L'INSTRUMENT MATHEMATIQUE COMME INVENTION ET COMME CONNAISSANCE – EN –ACTION [1]

Évelyne BARBIN
Laboratoire LMJL & Irem
Université de Nantes

Le rôle des instruments dans l'histoire des mathématiques a été largement sous-estimé, y compris pour ce qui concerne l'histoire de la géométrie. Plus largement, nous avons été longtemps tributaires de la séparation aristotélicienne entre la technique qui est « poïétique », c'est-à-dire du côté de l'action, de la science, qui est « théorétique », c'est-à-dire du côté de la contemplation et de la spéculation (Aristote 1991, p. 4-9). C'est ainsi que, par exemple, tout rôle des techniques dans la révolution scientifique du XVIIe siècle a été refusé par Alexandre Koyré (Barbin 2006, p. 9-44). Les figures de la géométrie grecque ont été également rattachées à une conception purement idéale, qui est héritée d'écrits platoniciens et qui les rattache au discours axiomatique des *Éléments* d'Euclide.

Une nouvelle pensée de la technique a été proposée par le philosophe Gilbert Simondon, qui écrit dans son ouvrage *Du mode d'existence des objets techniques* : « il semble que cette opposition entre l'action et la contemplation, entre l'immuable et le mouvant, doive cesser devant l'introduction de l'opération technique dans la pensée philosophique comme terrain de réflexion et même comme paradigme » (Simondon 1969, p. 256). Dans cet article, nous reprenons les réflexions de Simondon sur les objets techniques pour les rapporter aux instruments mathématiques dans leur histoire, ainsi que celles du psychologue Pierre Rabardel qui publie en 1995 *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*, où il fait état des écrits de Simondon et de travaux concernant le travail, la connaissance et l'action. En particulier, nous reprendrons le propos de Rabardel concernant le sujet connaissant et « les autres », propos qui intéressent l'épistémologie et l'histoire des mathématiques.

Pour être utile à une approche instrumentale dans l'enseignement, nous avons choisi

1 Cet article reprend un article paru dans la revue grecque *Menon Journal of Educational Research*, 2, 2016. Nous remercions Nikos Nikolantonakis (Université de Macédoine) pour son aimable autorisation.

de nous restreindre à des instruments correspondant aux débuts de la construction d'une pensée géométrique, et qui s'adressent à des élèves du cycle 3 en France (9 ans-12 ans). La lectrice ou le lecteur trouvera d'autres exemples intéressants d'instruments pour la géométrie élémentaire dans des articles parus dans trois ouvrages récents de la Commission inter-Irem Épistémologie et histoire des mathématiques (Chatelon & Troudet, Chevalarias, Guichard, Guyot & Métin, Mercier). Il trouvera aussi d'autres ressources dans l'ouvrage de Marc Moyon consacré à la géométrie pratique dans les textes médiévaux (Moyon, 2017).

1. — L'instrument comme invention et l'édification de la géométrie

Un instrument mathématique, comme tout instrument technique, apparaît d'emblée comme le résultat d'une invention et son fonctionnement suppose, pour être possible, cette invention (Barbin 2004, p. 26-27). Simondon écrit à propos de l'objet technique : « l'objet qui sort de l'invention technique emporte avec lui quelque chose de l'être qui l'a produit [...] ; on pourrait dire qu'il y a de la nature humaine dans l'être technique » (Simondon 1969, p. 248). Cette approche indique que l'instrument peut, mieux que le discours, apporter une forme dynamique à la connaissance qui est sous-jacente au fonctionnement d'un instrument. De plus, l'invention, tout comme la science, est la réponse à un problème. Rabardel écrit à propos de l'artefact : « l'artefact concrétise une solution à un problème ou à une classe de problèmes socialement posés » (Rabardel 1995 , p. 49). Pour lui, l'artefact désigne largement toute chose transformée par un humain, tandis que l'instrument désigne « l'artefact en situation dans un rapport à l'action du sujet, en tant que moyen de cette action » (Rabardel 1995, p. 49). L'artefact n'est donc pas « un outil nu », comme l'écrit Luc Trouche (Trouche 2005, p. 265), dans la mesure où il porte avec lui la solution à un problème et, activé dans une situation analogue à celle qui a présidé à son invention, il devient un instrument de réponse à ce problème.

En accord avec l'importance que nous accordons au problème, nous considérons donc que c'est l'enseignement qui donnera son sens à l'instrument et non l'instrument qui donnera le sien à l'enseignement, à l'instar de ce que Simondon écrit à propos des rapports entre le travail et l'objet technique. L'histoire du baromètre, que l'on attribue au physicien Ernest Rutherford, est une manière amusante d'illustrer ce propos. Elle raconte que l'on a demandé à un étudiant de mesurer la hauteur d'un immeuble à l'aide d'un baromètre. L'étudiant est monté en haut de l'édifice et ayant attaché le baromètre à une corde, il a descendu la corde et l'a remontée pour mesurer la longueur de la corde descendue. Le professeur le recale, mais il lui donne une chance de se rattraper : il faut qu'il fasse preuve de connaissance physique. L'étudiant monte alors en haut de l'édifice et laisse tomber le baromètre, il mesure le temps de chute avec un chronomètre et il applique la loi de chute pour trouver la longueur de la chute. Il est admis à l'examen et il indique qu'il a d'autres réponses : en faisant osciller le baromètre comme un pendule ou en comparant la hauteur de l'ombre du baromètre à celle de l'immeuble. L'étudiant ajoute que la meilleure solution est de sonner chez le concierge de l'immeuble et de lui dire : « si vous me donnez la hauteur de l'immeuble, je vous donne ce superbe baromètre ». Rappelons que lorsque Blaise Pascal a fait entreprendre l'expérience du Puy de Dôme, son problème n'était pas d'en mesurer la hauteur, mais de montrer qu'il y avait du vide en haut du tube du dispositif de Torricelli.

Quels sont les problèmes qui ont accompagné la genèse d'une science géométrique ? Le terme de géométrie signifie « mesure de la terre », il renvoie à l'arpentage, qui consiste, pour mesurer les terrains, à reporter un bâton et à compter le nombre de reports. Mais la géométrie grecque a été au-delà de l'arpentage. Les historiens attribuent aux Ioniens, au VIe siècle avant J.-C., la solution du problème de déterminer la distance d'un bateau en mer. L'arpentage avec un bâton est inadéquat, mais « quand les techniques échouent la science est proche » (Simondon 1969, p. 246).

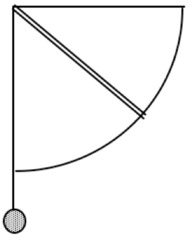


Fig. 1. Le cadran ionien

Pour résoudre le problème, il faut ruser : les Ioniens ont utilisé un dioptre, c'est-à-dire un instrument de visée, qui pouvait être un cadran sur lequel tourne une partie flexible autour d'une partie maintenue verticale grâce à un fil à plomb (fig. 1). En montant sur un endroit élevé, il est possible de faire une visée vers le bateau en orientant la partie flexible du dioptre. Ensuite, il faut se retourner en gardant la même inclinaison et viser un point sur le sol. Deux nouveaux gestes pour résoudre le problème : une visée et un retournement qui balaie l'espace. Le problème est résolu parce que le sujet géomètre a remplacé le « schème primitif », celui du report de l'arpentage, par un processus d'instrumentation au sens de Rabardel. Un nouveau schème est formé, qui englobe non seulement des mesures de distances mais des visées, qui relie des visées et des distances. En quoi consiste ce schème ? Par quel processus l'instrument et le nouveau schème sont-ils potentiellement porteurs d'une connaissance géométrique ?

