (1743-1794), mathématicien, philosophe et homme politique, lance, au sein de ces mathématiques mixtes, un programme de recherche ambitieux et innovant qu'il appelle « la mathématique sociale ». Dans ces années d'effervescences philosophico-politiques, Condorcet [13] espérait que l'analyse mathématique appliquée à l'objet social, permettrait de dépassionner les débats politiques en substituant « le raisonnement à l'éloquence, les livres aux parleurs et de porter dans les sciences morales, la philosophie et les méthodes des sciences physiques ». Pour Condorcet, la

« mathématique sociale » devait atteindre deux objectifs : donner aux sciences sociales les outils rigoureux des mathématiques, pour assurer leur progrès et améliorer leur fiabilité ; préciser et éclaircir, pour chaque citoyen, des choix à propos desquels des décisions collectives doivent être prises.

Ce projet ambitieux et prometteur, rencontre pourtant peu de succès pendant 150 ans. En France, il y a peu de productions scientifiques se réclamant explicitement de la mathématique sociale telle que définie par Condorcet. Au cours du XIXème siècle, on peut toutefois noter les travaux remarquables d'Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) sur la « Recherche sur les principes mathématiques de la théorie des richesses » [8] de Jules Dupuit [11] (1804-1866) et de Léon Walras [20][21] (1834-1910). Il faut attendre la fin de la seconde guerre mondiale, pour qu'on observe outre-atlantique, une renaissance de la mathématique sociale. Grâce à ces deux monuments que sont les travaux de Kenneth J. Arrow [1] sur les mathématiques des choix collectifs, et ceux de John Von Neumann et Oskar Morgenstern [19] en théorie des interactions sociales, plus communément appelée la théorie des jeux, la mathématique sociale dispose enfin d'outils spécifiques à son objet et performants, qui lui permettront de se développer.

Malheureusement, à la même époque, en France, les principaux mathématiciens s'intéressent peu à ces productions. Il faut tout l'enthousiasme de Georges Théodule Guilbaud [17] (1916-2008), fondateur et directeur du Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales à l'École Pratique des Hautes Études, pour que le programme de recherche de Condorcet soit enfin relancé en France. Et, c'est souvent *déguisés* en économistes, dans des revues d'économie politique, que les principaux contributeurs à ce thème ont diffusé les résultats de leurs travaux. Peut-être est-ce par cette connivence forcée avec les sciences sociales, que les mathématiques sociales, bien qu'elles aient gardé ce statut de mathématiques mixtes, n'ont pas pénétré le champ des mathématiques en France. La conséquence inéluctable est le peu d'espace réservé depuis à la mathématique sociale dans l'enseignement secondaire et supérieur en France.

Cette absence devrait pourtant nous interpeller. Peu de collégiens, de lycéens et d'étudiants deviendront des mathématiciens ou des physiciens professionnels. Par contre, nul ne doute qu'ils seront tous des citoyens. C'est cette dernière constatation qui explique sûrement que, depuis quelques décennies, au gré des événements qui ponctuent l'actualité, les pouvoirs publics en appellent à une plus large prise en compte par l'école de l'éducation morale et civique. Les nouveaux programmes de la dernière réforme du collège sont explicites à ce sujet. Le ministère de l'éducation nationale exige notamment que chaque élève puisse construire son Parcours Citoyen. On y précise aussi que toutes les disciplines, y compris les mathématiques, sont invitées à se sentir concernées par cette problématique. Ainsi, dans la partie sur « les contributions essentielles des différents enseignements au socle commun du cycle 4 », on peut lire que « La formation de la personne et du citoyen relève de tous les enseignements ». Dans l'annexe du programme de mathématiques du cycle terminal des séries ES et L, il est aussi affirmé que « l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée a pour but de donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen ».

Quand on parcourt les programmes de mathématiques, on y trouve pourtant assez peu d'entrées, que l'on pourrait considérer comme directement reliées à l'éducation à la citoyenneté. D'une manière générale, on y affirme que l'apprentissage des mathématiques constitue en soi, un élément incontournable de la formation citoyenne. Basée sur des preuves et des démonstrations, la maîtrise des procédures de construction du discours mathématique apporterait les compétences indispensables à l'émergence d'un esprit critique et d'une pensée autonome permettant de faire des choix en citoyen responsable et rationnel. Savoir démontrer les théorèmes d'Euclide [1] serait donc, dans l'esprit des programmes, une méthodologie et une rationalité permettant d'assurer la bonne compréhension par les citoyens des enjeux politiques de la cité. Bien sûr, nous pensons que l'enseignement de la rationalité mathématique est une condition nécessaire à la formation des futurs citoyens.

Par contre, nous pensons qu'il n'est pas suffisant, car nous doutons que le transfert de la méthode mathématique aux questions sociales et citoyennes se réalise aussi naturellement que ne le prétendent les textes. L'expérience montre au contraire que les mathématiques sont souvent perçues comme la matière scolaire par excellence et qu'en dehors de l'école, en particulier dans le champ politique et social, les mathématiques n'apportent pas grand chose au débat... Alors, pour pallier ce dernier problème, les programmes insistent sur l'enseignement des probabilités et de leur articulation avec les statistiques. Depuis plusieurs années, les probabilités, la statistique descriptive et la théorie de l'échantillonnage sont abordées systématiquement au collège et au lycée.

Par exemple, l'entrée retenue pour les mathématiques dans un EPI de type « Information, communication et citoyenneté » est « l'information chiffrée et son interprétation ». Dans le programme du cycle 4, il est recommandé qu'on aborde « les notions d'incertitude et de hasard, afin de construire une citoyenneté critique et rationnelle ». Il est vrai que Condorcet faisait des probabilités le socle à partir duquel devait se construire la mathématique sociale.