La géométrie a pour objet de voir et de faire voir ce que l'on pense. Il faut d'abord représenter la situation. En détachant du réel les éléments essentiels à sa compréhension, on réalisera un schéma (fig. 2), puis *une mise en figure* composée de droites permettra de connecter ces éléments essentiels (fig. 3). Sur cette figure, certaines droites représentent des distances concrètes, mais pas celles qui correspondent aux rayons visuels. Pour tenir un discours qui explique la solution à un autre (qui le demanderait), il faut dire ce qui est maintenant représenté par un espace entre deux droites et qui correspond à ce qui est une « visée » dans le contexte instrumental. Cet espace a une signification dans le contexte du problème et il est relié à une distance : on l'appellera un « angle ». La notion d'angle est attribuée aux Ioniens. Cette notion n'est pas présente dans les mathématiques égyptiennes, dont ont hérité les Grecs, y compris dans les problèmes de pente de pyramide.

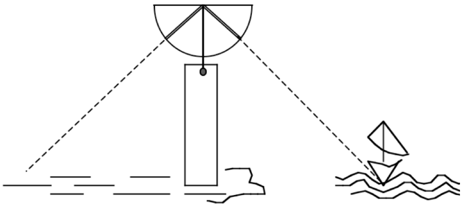


Fig. 2. La distance d'un bateau en mer : schéma

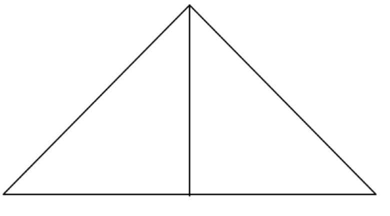


Fig. 3. La distance d'un bateau en mer : figure

Le schème consiste en une connaissance sur la figure : l'égalité des angles implique l'égalité des distances. Nous appellerons *schème géométrique* (ou simplement schème) une connaissance qui coordonne des éléments d'une configuration géométrique particulière, et qui peut être activée, transformée ou généralisée par re-connaissance de cette configuration dans des situations variées. Pour démontrer (à un autre qui ne serait pas convaincu), par un discours déductif comme celui d'Euclide, que l'égalité des angles de la figure (fig. 3) implique l'égalité de segments de droite, il faudrait introduire la notion d'égalité de figures (superposition) et des lettres pour désigner les éléments de la figure. La géométrie qui s'édifie ainsi est une science qui raisonne sur des grandeurs pour les comparer. La dioptre est une connaissance-en-action parce que son fonctionnement demande l'effectuation de gestes et l'activation d'un schème qui reprennent ceux de l'invention et qui seront repris dans d'autres situations problématiques. Ici, la connaissance instrumentale et la science procèdent de manière identique.

Examinons maintenant l'instrument scolaire qui est associé à l'angle, c'est-à-dire le rapporteur, et son usage. Il est demandé aux élèves de mesurer des angles, c'est-à-dire de dire des nombres qui correspondent (plus ou moins) à un angle dessiné ou de dessiner des angles qui valent 30°, 45°, etc. Le rapporteur est un outil qui sert essentiellement dans le contexte de dessins de figures qui n'ont pas toujours ou peu un statut de représentation d'une situation. Tant qu'il reste dans ce cadre numérique étroit, le rapporteur est peu susceptible de provoquer des raisonnements géométriques. Il vaut d'ailleurs mieux que l'élève l'oublie quand il lui sera enjoint de « démontrer ». Il en va différemment si un élève demande, ce qui n'est pas rare, pourquoi les angles sont mesurés de la même façon, quelle que soit la taille du rapporteur. La réponse théorique à cette question est une connaissance : le rapport de la grandeur de l'arc intercepté par un angle au centre à la circonférence tout entière est le même, quel que soit le rayon du cercle. Avec cette réponse, le rapporteur devient une connaissance-en-action.

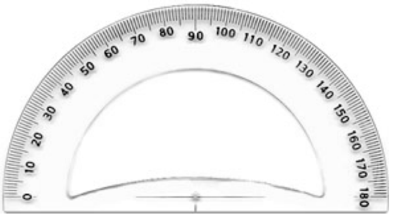


Fig. 4. Un rapporteur

Avec les deux instruments examinés, nous avons abordé le rôle d'un « autre », qui dans chacun des deux cas questionne. Cette intrusion n'est pas artificielle dans l'histoire, où les instruments sont inventés et discutés par des hommes. Lorsque Rabardel décrit les relations entre les trois pôles constitués par le sujet, l'instrument et l'objet, il indique bien la composante essentielle qui est l'environnement. Puis plus loin, il enchérit avec un « modèle » incluant le sujet. Ce modèle SACI des « situations d'activités collectives instrumentées » devrait également attirer l'intérêt des didacticiens (Rabardel 1995, p. 62).

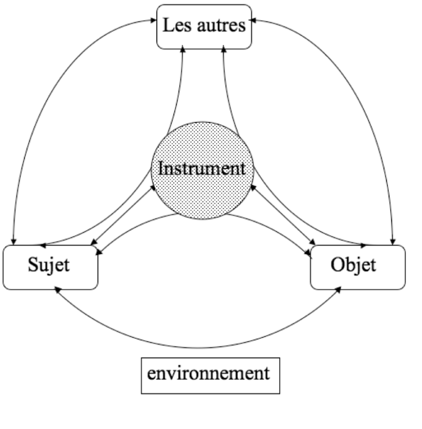


Fig. 5. Modèle SACI d'après Pierre Rabardel

2. — Genèse instrumentale et connaissance-en-action

2.1 *Instrumentation et instrumentalisation*

L'invention d'un instrument à partir d'un autre et la mise en connexion des instruments entre eux sont deux processus que nous pouvons explorer dans l'histoire des mathématiques. Nous les analyserons en reprenant les notions d'instrumentation et d'instrumentalisation proposées par Rabardel qui concernent la production de nouveaux artefacts et de nouveaux schèmes. Il écrit : « un processus de genèse et d'élaboration instrumentale, porté par le sujet et qui, parce qu'il concerne les deux pôles de l'entité instrumentale, l'artefact et les schèmes d'utilisation, a lui aussi deux dimensions, deux orientations à la fois distinguables et souvent conjointes : l'instrumentalisation dirigée vers l'artefact et l'instrumentation relative au sujet lui-même » (Rabardel 1995, p. 109). Il caractérise le premier processus comme « un processus d'enrichissement des propriétés de l'artefact par le sujet » (Rabardel 1995, p. 114) ou encore comme une transformation de l'artefact par le sujet.

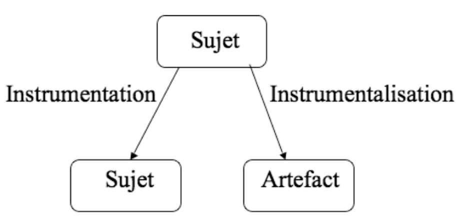


Fig. 6. La genèse instrumentale d'après Rabardel

Tandis qu'il caractérise le processus d'instrumentation en constatant que « la découverte progressive des propriétés (intrinsèques) de l'artefact par les sujets s'accompagne de l'accommodation de leurs schèmes, mais aussi de changements de signification de l'instrument résultant de l'association de l'artefact à de nouveaux schèmes » (Rabardel 1995, p. 116). Le schéma de la figure 6 indique que les deux processus sont effectivement « portés par le sujet » et orientés vers le sujet ou l'artefact, « dans un même processus de genèse et d'élaboration instrumentale ».

Dans les écrits didactiques de Luc Trouche, la place du sujet n'est pas la même et le processus d'instrumentalisation va de l'artefact vers le sujet (fig. 7). Pourtant Rabardel précise : « ces deux types de processus sont le fait du sujet. L'instrumentalisation par attribution d'une fonction à l'artefact, résulte de son activité, tout comme l'accommodation de ses schèmes. Ce qui les distingue c'est l'orientation de cette activité. Dans le processus d'instrumentation, elle est tournée vers le sujet lui-même, alors que dans le processus corrélatif d'instrumentalisation, elle est orientée vers la composante artefact de l'instrument » (Rabardel 1995, p. 111-112).

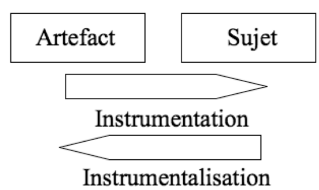


Fig. 7. La genèse instrumentale d'après Trouche

Luc Trouche écrit : « Rabardel distingue, dans la genèse d'un instrument, deux processus croisés, *l'instrumentation* et *l'instrumentalisation* : l'instrumentalisation est relative à la *personnalisation* de l'artefact par le sujet, l'instrumentation est relative à l'émergence des schèmes chez le sujet (c'est-à-dire à la façon avec laquelle l'artefact va contribuer à *préstructurer* l'action du sujet, pour réaliser la tâche en question) » (Trouche 2015, p. 267). Les italiques sont utilisées par l'auteur, mais celui-ci n'indique pas de pagination en référence à l'ouvrage de Rabardel. Les conceptions d'un sujet qui « personnalise » l'artefact, tandis que l'artefact « préstructure » l'action du sujet, doivent être rapprochées du projet de Trouche, à savoir « de guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement mathématique ». En effet, qu'il s'agisse de calculateur ou d'ordinateur, le sujet ne peut prétendre modifier ce que nous pouvons appeler « machines », plutôt qu'artefacts. Tandis que les exemples nombreux donnés par Rabardel, y compris dans le cadre de formation de sujets, concernent effectivement les modifications des artefacts et des schèmes.

2.2 *De l'outil à l'instrument*

L'analyse de processus historiques de modifications d'artefacts permet d'approfondir la notion d'instrument comme connaissance-en-action. En effet, il n'y a pas dans l'histoire de simultanéité de tous les instruments mais passage de l'un à l'autre, avec parfois des crises ou des ruptures. En reprenant ce qu'écrit Simondon à propos de la technique, nous dirons que l'éducation mathématique ne doit pas « manquer ces dynamismes humains », « il faut avoir saisi l'historicité du devenir instrumental à travers l'historicité du devenir du sujet » (Simondon 1969, p. 107-109).

Nous possédons peu de témoignages ou de traces des premiers instruments de la géométrie. De ce point de vue, l'ouvrage *Géométrie* de Gerbert d'Aurillac, datant de l'an 1000, joue un rôle de remplaçant. L'auteur a été pape en Avignon, il a voyagé en Espagne et il a ainsi pu connaître les sciences mathématiques arabes. Il explique dans son ouvrage comment mesurer la largeur d'une rivière avec un bâton, il s'agit donc encore ici d'un « problème de distance inaccessible ». Les gestes à effectuer sont les suivants : Gerbert plante son bâton sur le bord de la rivière, il s'éloigne du bord jusqu'à ce que son œil, l'extrémité du bâton et l'autre bord de la rivière soient alignés. Comme précédemment, nous réalisons un schéma qui représente la situation, puis une *mise en figure* lettrée qui permet de formuler le schème opérant à condition d'adopter une échelle de proportion (fig. 8). La configuration est constituée de deux triangles emboîtés pour lesquels le rapport des côtés *BD* à *CD* est égal au rapport de *BP* à *OP*, on a la proportion *BD* / *CD* = *BP* / *OP*. Ce schème permet d'obtenir la distance *BP*, qui est la somme de *BD* et de *DP*, à l'issue d'un calcul sur les grandeurs.

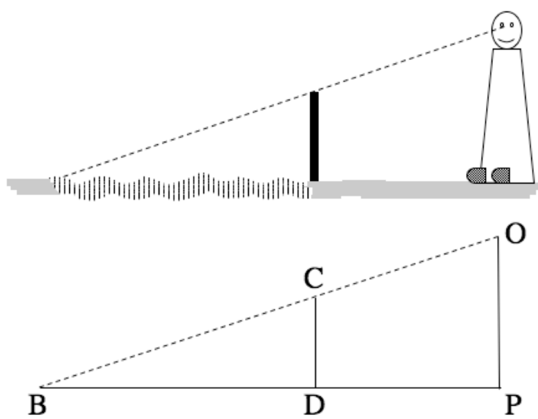


Fig. 8. La largeur de la rivière par Gerbert

Ce schème intervient aussi dans le fonctionnement de la « lychnia » (lanterne), présentée au IIe siècle dans les *Cestes* de Jules l'Africain. Il s'agit d'une accommodation pratique du bâton, plutôt que d'une genèse instrumentale : elle comporte un bâton muni à son sommet d'un autre bâton qui peut tourner et qui permet ainsi d'effectuer des visées plus aisées (fig. 9). Dans le traité *Sur la Dioptre*, datant du Ier siècle, Héron d'Alexandrie présente un dioptre assez semblable à la lychnia et il lui associe un autre

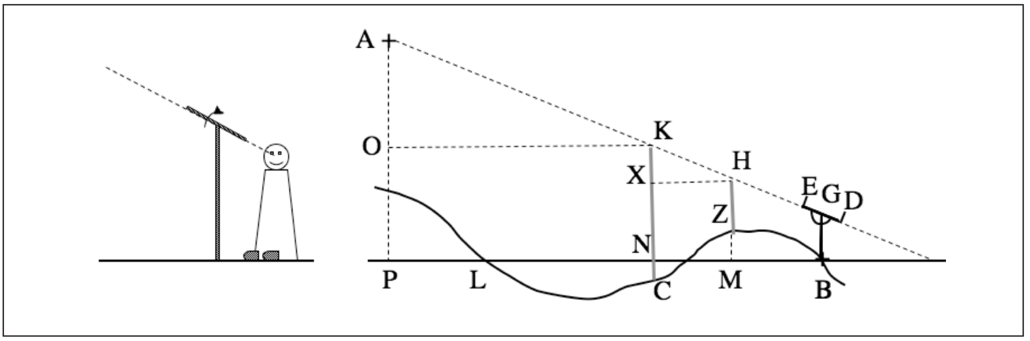


Fig. 9. La lychnia de Jules l'Africain et la dioptre d'Héron d'Alexandrie

outil : un poteau muni d'un disque, qui peut coulisser le long du poteau. Il résout de nombreux problèmes de distances inaccessibles (Barbin 2017) : mesurer des différences de niveaux, joindre deux lieux qui ne sont pas visibles l'un pour l'autre, creuser un tunnel connaissant ses extrémités, mesurer l'aire d'un champ en restant à l'extérieur du champ, etc. L'adjonction de poteaux constitue une instrumentalisation, elle ne modifie pas le schème primitif des triangles emboîtés. Mais la complexité des problèmes s'accompagne de celle des figures, et les raisonnements demandent « d'imaginer » de nombreuses droites qui ne représentent pas d'objets tangibles (fig. 10).