Mais, depuis le siècle des Lumières, bien d'autres outils très pertinents ont été développés. L'esprit des programmes ne tient pas compte de l'ensemble des travaux en mathématique sociale depuis Condorcet et se limite à la transmission de clés pour comprendre l'information statistique produite dans notre société. À l'école, l'étude directe de l'objet social demeure par conséquent, le domaine réservé des historiens, des géographes, des économistes, des philosophes et des littéraires. Le mathématicien n'aurait donc rien à dire sur cet objet. Pourtant, et c'est l'objet du présent article, la mathématique sociale offre un corpus de méthodes et de connaissances, qui dépasse très largement l'enseignement des probabilités et des statistiques, et qui surtout permet d'étudier directement l'objet social. Nous prétendons que cet enseignement des mathématiques sociales n'est pas superflu et qu'il est aujourd'hui nécessaire à la formation des futurs citoyens et du regard éclairé qu'ils porteront sur le monde. De plus, nous croyons que ces notions, à condition qu'elles soient correctement élémentarisées, peuvent être abordées dès le cycle 4, pour être ensuite développées au lycée.

Dans une première section, nous présenterons ce que nous entendons par la Mathématique Sociale, en élargissant la définition de Condorcet, pour y intégrer notamment les outils développés depuis. Nous présenterons, ensuite, en quoi notre plaidoyer soulève des questions plus globales, concernant notamment l'évolution des mathématiques et leur enseignement. Nous discuterons le processus de « purification » des mathématiques au siècle dernier, et son impact encore visible aujourd'hui dans l'enseignement.

1 On remarque que la place laissée à la démonstration mathématiques est de plus en plus réduite dans les programmes.

Enfin, dans une dernière section, ne pouvant aborder dans un seul article, l'ensemble de la mathématique sociale, nous nous concentrerons sur les mathématiques des choix collectifs. Nous présenterons quelques modalités d'enseignement de cette discipline et les contenus à privilégier. Il est évident que le présent article ne permet qu'un développement restreint et superficiel de notre thèse. Le sujet fera l'objet d'autres articles dans lesquels nous présenterons plus précisément le contenu formel de la mathématique sociale, les activités et les outils pédagogiques à proposer aux enseignants.

2. — Qu'est-ce que la mathématique sociale ?

Comme nous l'avons écrit en introduction, le terme de mathématique sociale est une création de Condorcet qui explicite le choix de cette expression dans *Tableau de la science,* [7] dans le *Journal d'instruction Sociale 1793.* Il définit cette discipline comme « L'application du calcul aux sciences morales et politiques ».

Le champ d'application de cette science recouvre pour Condorcet « (...) les applications relatives aux intérêts sociaux ou à l'analyse des opérations de l'esprit humain et dans ce dernier cas, elles n'ont encore comme objet que l'homme perfectionné par la société ».

Pour Condorcet, la mathématique sociale tient son qualificatif non seulement de son objet d'étude mais aussi, de la fonction qu'elle occupe dans la société. Les connaissances qu'elle met au jour doivent améliorer, préciser la connaissance dans ces champs d'investigation et surtout, mettre à disposition des citoyens des outils qui leurs permettent de mener une réflexion critique, rationnelle et éclairée, sur les décisions prises dans la cité. Contrairement aux sciences établies, elles ne doivent pas nécessiter l'utilisation implicite de connaissances accumulées. Elles doivent fournir à chacun des critères simples, clairs et explicites pour prendre ses décisions en connaissance de cause.

Pourtant, pendant cent-cinquante ans, ce programme de recherche n'a guère connu de succès. Il a fallu attendre le milieu du XXème siècle, pour que l'utilisation des mathématiques dans les sciences humaines connaisse un développement rapide, en particulier dans l'économie politique. Les statistiques, de leur côté, sont utilisées régulièrement en psychologie et en sociologie. Claude Levi-Strauss [16] dans son introduction sur « Les mathématiques de l'Homme », explique que les sciences sociales ont toujours eu besoin des mathématiques. Les mathématiciens modernes s'étant concentrés essentiellement sur des questions reliées aux sciences physiques, s'occupèrent peu de produire des outils mathématiques utilisables par les sciences humaines. C. Levi-Strauss [16] observe que, désormais, avec l'apparition outre-atlantique de la théorie des jeux, des outils spécifiques existent et que la mathématique sociale peut contribuer à des avancées significatives dans les domaines des sciences humaines. Il cite notamment ses propres travaux avec G.Th. Guilbaud sur les règles du mariage.

Aujourd'hui, la mathématique sociale s'est fortement développée et a connu de nombreuses innovations passionnantes. À ce stade, il nous semble difficile et présomptueux de définir des critères précis qui donneraient le label de « mathématique sociale » à une production scientifique. Comme nous l'expliquerons dans la suite de l'article, c'est plus la façon dont les résultats sont mis à la portée de chacun et l'utilité pratique qu'elle rencontre dans le débat démocratique, qui font qu'une production peut être considérée comme faisant partie du corpus de la mathématique sociale. Toutefois, nous pouvons recenser quatre grands thèmes autour desquels s'articule la plupart des productions actuelles de la mathématique sociale :

— les mathématiques des choix collectifs qui constituent, historiquement, le premier thème étudié par Condorcet, qui s'appelait alors l'arithmétique politique ;

— l'analyse de l'aléatoire, la théorie des probabilités appliquée aux questions sociales qui constituait pour Condorcet l'axe principal du développement de la mathématique sociale ;

— les statistiques descriptives et inférentielles, et en particulier la théorie de l'échantillonnage ;

— la Théorie des interactions sociales ou Théorie des Jeux, inexistantes du temps de Condorcet mais qui, comme l'avaient prévu jadis G.Th. Guilbaud et C. Levi-Strauss, constitue désormais, l'un des thèmes les plus féconds de la mathématique sociale.

Dans le présent article, nous concentrons notre propos sur les mathématiques des choix collectifs, thème fondateur de la mathématique sociale chez Condorcet, car ils constituent malheureusement un corpus totalement ignoré de l'enseignement secondaire français.