Gerbert écrit que « un géomètre doit toujours avoir un bâton avec lui », mais la possession de cet outil ne suffit pas pour obtenir la solution. Il faut de plus un raisonnement extérieur à l'outil, qui est singulier pour chacune des utilisations de l'outil. Examinons de ce point de vue un autre instrument de Gerbert. Il est composé de deux bâtons, solidaires et perpendicu-

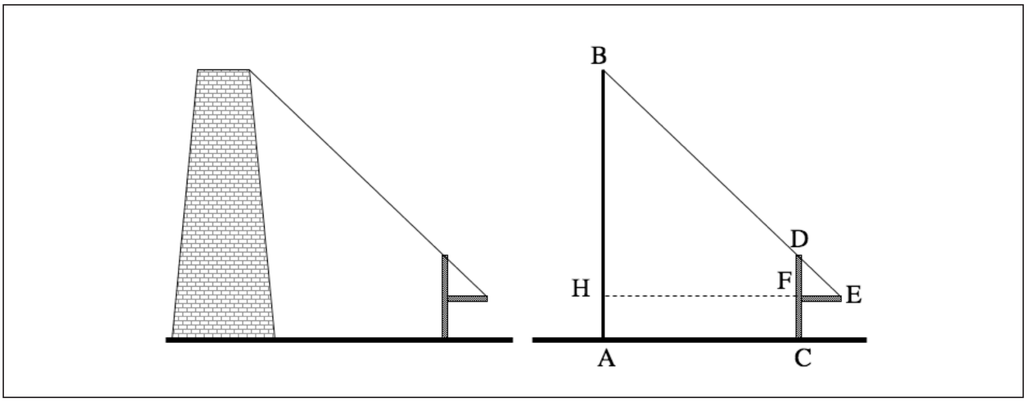


Fig. 10. L'instrument de Gerbert

laires, dont les trois parties ainsi déterminées sont égales (fig. 10). Pour mesurer la hauteur d'un édifice, Gerbert aligne l'extrémité du bâton horizontal, le haut du bâton vertical et le haut de l'édifice. Le schème précédent permet d'obtenir l'égalité de *BH* et *HE*, et donc *AB* est égal à la somme de *HE* et *FC*. La distance *HE* est accessible par arpentage et si *FC* est égal à 1 (par exemple), alors *AB* égale *HE* + 1. Notons que, pour obtenir la solution, il faut adjoindre à la figure une droite HE, qui est le témoin de la ruse et de la connaissance du géomètre. Cette droite ne représente aucun élément tangible, elle est « imaginative ».

Nous dirons que nous avons affaire ici à un instrument, parce que Gerbert incorpore dans la conception de son instrument une connaissance du géomètre : l'instrument est instruit. Le mot *instrument* vient du mot latin *instrumentum*, qui signifie *matériel*, *outillage* ou *ressource* et qui dérive du verbe *instruere*. Ce verbe, francisé en *enstruire*, donne *disposer*, *outiller* et *équiper*. Ainsi, les mots *instrument* et *instruire* renvoient l'un à l'autre (Barbin 2004 , p. 7-12).

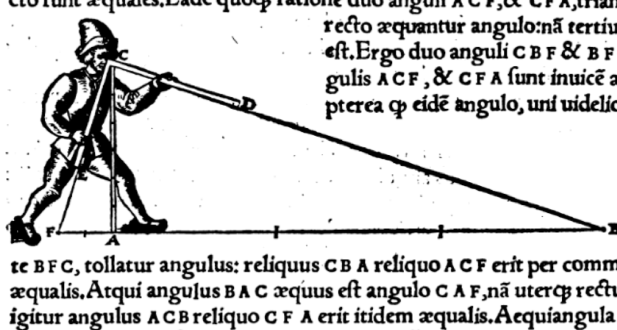
Le passage du bâton à l'instrument peut être compris comme un processus d'instrumentation, car l'instrument incorpore le schème dans sa conception. Celui qui l'utilisera tiendra en main une connaissance-en-action.

2.3 *Connexions entre instruments et connaissances*

Dans sa *Protomathesis* de 1532, Oronce Fine présente un instrument que nous appelons aujourd'hui « équerre articulée ». Il est géomètre, astronome et cartographe, il a enseigné les mathématiques au Collège Royal de Paris et il publiera en 1556 un ouvrage de géométrie intitulé *De re & Praxi geometrica*. Depuis le XIII^e siècle, les *Éléments* d'Euclide sont connus en Occident par une traduction latine d'une traduction arabe et ils sont imprimés en 1482. Fine cite le texte euclidien lorsqu'il présente son équerre articulée (Fine 1532, p. 67).

L'instrument est composé d'un bâton qui sera dressé verticalement et de deux bâtons perpendiculaires l'un à l'autre (les alidades) fixés au sommet du bâton et qui peuvent tourner autour. Pour mesurer, par exemple, la largeur d'une rivière, il faut poser l'instrument au bord de la rivière et viser à l'aide d'une alidade l'autre bord de la rivière, puis viser à l'aide de la seconde alidade un point qui se trouve de notre côté de la rivière, mais en terre ferme (fig. 11). La distance entre ce point et la base du bâton est connue, ainsi que la hauteur du bâton. Ceci suffit à connaître la largeur de la rivière.

Trianguli enim B C F, tres anguli binis rectis sunt æquales, per 32. primi elemẽ
torũ Euclidis: sed B C F angulus rectus est, igitur reliqui duo C B F & B F C uni re-
cto sunt æquales. Eadẽ quoq; ratione duo anguli A C F, & C F A, trianguli A C F, uni
recto æquantur angulo: nã tertius C A F rectus
est. Ergo duo anguli C B F & B F C, duobus an-
gulis A C F, & C F A sunt inuicẽ æquales: pro-
pterea ꝙ eidẽ angulo, uni uidelicet recto coæ-
quantur. At
si ab eisdẽ æ-
qualibus an-
gulis, idẽ cõ-
munis, utpo-



te B F C, tollatur angulus: reliquus C B A reliquo A C F erit per communẽ sententiã
æqualis. Atqui angulus B A C æquus est angulo C A F, nã uterq; rectus: & reliquus
igitur angulus A C B reliquo C F A erit itidem æqualis. Aequiangula igitur sunt bi
na triangula A B C, & A C F, quare et quæ circũ æquales angulos latera ꝓportiona-
lia: per 4 sexti elemẽtorũ eiusdẽ Euclidis. Ergo sicut A C baculus, ad lineunculã A F:
ita se habet A B ꝓposita lõgitudo, ad erectũ baculũ A C. qđ oportuit demonstrasse.

Illustration. Extrait de la *Protomathesis* d'Oronce Fine

En effet, si nous représentons sur une figure les droites intervenant dans la situation, nous pouvons en extraire un triangle rectangle *ABC* et sa hauteur *AH* (fig. 12).