3. — Pourquoi enseigner la mathématique sociale ?

Dans l'espoir de replacer la question de l'enseignement dans une perspective de Condorcet, nous abordons dans ce chapitre, la question de « Pourquoi enseigner la mathématique sociale ? » Le projet social de Condorcet propose d'ancrer l'idéal démocratique dans une augmentation des Lumières. Cet ancrage relie la question du principe majoritaire dans les décisions collectives et celle d'une instruction publique générale. Sur le principe majoritaire, on retrouve les racines du « théorème du jury », dont l'étude en classe permet de motiver et problématiser des questions aussi importantes que celle du théorème de la loi faible des grands nombres et de la loi binomiale. Comme nous le verrons dans 4.2, afin de rendre efficace le principe majoritaire, un accroissement des Lumières des citoyens est une condition nécessaire. Enfin, ce que Condorcet développe à merveille dans les « Cinq mémoires », cet accroissement des Lumières nécessite une instruction publique, elle-même nécessitant une élémentarisation du savoir.

Nous nous proposons donc de développer en deux temps, la question de l'élémentarisation de la mathématique sociale, dans le contexte actuel de l'enseignement, puis dans un deuxième temps, nous discuterons comment cette élémentarisation continue de se heurter à des enjeux de pouvoir.

3. 1 *Purification des mathématiques, enjeux et conséquences*

L'évolution de la science mathématique et de ses liens avec les autres sciences peut être lue au travers d'un processus de « purification ». On peut retrouver ces discussions dans des textes aussi différents que ceux de Rudolf Bkouche [4] ou d'Yves Chevallard [6]. Si l'on reprend la terminologie de Bkouche, un point de vue aristotélicien sur la science distingue l'objet physique donné par la connaissance empirique de l'objet mathématique du discours démonstratif.

Ainsi, la classification de Bacon [2] faisait apparaître les mathématiques « pures » et les mathématiques « mixtes ». Au rang des mathématiques mixtes, on y retrouvait : la mécanique, l'optique, l'hydrodynamique, l'astronomie... Elles se distinguent des mathématiques pures, par leur rapport au réel. La mathématique sociale de Condorcet rentre très clairement dans le cadre des mathématiques mixtes. Nous préférons revenir à cette appellation de mathématiques mixtes, plutôt que mathématiques appliquées, en ce sens que les mathématiques appliquées sont soumises à ce processus de « purification » qui crée un éloignement du réel. En effet, ce que nous proposons dans un enseignement de la mathématique sociale est précisément de poser la question du réel et de ses rapports avec les idéalités mathématiques. Cette approche promet de pouvoir interroger les deux questions fondamentales que discute R. Bkouche[4] :

— De quoi parlent les mathématiques ?

— Pourquoi, les mathématiques permettent-elles de m'en apprendre sur le monde réel ?

Ce processus de « purification » mériterait d'être à nouveau exploré dans une perspective didactique, car s'il trouve une partie de ses origines dans ce qu'on peut nommer la naissance des disciplines — il en est ainsi des différentes mathématiques mixtes susnommées — il se précise au sein même de la discipline par cette distinction — ou opposition — entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées, perdant par la même ce rapport au réel. Enfin, il peut aussi être perçu dans les intentions de réformes comme celle des mathématiques modernes qui peuvent être entendues comme une apothéose de ce processus de purification, au sein de l'institution scolaire.

Ce que nous voulons dire, c'est que l'enseignement n'échappe pas à ce processus de purification et que cette purification rend difficile, sinon impossible, les deux questions fondamentales susvisées. On peut accepter que l'institution scolaire tente de revenir sur cet écueil de purification en proposant des dispositifs de dialogue entre les disciplines, comme cela se retrouve dans les TPE, les EPI et autres travaux interdisciplinaires. L'idée d'une mathématique mixte va bien au-delà de cette problématique. Il s'agit d'interroger, avec une pensée mathématisante, un véritable objet du réel au cœur même d'une activité mathématique.

Cette étude permet bien évidemment de créer des liens avec les autres disciplines, car il n'est pas question de prétendre que la mathématique est la seule à pouvoir parler du social. Bien d'autres disciplines le font et avec grand intérêt, mais l'apport de la mathématique sur ce champ permet d'interroger les autres disciplines sur des éléments de savoir, peu ou pas discutés. La philosophie pourra interroger la question de la démocratie, de la volonté générale, de la manipulation. La géographie et l'histoire peuvent interroger les questions de politique ou de géopolitique, de conflit, de pouvoir. Les différentes formes d'éducation à la citoyenneté, de représentation des minorités, pourront aussi être mobilisées.

Cette mathématique mixte pourrait intégrer différentes problématiques de la statistique et de l'enseignement de l'aléatoire, dont on sait qu'ils ont été longtemps sacrifiés dans la culture française d'enseignement. Elle participerait aussi à répondre à la question du sens des mathématiques pour des élèves, davantage attirés par un programme ou un projet d'études en sciences sociales.

3. 2 *Articulation pensée autonome et élémentarisation*

La mathématique sociale ayant pour objet d'étude la question sociale, a un rôle particulier à jouer dans le questionnement de l'idéal démocratique et du développement d'éléments de savoirs utiles pour les citoyens. Comme le souligne Coutel [5] : Condorcet, dans ses cinq mémoires sur l'instruction publique, discute de la question de la continuité entre la raison et l'exercice de la souveraineté. Bien sûr, Condorcet entend cet exercice de la souveraineté par le peuple comme une exigence à ce que la raison devienne commune et fonde les choix faits via des scrutins impliquant l'ensemble des citoyens.

L'enjeu de l'instruction est bien donc de permettre, par un accroissement des Lumières, une émancipation des individus, au sens de l'accès à une pensée autonome. Le projet de la mathématique sociale, en prenant comme objet l'humain, permet de comprendre les ressorts de cette raison commune et des choix faits par celle-ci. Comme tout projet d'instruction, il s'agit de rendre le savoir élémentaire, afin que le citoyen ne soit pas dépendant de quelques initiés. Nous proposons de discuter dans un premier temps une formule de Charles Dodgson [5] alias Sir Lewis Caroll : « Les élections devant refléter de préférence le vœu de la majorité et non celui des plus habiles au jeu électoral, il me paraît souhaitable que tous maîtrisent les règles de ce jeu ».

L'enseignement de la mathématique sociale répond ainsi à ce souhait que « tous maîtrisent les règles de ce jeu ». L'enseignement de cette mathématique sociale pourrait ainsi être utilisé pour favoriser l'autonomisation de l'individu. Elle pourrait de même aider les gens à réorganiser leurs points de vue sur les institutions sociales, les traditions et les différentes possibilités des actions politiques. Le seul enseignement de l'arithmétique ou des statistiques ne peut répondre à ce problème, vus les écueils produits par une purification excessive des mathématiques. L'aspect « mixte » de la mathématique sociale rend nécessaire une insertion propre au risque de laisser le jeu électoral aux plus habiles. De nombreuses questions relèvent d'un enseignement élémentaire au sens de cette élémentarisation du savoir proposée par Condorcet. Encore faut-il avoir rendu ce savoir élémentaire ! En effet, ce savoir est réservé à un petit nombre dans des cursus de l'enseignement supérieur, principalement d'économie et de sciences politiques. Ainsi sont rendues possible des formules aussi malheureuses que lourdes de conséquence, comme celles de Dominique Reynié12] « La question de savoir comment extraire un résultat conforme « au véritable vœu de la pluralité » (Condorcet) fera l'objet de débats abondants, atteignant un niveau de formalisation finalement accessible aux seuls mathématiciens.

Ce degré de sophistication montre que les difficultés liées à l'application du principe majoritaire restent invisibles, pour ainsi dire, à l'œil du simple électeur. Pour qui n'est pas mathématicien avisé, la règle de majorité conserve presque intacte sa force de persuasion, malgré les conséquences paradoxales et les effets de distorsion des préférences individuelles qu'elle peut entraîner ». Cette citation peut être discutée d'un point de vue politique ou éthique. Néanmoins, le seul point de vue de l'instruction nous interpelle ici dans sa dimension de l'élémentarisation. Le projet de Condorcet n'est pas de rendre les individus dépendant d'un savoir « accessible aux seuls mathématiciens ». Sans être d'une naïveté aveugle, le problème posé est bien de savoir si une connaissance peut, et doit, rester accessible aux seuls mathématiciens. Le pari que nous proposons est que la mathématique sociale peut être soumise à ce même idéal d'élémentarisation pour réduire cette distance qui sépare le citoyen du savant. Cela se fera au bénéfice du développement de la pensée autonome.

Cette mathématique mixte permet de montrer que l'une des fonctions des mathématiques relève de la question de la modélisation qui permet d'abstraire le réel pour se concentrer sur les propriétés qui nous semblent pertinentes. Ce processus d'abstraction dans une mathématique mixte relie l'empirique au théorique. L'activité mathématique, en interrogeant les théories, permet ainsi de cerner ce qui pouvait faire obstacle dans le monde réel. Les activités que nous discutons dans la suite et dans les annexes sont quelques exemples de possibles.

4. — Modalité d'enseignements de la mathématique sociale : l'exemple des mathématiques des choix collectifs

Les mathématiques des choix collectifs étudient les processus de décisions collectives dans un milieu contraint. Dans cette littérature, on se restreint, en général, aux décisions qui se réalisent dans un cadre dit démocratique. La modélisation porte donc sur le collectif, les individus et la procédure des choix collectifs. Ne pouvant être exhaustif, nous ne présenterons que quelques notions appartenant à ce champ et que l'on veut faire travailler aux élèves.

4. 1 *La diversité des règles de décision collective*

Dans le discours ordinaire, on a l'impression que la notion de démocratie va de soi : « *En démocratie, c'est le peuple qui décide* ». Or, si l'adage est sans appel, sa mise en œuvre est nettement plus complexe. Car, le peuple est un ensemble d'individus qui, en règle générale, n'ont pas les mêmes opinions. La diversité des préférences sur les options proposées à une société s'oppose à ce concept fallacieusement unificateur de *Peuple*.

Nous pouvons dire, en première approximation qu'est *démocratique*, une procédure qui tiendrait compte de la diversité des opinions. Or, et c'est bien là le problème, il n'existe pas de procédure unique qui s'imposerait *naturellement*. Nous proposons l'activité suivante qui illustre ce problème à partir du tableau ci-dessous :

Table 1 – Tableau de Balinski [3]

Nombre des électeurs	33	16	3	8	18	22
Ordre des préférences	A	B	C	C	D	E
	B	D	D	E	E	C
	C	C	B	B	C	B
	D	E	A	D	B	D
	E	A	E	A	A	A

Ce tableau récapitule les différents classements qu'ont des individus appartenant à un même collectif, entre 5 options A, B, C, D et E.

Nous expliquons aux élèves que la première colonne signifie que 33 personnes préfèrent A à B, B à C, C à D et D à E. La seconde colonne signifie que 16 individus préfèrent B à D, D à C, C à E et E à A etc. On donne quelques minutes aux élèves pour qu'ils proposent le candidat qui leur semble être le plus légitime pour ce collectif. On récupère les propositions des élèves et les justifications qu'ils donnent à leur choix. On constate que les participants à cette activité choisissent dans d'importantes proportions le candidat C, puis le candidat A et le candidat B. Les candidats D et E sont rarement choisis.