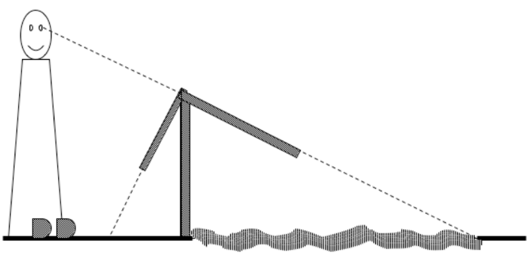


Fig. 11. La largeur d'une rivière avec l'équerre articulée

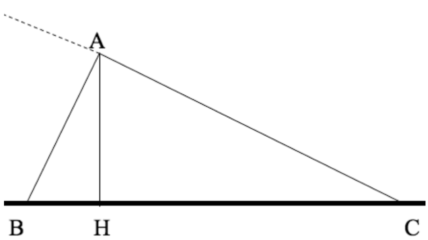


Fig. 12 . Le théorème de la hauteur d'un triangle rectangle

Cette configuration permet de formuler un nouveau schème, qui correspond à l'un des théorèmes appartenant à la figure. En effet, « le théorème de la hauteur du triangle rectangle » affirme que, dans un triangle rectangle avec l'angle droit en A et AH la hauteur, on a $BH / AH = AH / HC$ ou encore, le carré de la hauteur AH égale le produit des segments déterminés sur la base, $AH^2 = BH \times HC$. Par conséquent, HC s'obtient à partir de BH et AH, qui nous sont connus, et si $AH = 1$ alors $HC = 1 : BH$. Ce théorème est la proposition 8 du Livre VI d'Euclide (Euclide 1994, p. 176-179), il est déduit de la similarité des triangles ABH et CAH, car deux triangles semblables (qui ont leurs angles égaux) ont leurs côtés proportionnels. L'équerre articulée est une connaissance-en-action, celle du théorème de la hauteur du triangle rectangle. Sa genèse correspond à la fois à un processus d'instrumentation, car le schème correspond à une forme plus complexe que celle des triangles emboîtés, et à un processus d'instrumentalisation puisque l'usage de l'instrument est amélioré. Le nouveau schème est une connaissance géométrique qui pourra intervenir dans d'autres instruments. Rabardel écrit à ce propos que « L'instrument est un moyen de capitalisation de l'expérience accumulée (cristallisée disent même certains auteurs). En ce sens, tout instrument est connaissance » (Rabardel 1995, p. 73).

Nous trouvons dans l'histoire de la géométrie, qu'on appelle pratique et que nous préférons nommer instrumentale, de nombreux instruments de visée pour trouver des distances inaccessibles (Bénard, 2014). Ils forment un monde d'individus liés les uns aux autres, dont l'exploration est bien préférable pour l'enseignement, à l'utilisation d'un seul d'entre eux. En effet, la dynamique instrumentale peut introduire un ordre des connaissances qui constituera un apprentissage dynamique de la déduction mathématique. Nous reprenons en ce sens ce que Simondon formule pour la réalisation technique : elle « donne la connaissance scientifique qui lui sert de principe de fonctionnement sous une forme d'intuition dynamique appréhensible par un enfant même jeune, et susceptible d'être de mieux en mieux élucidée, doublée par une compréhension discursive » (Simondon 1969 , p. 109).

3. — Dynamique instrumentale et constructions de connaissances

Depuis la géométrie grecque, la règle et le compas sont les outils de construction des figures par excellence. Cependant, en conformité avec l'héritage aristotélicien qui sépare la poïétique de la théorétique, Euclide ne mentionne pas ces outils, ni aucun autre, mais son ouvrage contient de nombreuses constructions de figures qui sont obtenues par intersections de droites et cercles, au point qu'il peut être lu comme un ouvrage de constructions tout autant que de théorèmes (Knorr 1986). Les *Éléments* répondent aux préceptes aristotéliciens d'une science démonstrative, c'est-à-dire dans laquelle chaque proposition est déduite soit d'un axiome (demande ou notion commune), soit de propositions précédemment démontrées. Les premières demandes sont « de mener une ligne droite de tout point à tout point » et « de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle » (Euclide 1994, p. 167-169). Les historiens ont discuté sur le rôle existentiel de ces demandes, mais, de toute façon, mener une droite et décrire un cercle sont deux opérations de base pour effectuer une construction concrète à l'aide d'outils de figures sur lesquelles le géomètre spécule et raisonne. Il apparaît dès lors difficile de bannir la considération de tout outillage dans l'interprétation des *Éléments*.

Il y a deux sortes de propositions dans les *Éléments*, les constructions (ce que les Anciens appellent les problèmes) et les théorèmes. L'intrication entre les deux sortes de propositions est forte et déterminée puisqu'un théorème sur une figure ne peut pas être démontré sans que celle-ci et les lignes nécessaires à la démonstration soient construites à la règle et au compas. Il est nécessaire aussi que toute construction soit justifiée par des théorèmes démontrés précédemment. Quelle conception prévaut à cette nécessité ? Nous pouvons lire une réponse dans le dialogue du *Ménon* de Platon qui permet de lier l'édification de la géométrie grecque à un échec, à une impossibilité de dire qui est compensée par une possibilité de montrer par une construction et par des gestes.

Dans ce célèbre dialogue, Socrate expose à Ménon la théorie de la réminiscence et il fait venir un esclave pour montrer que, par de simples questions, il va conduire l'esclave à se ressouvenir. Il présente à l'esclave un carré de côté deux et donc d'aire quatre, puis il lui demande s'il est possible de construire un carré d'aire double. Il continue en demandant quel serait le côté d'un carré d'aire huit : « essaie de me dire quelle serait la longueur de chaque ligne dans ce nouvel espace ». L'esclave essaie donc de dire : il dit d'abord quatre, puis trois. Les deux tentatives échouent. Socrate modifie alors sa demande : « taches de me le dire exactement, et si tu aimes mieux ne pas faire de calculs, montre la nous ». Il ne s'agit plus de *dire* un nombre mais de *montrer* une figure. Socrate construit étape par étape la figure, qui permet de montrer la droite demandée. Il accole quatre carrés égaux au carré de départ, puis trace dans chacun une diagonale (fig. 13). Les quatre diagonales délimitent le carré cherché. Ainsi ce qui n'est pas dit exactement est construit exactement à la règle et au compas. Socrate déplace l'objet de l'exactitude, du nombre à la figure.

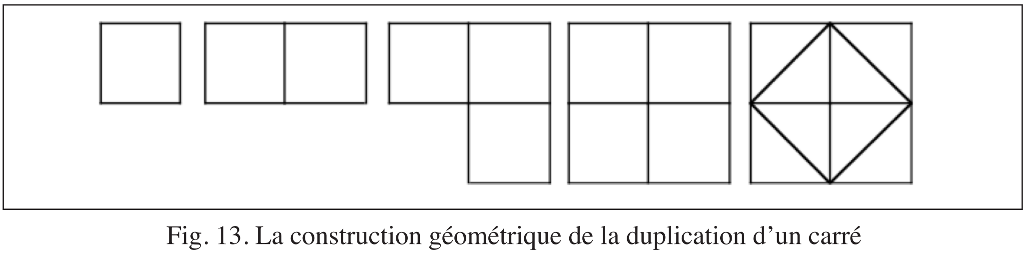


Fig. 13. La construction géométrique de la duplication d'un carré

3.1 *Les compas*

La seconde demande d'Euclide, de décrire un cercle, peut être satisfaite avec une corde ou avec un « compas à balustre » (avec un crayon et une pointe). Mais un compas peut servir aussi à reporter des longueurs de segments. Dans ce cas, un « compas à pointes sèches » (sans crayon) est suffisant. L'opération de report est nécessaire en géométrie, elle intervient dès les premiers théorèmes sur les triangles. Ainsi, dans la proposition 2 du Livre I, Euclide demande de placer en un point donné *A*, un segment égal à un segment donné *BC* (Euclide 1994, p. 197). Il donne les étapes de la construction : il faut joindre *A* et *B*, construire un triangle équilatéral *DAB* sur *AB* (la construction est donnée dans la proposition 1), prolonger *DA* et *DB*, puis construire un cercle de centre *B* et de rayon *BC* et un cercle de centre *D* et de rayon *DG* (avec *G* intersection du cercle précédent avec le prolongement de *DB*) (fig. 15). Euclide démontre que l'intersection *L* de ce dernier cercle avec le prolongement de *DA* répond au problème car *AL* est égal à *CB*.