Ce résultat, comme nous le verrons, est déjà en lui-même intéressant. En revanche, les justifications avancées par les participants à l'activité restent la plupart du temps approximatives. Ils choisissent de manière intuitive sans modèle explicite. Nous montrons ensuite que tous les candidats peuvent gagner suivant le mode de scrutin et donc le modèle retenu :

— Le candidat A est le vainqueur d'un scrutin à la pluralité qui est l'équivalent d'un scrutin uninominal à un tour. On choisit le candidat qui réunit le plus de suffrages. Ce type de scrutin est pratiqué par exemple, dans des triangulaires ou quadrangulaires au second tour des élections municipales ou législatives en France. Dans ce type de scrutin on retient seulement du tableau cidessus le tableau suivant :

Table 2 – Scrutin Uninominal à un tour

Nombre des électeurs	33	16	3	8	18	22
	A	B	C	C	D	E

— Le candidat B est ce qu'on appelle le vainqueur de Borda. Dans ce mode de scrutin, les électeurs attribuent un poids à chaque candidat en fonction du classement qu'ils leur donnent. Dans le cas de 5 candidats, les électeurs mettent 4 points au premier, 3 au second, 2 au troisième, 1 au quatrième et 0 au dernier. La procédure fait la somme de ces différents poids et le vainqueur du scrutin est celui qui a le plus de points. Cette méthode n'est jamais utilisée pour des élections politiques en raison de sa grande propension à être manipulée par les électeurs. Le chevalier de Borda déclarait d'ailleurs de sa méthode : « Mon scrutin est fait pour les gens honnêtes ». Toutefois, on en retrouve de nombreuses variantes dans les méthodes de classements sportifs.

— Le candidat C est le vainqueur de Condorcet. Cette méthode consiste à opposer tous les candidats deux à deux. Celui qui gagne tous ses duels est le gagnant de Condorcet. Cette méthode n'est jamais pratiquée car il peut exister des cas où suivant les préférences individuelles des électeurs, il n'existe pas de candidats capables de battre tous les autres : C'est ce qu'on appelle le paradoxe de Condorcet.

— Le candidat D est le vainqueur du vote alternatif pratiqué, par exemple, en Australie pour l'élection de la chambre des représentants, en Irlande et aux élections municipales à San Francisco. Ce mode de scrutin consiste à faire autant de tours d'élections qu'il y a de candidats à rejeter. Au premier tour, on élimine le candidat qui a le moins de suffrages. Au second tour, on recommence la procédure sur les candidats restants. Et, ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul candidat.

— Le candidat E est le vainqueur d'un scrutin uninominal à deux tours. En France, la plupart des modes de scrutins se déroulent au scrutin uninominal à deux tours. Il arrive souvent que, même les élections de délégués utilisent cette procédure, ce qui contribue à *naturaliser* dans l'esprit des élèves ce mode de scrutin. Il n'a pourtant rien de naturel. Nous rappelons qu'au terme de cette expérience, les participants le choisissent rarement. En outre, il pose de nombreux problèmes qui devraient être davantage discutés.

Ce type d'activité permet d'illustrer plusieurs choses. La première, c'est qu'il existe une diversité de méthodes qui permettent de concrétiser ce qu'on appelle la démocratie et que chacune d'entre elles peut donner un résultat différent. Ensuite, au lieu de faire des choix basés sur l'intuition ou au petit bonheur la chance, les mathématiques proposent des modèles axiomatiquement caractérisés. En faisant apparaître les propriétés intrinsèques de ces règles, le travail du mathématicien fournit à la société, les éléments fondamentaux pour nourrir un débat éclairé sur les choix d'un scrutin plutôt qu'un autre. Sans imposer elle-même un choix définitif, la mathématique sociale permet ainsi d'alimenter cette discussion avec des éléments rationnels évitant de s'en remettre à la seule rhétorique.

4. 2 *Le Théorème du jury de Condorcet*

Le principe démocratique implique que les lois soient votées par ceux qui doivent ensuite les respecter. Logiquement, comme chacun est concerné par les lois qu'il vote, il faudrait que les choix se fassent à l'unanimité. Chaque électeur détiendrait alors un droit de veto, ce qui conduirait, pour des populations suffisamment importantes, à l'indécision chronique. Pour éviter ce problème et assurer des prises de décisions, l'exigence d'unanimité est remplacée concrètement dans les systèmes politiques démocratiques par celui, plus faible, de principe majoritaire. Le théorème du jury de Condorcet, découvert en 1785, est une élégante justification de l'utilisation de ce dernier principe. Il montre que, sous certaines hypothèses énoncées ci-dessous et pour un grand nombre d'individus qui votent sur une question binaire, la majorité permet de réaliser à coup sûr les vrais choix [2]. Les conditions à satisfaire pour pouvoir appliquer le Théorème du jury, énumérées par Hélène Landemore [15], sont :

— *hypothèse de l'électeur éclairé :* Les électeurs ont plus d'une chance sur deux de choisir la réponse vraie;

— *hypothèse d'indépendance :* Ils votent indépendamment les uns des autres;

— *hypothèse du vote sincère :* Ils votent sincèrement ou véridiquement.

Pour illustrer rapidement la puissance des grands nombres mise au service de la règle majoritaire, considérons dix électeurs, dont chacun a une probabilité de 0,51 de répondre correctement à une question binaire.

Avec la loi binomiale, on peut calculer que, sur 10 tirages, lorsque une majorité d'électeurs émerge, la probabilité que cette majorité choisisse la « bonne » réponse, est d'environ 53 pour 100 [3]. Élargissons à présent le groupe à mille personnes, dans ce cas, la probabilité que la majorité observée porte sur la « bonne » réponse est égale à environ 74 pour 100 de chances [4]. Plus le groupe est nombreux, plus les chances que la majorité ait raison se rapprochent de 100 pour 100. Dans cet exemple tiré de Landemore [15], on voit la puissance du résultat qui est une simple implication de la loi faible des grands nombres. En annexe, on présente la démonstration de ce Théorème à l'aide de cette dernière loi.

Dans l'exemple d'un jury de tribunal, il dit que, pour une population suffisamment grande de jurés et si chacun d'entre eux est suffisamment informé et instruit, alors il est certain qu'un vote à la majorité prendra la bonne décision concernant la culpabilité d'un accusé. Ce résultat se généralise facilement à tous les choix binaires comme, par exemple, les référendums. Une remarque importante est que ce théorème démontre l'articulation étroite entre une nécessaire instruction et information des citoyens et la vie démocratique incarnée par le principe majoritaire. Ce qui explique pourquoi Condorcet avait beaucoup insisté sur la nécessité d'élé-

2 Dans le Théorème du jury de Condorcet, il ne faut pas confondre cette notion de vérité avec la vérité mathématique. Il n'est pas question de démontrer un résultat mais plutôt d'accéder à une vérité factuelle, comme lors d'un vote concernant la culpabilité d'un accusé.

3 En effet, soit X la variable aléatoire qui nous donne le nombre de « bons » votes, telle que $X \sim B(10, 0.51)$. La probabilité que, quand on observe une majorité, celle-ci porte sur la « bonne » réponse, est égale à $\frac{P(X \geqslant 6)}{P(X \geqslant 6) + P(X \leqslant 4)} \simeq 0.53$.

4 Même raisonnement avec $X \sim B(1000, 0.51)$, on a alors $\frac{P(X \geqslant 501)}{P(X \geqslant 501) + P(X \leqslant 499)} \simeq 0.74$.

mentariser le savoir dans les systèmes d'instruction de régime démocratique. En annexe 6.1, on montre comment formaliser ce théorème qui est une application de la loi faible des grands nombres. En classe, autour d'activités numériques (tableur, programmation etc.), on peut faire découvrir ce résultat aux élèves.

4. 3 *Un jeu de rôle autour du paradoxe de Condorcet*

À partir de l'article *Agendas and Strategic Voting* [14], nous avons développé un jeu de rôles : *Gare et Autoroute.* Les joueurs doivent participer à un vote sur quatre options :

— Construction d'une gare,

— Construction d'une autoroute,

— Construction d'une gare et d'une autoroute,

— Statu quo : aucune construction

La structure de ce jeu est construite de manière à ce qu'il n'existe pas de gagnant de Condorcet, c'est-à-dire qu'aucune option ne gagne en duel toutes les autres au vote à la majorité. Comme nous l'avons vu plus haut, la méthode de Condorcet consiste à faire voter les électeurs sur toutes les paires d'options que l'on peut construire. Le gagnant de Condorcet est l'option qui gagne tous ses duels. Or, ce gagnant peut ne pas exister, ce qui est la cas dans ce jeu. Les rôles des joueurs portent sur les préférences qu'ils ont sur les options. Ces rôles sont distribués de manière à ce que, dans des votes binaires :

— *Construction d'une gare* gagne sur *Construction d'une autoroute*

— *Construction d'une gare* gagne sur *Statu quo*

— *Construction d'une gare et d'une autoroute* gagne sur *Construction d'une gare*

— *Statu quo* gagne sur *Construction d'une gare et d'une autoroute*

Comme on le voit, aucune option ne peut gagner face à toutes les autres. Il s'agit d'une situation de paradoxe de Condorcet. Dans de nombreux comités, et en particulier dans les votes sur les amendements à l'assemblée nationale, on contourne cette possibilité de cycles, en votant selon un agenda, c'est-à-dire une séquence préétablie de duels. Évidemment, suivant l'agenda retenu, le résultat final sera différent. Dans ce jeu, cinq agendas sont proposés. Chacun d'eux fait émerger un vainqueur différent. Ce qui permet de montrer *in vivo* l'impact du choix d'un agenda, et de ce fait, le pouvoir que représente une telle prérogative sur le résultat final. Il montre aussi, quand les joueurs ont bien compris les votes des autres, comment à certaines étapes, par une manipulation adéquate de son vote individuel, on peut transformer le résultat final pour son propre intérêt. On permet des négociations libres sur le vote, où certains joueurs peuvent acheter le vote d'autres joueurs afin de montrer notamment le danger du vote à main levée dans les assemblées. Enfin, ce jeu permet aussi de réfléchir sur les notions d'optimum social et montre que, suivant la procédure retenue pour le choix, la décision collective peut complètement rater cet objectif.

5. — Conclusion

Nous avons essayé de montrer dans cet article, l'importance qui peut être donnée aux mathématiques, via sa composante de la mathématique sociale, dans le Parcours Citoyen de chaque élève. Nous avons également plaidé pour une élémentarisation de leur enseignement, afin de permettre aux élèves de pouvoir mener des réflexions autour des différents concepts qui sont en jeu. Cet enseignement est en fin de compte destiné aux élèves du secondaire, mais il ne se limite pas à ça. Des formations regroupant des professeurs de mathématiques, d'histoire-géographie, de philosophie, de sciences économiques et sociales et aussi des conseillers principaux d'éducation ont déjà été expérimentées dans l'académie de Montpellier. De fait, les élections des délégués de classe, les élections au conseil de vie lycéenne se font via le scrutin uninominal à deux tours. Ceci tend à *naturaliser* ce mode de scrutin très iscutable et peu discuté. Les enseignants de mathématiques et d'autres disciplines pourraient alors s'emparer de ces moments privilégiés pour mener, autour des EPI ou de TPE, les réflexions évoquées dans cet article. Nous n'avons pu présenter qu'une partie des dispositifs et des activités que nous avons déjà expérimentés devant divers publics. Enfin, ce travail n'est qu'une modeste contribution pour revivifier l'idéal des Lumières dans notre enseignement et de redonner aux mathématiques toute la place qui leur revient, dans ce mouvement des *Lumières actives*.