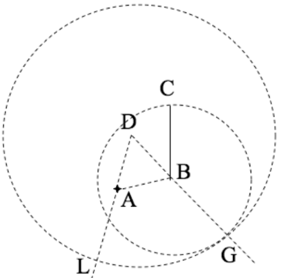


Fig. 14. Le report géométrique d'un segment

Le compas à balustre et le compas à pointes sèches sont deux outils ressemblants d'un point de vue matériel, mais leurs fonctions sont différentes, et la théorie montre comment l'une peut se ramener rationnellement à l'autre. Nous allons examiner deux autres compas que nous qualifions d'instruments, car chacun est une connaissance-en-action. Ils sont également ressemblants l'un à l'autre d'un point de vue matériel et d'un usage très ancien chez les artisans. On les retrouve décrits jusqu'à récemment, dans *Le dictionnaire pratique de Menuiserie, Ébénisterie, Charpente* de Justin Storck, édité au début du XX^{e} siècle.

Le « compas d'épaisseur », joliment appelé « maître à danser » à cause de sa forme suggestive, est composé de deux tiges égales, croisées et articulées autour de leur milieu. Il permet de mesurer le diamètre extérieur d'un cylindre ou d'un flacon en y introduisant la partie inférieure de l'instrument, les pieds du « maître à danser » (fig. 15).

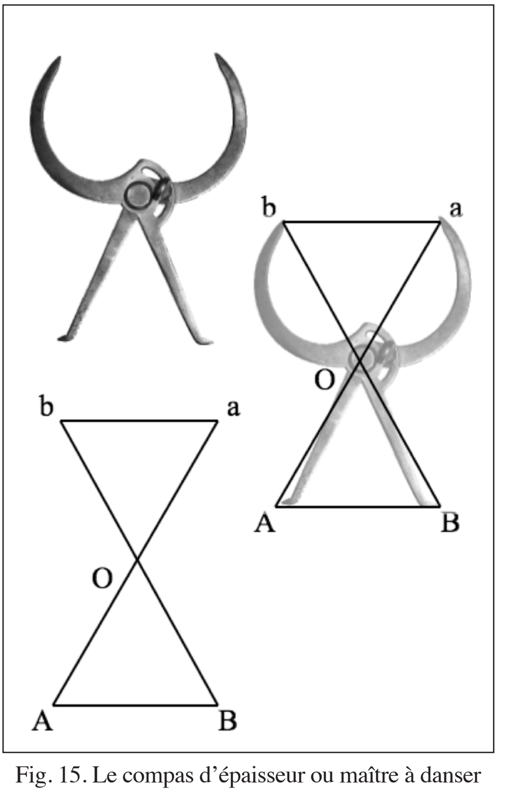


Fig. 15. Le compas d'épaisseur ou maître à danser

Le problème est encore de trouver une longueur inaccessible à une mesure exacte. Puisque les segments *OA*, *Oa*, *OB* et *Ob* sont égaux, et que les angles au sommet *O* sont égaux, les deux triangles *OAB* et *Oab* sont égaux (superposables) donc en mesurant *AB*, nous obtenons *ab*. La connaissance en action présente dans la conception et le fonctionnement de l'instrument correspond à la proposition IV du Livre I des *Éléments* d'Euclide (premier cas d'égalité de deux triangles).

Le « compas de réduction » est composé de deux tiges égales, croisées et articulées autour de leur intersection. La place de cette intersection est modifiable grâce à des fentes placées sur les deux tiges et une fixation (fig. 16). Ce compas permet d'obtenir une figure réduite d'une figure donnée, mais tout aussi bien agrandie. En effet, supposons par exemple que l'on veuille réduire une figure au tiers, il suffit de placer l'intersection *O* de telle sorte que *aO* et *bO* soient le tiers de *OA* et *OB*. Pour réduire au tiers un segment quelconque, il faut placer *A* et *B* à ses extrémités, alors *a* et *b* sont les extrémités du segment réduit. La conception et le fonctionnement du compas de réduction manifestent une connaissance-en-action, énoncée un peu plus haut. En effet, les triangles *Oab* et *OAB* sont semblables, donc leurs côtés sont proportionnels, par conséquent *ab* est le tiers de *AB*.

3.2 *Échec instrumental et construction de connaissances*

Nous allons examiner deux problèmes qui illustrent l'expression de Simondon, « quand les techniques échouent la science est proche » (Simondon 1969, p. 246), et qui fournissent d'autres exemples d'inventions d'instruments et de schèmes. Ils font partie des fameux problèmes à la règle et au compas que les géomètres grecs ne sont pas parvenus à résoudre, ce sont la duplication d'un cube et la trisection d'un angle.

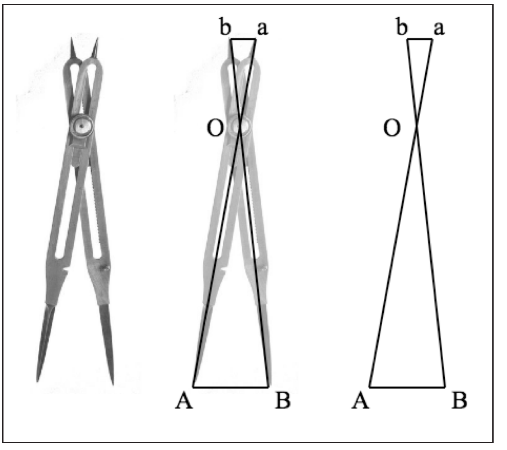


Fig. 16. Le compas de réduction.

Dès la science grecque et durant des siècles, ils vont connaître de très nombreuses solutions instrumentales et géométriques (Barbin 2014, p. 87-146). Nous avons choisi de présenter des solutions anciennes ou élémentaires.

Le problème de la duplication du cube consiste à construire le côté d'un cube ayant un volume qui est double d'un cube donné. Il peut être considéré comme une suite du problème de la duplication d'un carré, dont la solution est obtenue à la règle et au compas grâce à la figure du *Ménon*. Selon Proclus, pour parvenir à la solution pour le cube, le mathématicien grec du v^e^ siècle avant J.-C. Hippocrate de Chios ramène le problème à un autre problème, celui de construire deux segments qui soient moyennes proportionnelles entre un segment et son double, ou plus largement entre deux segments quelconques. En écriture symbolique, nous cherchons à construire deux segments x et y tels que $a/x = x/y = y/b$. Les *Commentaires d'Eutocius d'Ascalon sur le traité de la sphère et du cylindre* d'Archimède (v^e^ siècle) indiquent différentes solutions de géomètres grecs, des instruments mais aussi des constructions à l'aide des coniques, qui auraient été inventées à cet effet par Ménechme (IV^e siècle avant J.-C.) (Archimède 1969, p. 551-718).