ANNEXE 1

Théorème du Jury une application de la loi faible des grands nombres

La loi faible des grands nombres. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires non-corrélées définies sur un même espace probabilisé ayant même espérance et même variance finie, notées respectivement E[X] et V[X]. Le théorème de la loi faible des grands nombres stipule que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ lim_{\,n \to \infty}\, P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - E[X] \right| > \varepsilon \right) = 0\,.$$

Ceci signifie que la probabilité que la moyenne empirique $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ s'écarte de l'espérance E[X] d'au moins ε, est d'autant plus petite que n est grand.

Le modèle de Condorcet :

— Soit un ensemble I de n électeurs
— Ces électeurs doivent se prononcer sur deux options {0, 1}
— Sans perte de généralité, on suppose que la « *bonne* » option est l'option 1
— Ces électeurs ont tous la même probabilité $p > 1/2$ de choisir la bonne option. Ils votent sincèrement et indépendamment les uns des autres.

Théorème. Sous les conditions du modèle de Condorcet, lorsque le nombre d'électeurs devient très grand, la probabilité qu'une décision collective, prise à la majorité, sur un choix binaire, soit la bonne, se rapproche de 1.

Formellement,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} > \frac{1}{2} \right) = 1 \,.$$

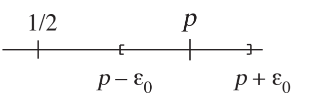
Preuve : Soit X, la variable aléatoire qui prend la valeur 1, si l'électeur vote pour la bonne option et 0 sinon,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

où p est la probabilité qu'un électeur vote pour la bonne option. On a donc E[X] = p. Étant donné que les électeurs votent indépendamment, $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de variables non-corrélées, on peut donc appliquer, le théorème de la loi faible des grands nombres où ε est un réel strictement positif quelconque :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right) = 0 \,.$$

Appliquons cette loi à $\varepsilon_0 = \dfrac{p - \frac{1}{2}}{2} > 0$, car on suppose $p > \dfrac{1}{2}$:



on voit (figure) que l'événement $\left\{ \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \leq \dfrac{1}{2} \right\}$

implique l'événement $\left\{ \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \leq \dfrac{1}{2} \notin [p - \varepsilon_0, p + \varepsilon_0] \right\}$ qui peut aussi s'écrire :

$$\left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - p \right| > \varepsilon_0 \right\}$$

Par suite, en prenant les probabilités de ces événements, on a :

$$0 \leq \mathrm{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \leq \frac{1}{2} \right) \leq \mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - p \right| > \varepsilon_0 \right) \qquad (2)$$

Le dernier membre de cette inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers + ∞. Par le théorème des gendarmes on trouve que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \leqslant \frac{1}{2} \right) = 0$$

On obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} > \frac{1}{2} \right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \leqslant \frac{1}{2} \right) = 1 \,.$$

ANNEXE 2

Le théorème de May

Le théorème de May est un très important résultat de ce champ de la mathématique sociale, prouvé en 1952, qui donne une caractérisation de la règle majoritaire comme procédure de choix vérifiant un ensemble de règles restreint et raisonnable. Afin de ne pas en rendre la présentation dans un langage trop ensembliste et fonctionnel, nous faisons le choix de nommer quelques objets mathématiques par des conventions qui pourront paraître peu orthodoxe.

Le problème de choix du problème de May est celui dit du référendum ou de la décision dans le cas de deux candidats A et B. Nous supposons que participent à cette décision, un ensemble de n électeurs $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$. La question posée aux électeurs est : « Entre les deux candidats A et B, lequel préférez-vous? » Les électeurs peuvent répondre à cette question par :

— Je préfère A à B

— Je suis indifférent entre A et B

— Je préfère B à A

Cela est aussi équivalent à produire une valeur $1, 0, -1$ suivant que l'on préfère A à B, que l'on est indifférent ou que l'on préfère B à A. May commence par définir une fonction d'agrégation des préférences individuelles qui, à la donnée des valeurs D_i de chaque électeur E_i associe une valeur collective $D = f(D_1, D_2, \cdots D_n)$. Les D_i peuvent être vus comme les bulletins des électeurs. La fonction f dépend ainsi de la procédure de vote utilisée. Dans ce contexte, on peut ainsi décrire la règle majoritaire :

— Si $\sum_{i=1}^{n} D_i > 0$, alors $D = 1$

— Si $\sum_{i=1}^{n} D_i = 0$, alors $D = 0$

— Si $\sum_{i=1}^{n} D_i < 0$, alors $D = -1$

May définit alors quatre conditions exigibles pour la procédure de choix que l'on veut utiliser :

— *Liberté individuelle :* Tous les électeurs peuvent choisir la valeur de leur choix pour D_i ;

— *Anonymat :* La valeur collective D est déterminée entièrement par les valeurs individuelles D_i et ne dépend pas de l'ordre dans lequel les électeurs ont voté. Cela se traduit aussi par « Une permutation des bulletins ne change pas la valeur collective ». Cela se traduit encore par une expression universellement quantifiée :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n , f(D_{\sigma(1)}, D_{\sigma(2)}, \cdots , D_{\sigma(n)}) = f(D_1, D_2, \cdots D_n) ,$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \cdots , n\}$.

— *Neutralité :* Si tous les électeurs échangent leur valeur pour la valeur opposée, c'est-à-dire ceux qui choisissent 1 l'échange pour -1 et réciproquement et ceux qui choisissent 0 ne changent pas, alors la valeur collective est échangée pour sa valeur opposée. Cela se traduit par une propriété de la fonction f :

$$\forall\ (D_1, D_2, \cdots D_n), f(-D_1, -D_2, \cdots -D_n) = -f(D_1, D_2, \cdots D_n)\ .$$

— *Réponse positive :* Si la valeur collective D est positive pour la donnée d'un ensemble de valeurs $(D_1, D_2, \cdots D_n)$ et qu'au moins un électeur qui donnait une valeur -1 l'échange pour un 0 ou un 1 et que tous les autres ne changent pas leur valeur, alors on demande à ce que la valeur collective prenne la valeur 1. Cela s'écrit aussi :

Si $f(D_1, D_2, \cdots D_n) \geq 0$ et

1. $\forall\ i \in \{1, 2, \cdots n\},\ D_i' \geq D_i$

2. $\exists\ i \in \{1, 2, \cdots n\},\ D_i' > D_i$

alors $f(D_1', D_2', \cdots D_n') = 1$

Théorème. Théorème de May : La règle majoritaire est l'unique règle vérifiant les quatre conditions précédentes.