Nous allons nous intéresser à l'instrument attribué à Platon en commençant par examiner si effectivement, comme l'écrit Ératosthène, pour Hippocrate « l'embarras fut changé en un autre et non moindre embarras ». En effet, le problème proposé par Hippocrate est une suite de la construction d'une moyenne proportionnelle entre deux segments, qui s'effectue à la règle et au compas. Étant donnés deux segments BH et HC mis bout à bout, il suffit de construire à la règle et au compas le milieu de BC, le demi-cercle de diamètre BC et la hauteur en H à BC. Si A est l'intersection du demi-cercle et de la hauteur alors AH est la solution au problème (fig. 17 gauche). En effet, ceci résulte du théorème de la hauteur d'un triangle rectangle car le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle, donc il est rectangle. Cette solution indique que l'équerre est aussi un outil commode pour construire la moyenne proportionnelle à deux segments (fig. 17 droite) : il suffit de placer le coin de l'équerre sur une perpendiculaire (construite avec l'équerre) en H à BC. L'équerre est un outil qui permet de mettre en action le théorème du triangle rectangle.

Notons que la construction de la moyenne proportionnelle AH entre deux segments BH et HC est aussi celle du côté d'un carré de même aire que le rectangle de côtés BH et HC. Le théorème du triangle rectangle fournit donc la solution au problème de la quadrature d'un rectangle. Ce problème est une étape essentielle dans la quadrature d'un polygone établie par Euclide, il est donc légitime de rattacher le théorème du triangle rectangle et son invention à un problème de construction.

L'instrument de Platon pour construire deux moyennes proportionnelles consiste en trois barres fixes, $H\theta$, HZ et $M\theta$. Les deux dernières barres sont munies de rainures, de sorte qu'une quatrième barre $K\lambda$ coulisse parallèlement à $H\theta$ (fig. 18 gauche). Pour construire deux moyennes proportionnelles à deux segments AB et BC, on les dispose perpendiculairement l'un à l'autre (avec une équerre) et on les prolonge (avec une règle) (fig.18 centre). Posons l'instrument de sorte que H soit sur le prolongement de AB et que $H\theta$ passe par C, puis faisons coulisser $K\theta$ de sorte qu'elle passe par A (fig. 18 droite). Alors nous avons :

$$BA / BK = BK / BH = BH / BC.$$

En effet, dans le triangle rectangle AKH nous avons $BA / BK = BK / BH$, et dans le triangle

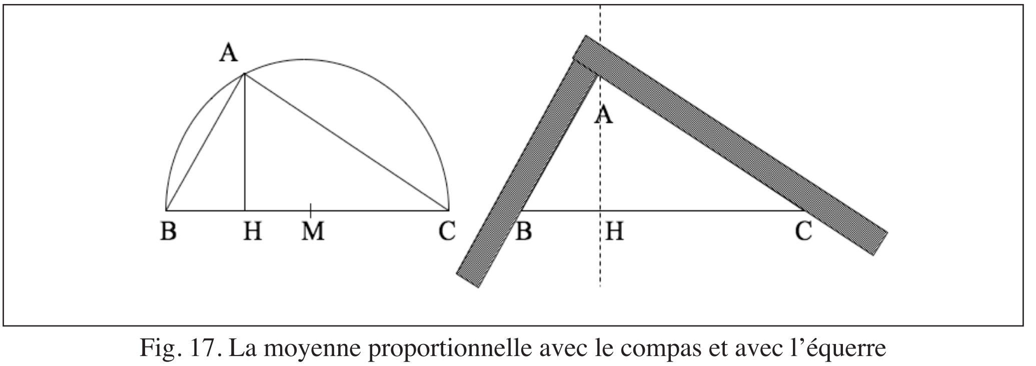


Fig. 17. La moyenne proportionnelle avec le compas et avec l'équerre

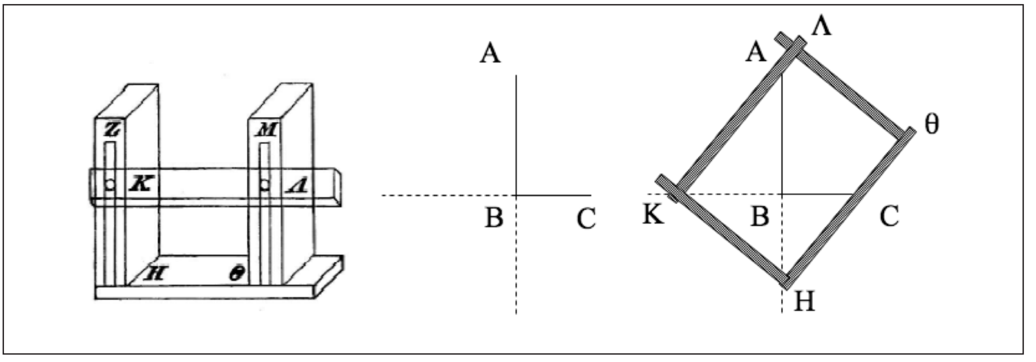


Fig. 18. L'instrument de Platon et son fonctionnement

rectangle *KHC* nous avons *BK* / *BH* = *BH* / *BC*. L'instrument de Platon est le résultat d'un processus d'instrumentalisation car il améliore la simple équerre et il s'appuie sur le même schème, celui de la hauteur d'un triangle rectangle.

L'invention de l'instrument résulte d'une nouvelle considération du problème de la moyenne proportionnelle, il faut s'emparer du schème qui a réussi pour le compas tout en prenant en compte l'échec du compas au-delà. Nous pouvons alors regarder l'instrument de Platon comme deux équerres coordonnées qui permettent d'aller au-delà de la simple équerre. En effet, ce redoublement répond au redoublement de la moyenne proportionnelle nécessaire pour résoudre la duplication du cube. Le passage par les instruments constitue ainsi encore une entrée dynamique dans le raisonnement déductif. L'embarras dans lequel serait tombé Hippocrate est donc profitable, comme cela est souvent le cas en mathématiques. Auprès de Ménon, Socrate soutenait l'intérêt de l'embarras de l'esclave pour l'enseignement.

Le problème de la construction à la règle et au compas de la trisection de l'angle (en trois angles égaux) est également la suite d'un problème qui est constructible, celui de la bissection d'un angle (en deux angles égaux). Tenant compte de l'expérience précédente, nous examinons le schème qui autorise la réussite dans ce cas. Diviser un angle en *n* parties égales est équivalent à diviser en *n* parties égales l'arc correspondant à cet angle quand il est inscrit au centre d'un cercle. Étant donné un angle de sommet *A*, traçons un arc de cercle de centre *A* qui coupe les côtés de l'angle en *B* et *C*, il faut diviser en deux l'arc *BC*. Pour cela, il suffit de construire le milieu *M* de la corde *BC* en construisant la médiatrice. Traçons à partir de *B* et *C* deux arcs de cercle égaux qui se coupent en *D*, alors *AD* est la médiatrice (fig. 19 gauche). Les deux triangles *AMB* et *AMC* sont égaux car leurs trois côtés sont égaux, donc les angles *BAM* et *CAM* sont égaux. Cette construction ne va pas au-delà de la division en deux parties égales. Si nous divisions en trois parties égales la corde *BC*, ce qui est possible à la règle et au compas alors l'arc *BC* n'est pas divisé en trois parties égales (fig. 19 droite).