Preuve : Comme il est très simple de vérifier que la règle majoritaire vérifie les conditions de May, on ne s'attarde que sur la question de montrer l'unicité, c'est-à-dire qu'une fonction vérifiant les quatre conditions de May est la règle majoritaire.

— On commence par montrer que si $\sum_{i=1}^{n} D_i = 0$, alors $f(D_1, D_2, \cdots D_n) = 0$. En effet, par la règle de neutralité, on a : $f(-D_1, -D_2, \cdots -D_n) = -f(D_1, D_2, \cdots D_n)$.

On peut maintenant appliquer la condition d'anonymat et permuter les bulletins qui valaient -1 avec ceux qui valaient 1, qui montre alors que :

$$f(-D_1, -D_2, \cdots -D_n) = f(D_1, D_2, \cdots D_n)\ .$$

On en déduit donc $f(D_1, D_2, \cdots D_n) = 0$.

— On montre ensuite que si $\sum_{i=1}^{n} D_i = 1$, alors $f(D_1, D_2, \cdots D_n) = 1$. En effet, on applique maintenant la règle de réponse positiv à une donnée de vote $(D_1, D_2, \cdots D_n)$ telle que $\sum_{i=1}^{n} D_i = 0$.

On suppose qu'un des électeurs change son vote -1 en 0 ou son vote 0 en 1, alors par la propriété de réponse positive, on en déduit que $f(D_1, D_2, \cdots D_n) = 1$.

La fin de la preuve est ensuite une récurrence.

Commentaires : Ce résultat a une grande portée épistémique sur ce que permet l'intrusion des mathématiques dans le champ social. Il est très accessible et l'acte de modélisation permet d'illustrer la force de l'abstraction en se concentrant sur ce qui semble réellement important : les quatre conditions de May. La simplicité de ce résultat est potentiellement une justification heuristique de la prédominance de la règle majoritaire comme méthode de choix.

ANNEXE 3

Les mathématiques de base travaillées

Nous proposons un ensemble de notions ou compétences qui peuvent être travaillées dès le collège, en essayant de faire une classification suivant le niveau :

- **Au collège :**
  - Calcul mental
  - Proportionnalité et pourcentages
- **Au lycée :**
  - La question de la modélisation
  - La logique
  - Des éléments de probabilités et de statistiques
  - La structure d'ensemble ordonné
- **Dans le supérieur :**
  - Les relations binaires
  - Les structures d'ordre et de préordre
  - Les relations fonctionnelles avec des fonctions non définies par des formules
  - Du calcul des prédicats, avec des formules en général plus simples qu'en analyse.

  Il y a rarement des inversions de quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ou dans des cas assez simples

Références

[1] Kenneth J Arrow. *Social choice and individual values*, volume 12. Yale university press, 2012.

[2] Francis Bacon. *Novum organum*. Clarendon press, 1878.

[3] Michel Balinski. *Le suffrage universel inachevé*. Belin, 2004.

[4] Rudolf Bkouche. La géométrie entre mathématiques et sciences physiques. In *M. Kourkoulos, G. Troulis, et C. Tzanakis, éditeurs, Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume 2, 2006.

[5] Duncan Black, Robert Albert Newing, Iain McLean, Alistair McMillan, and Burt L Monroe. The theory of committees and elections. 1958.

[6] Yves Chevallard. Les mathématiques et le monde : dépasser «l'horreur instrumentale». *Quadrature*, 41 :25–40, 2001.

[7] JA Condorcet. Tableau général de la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales. *Journal d'instruction sociale*, 22, 1793.

[8] Antoine-Augustin Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot*. chez L. Hachette, 1838.

[9] Charles Coutel. Savoir scolaire et élémentarité chez condorcet. *Spirale. Revue de recherches en éducation*, 15(1) :7–29, 1995.

[10] Denis Diderot and Jean Le Rond d'Alembert. *Encyclopédie Ou Dictionnaire Raisonné Des Sciences, Des Arts Et Des Métiers : B-Cez. 2*, volume 2. Briasson, 1751.

[11] Jules Dupuit. De l'utilité et de sa mesure. 1933.

[12] Jon Elster. Rationalité et sciences sociales. *L'annuaire du Collège de France. Cours et travaux*, (109) :583–601, 2010.

[13] Jacqueline Feldman. Condorcet et la mathématique sociale. enthousiasmes et bémols. *Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences*, (172), 2005.

[14] Charles A Holt and Lisa R Anderson. Agendas and strategic voting. *Southern Economic Journal*, pages 622–629, 1999.

[15] Hélène Landemore. La raison démocratique : Les mécanismes de l'intelligence collective en politique. *Raisons publiques*, (12) :9–55, 2010.

[16] Claude Lévi-Strauss. Les mathématiques de l'homme. *Esprit (1940-)*, (243 (10) :525–538, 1956.

[17] Bernard Monjardet. G. th. guilbaud et la théorie du choix social. 2011.

[18] Michel Truchon. La démocratie : oui, mais laquelle ? *L'Actualité économique*, 75 (1-2-3) :189–214, 1999.

[19] John Von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 2007.

[20] Léon Walras. *Principe d'une théorie mathématique de l'échange, mémoire lu à l'Académie des sciences morales et politiques (séances des 16 et 23 août 1873), par Léon Walras,...* E. Colas, 1874.

[21] Léon Walras. *Théorie mathématique de la richesse sociale*. Corbaz, 1883.