Nous allons examiner trois instruments de trisection dont l'invention prend en compte ce qui a produit la réussite pour la bissectrice mais aussi l'échec au-delà. Les deux premiers sont des instruments d'artisans et le troisième est inventé par un mathématicien.

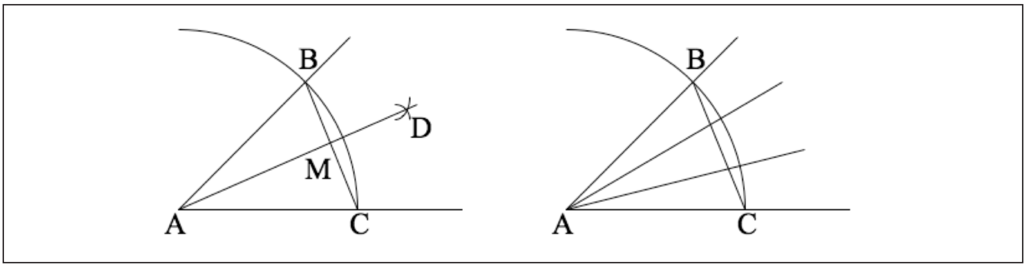


Fig. 19. Division d'un angle et de la corde sous-tendue

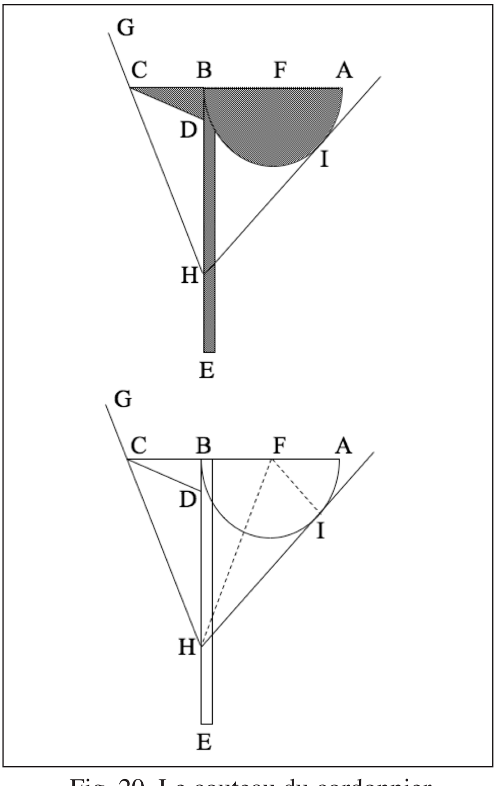


Fig. 20. Le couteau du cordonnier

Le « couteau de cordonnier » est présenté dans la *Géométrie appliquée à l'Industrie à l'usage des artistes et des ouvriers* de Claude Lucien Bergery de 1828. D'après l'auteur, il était utilisé par les ouvriers messins. Le couteau est composé d'une règle *BE*, d'une équerre *BCD* et un demi-cercle de centre *F* et diamètre *AB* tels que *BC* est égal à *BF*. Pour obtenir la trisection d'un angle *GHI*, il suffit de poser le couteau sur l'angle, le demi-cercle étant tangent à l'un des côtés et *C* étant sur l'autre côté. En effet, les angles *GHB*, *BHF* et *FHI* sont égaux et donc valent le tiers de l'angle *GHI* (fig. 20).

Menons *HF* et *FI*, l'angle *FIH* est droit. Les triangles *CBH* et *FBH* sont égaux, donc l'angle *CHB* est égal à l'angle *BHF*. Les triangles *BFH* et *FIH* sont égaux, donc l'angle *BHF* est égal à l'angle *FHI*. L'invention et le fonctionnement du couteau de cordonnier reprennent le schème primitif qui préside à la construction de la bissectrice d'un angle, à savoir l'égalité de deux triangles rectangles. L'invention du couteau contourne l'obstacle en mimant la situation des cordes égales et en introduisant un schème qui prolonge le précédent : celui qui est attaché à la configuration de trois triangles égaux.

« L'équerre du charpentier » est présentée dans un article de Scudder intitulé « How to trisect an angle with a carpenter's square », paru en 1928 dans la revue *American Mathematical Monthly*. L'équerre est posée sur l'angle *BOA*, dont on cherche la trisection, de façon à tracer le long de la partie *GH* de l'équerre une parallèle au côté *OA* de l'angle. Sur l'équerre est mar-

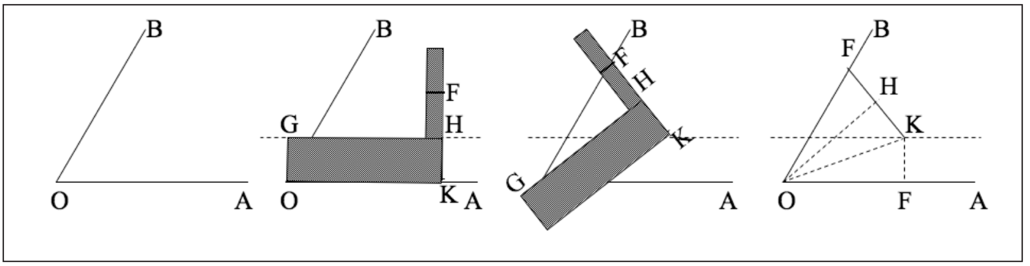


Fig. 21. L'équerre du charpentier

qué un point *F* tel que *FH* est égal à *HK*. L'équerre est ensuite posée sur l'angle de sorte que le coin *K* de l'équerre soit sur la parallèle au point *E*, que le sommet *O* soit sur la partie *GH* de l'équerre et que le point *F* soit sur *OB* (fig. 21). Les points *F*, *K* et *H* sont marqués sur la figure. Traçons *OH*, *OK* et *KF*, la perpendiculaire à *OA* passant par *K*. Les trois angles *FOH*, *HOK* et *KOF* sont égaux car les trois triangles rectangles *FOH*, *HOK* et *KOF* sont égaux. Ainsi, bien que le couteau du cordonnier et l'équerre du charpentier soient deux instruments très dissemblables d'un point de vue matériel, la connaissance-en-action est la même.

Un problème posé par James Watt pour améliorer le fonctionnement des machines à vapeur attire l'intérêt des mathématiciens pour ce qui sera appelé « système articulé », c'est-à-dire un système de tiges articulées les unes aux autres. Tout au long du XIX[e] siècle, ils recherchent des systèmes particuliers pour tracer les courbes ou pour résoudre des problèmes de construction (Barbin 2014, p. 137-139). Dans ce contexte, le mathématicien Charles-Ange Laisant introduit « un compas trisecteur », qui fait l'objet d'un article d'Henri Brocard en 1875 (Brocard 1875 , p. 47-48). L'instrument est composé de deux losanges articulés *OABC* et *BEDC* et d'une tige rigide *OBD* sur laquelle *D* peut glisser. Pour obtenir la trisection d'un angle il suffit de poser l'instrument sur l'angle de sorte que *A* et *E* soient sur ses côtés. Alors les angles *EOB*, *BOC* et *COA* sont égaux et l'angle *AOE* est coupé en trois parties égales. En effet, les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc *OD* est la médiatrice de *EC* et les triangles *EOB* et *BOC* sont égaux. La diagonale *OC* divise aussi le losange *OBCA* en deux triangles *BOC* et *COA* égaux.

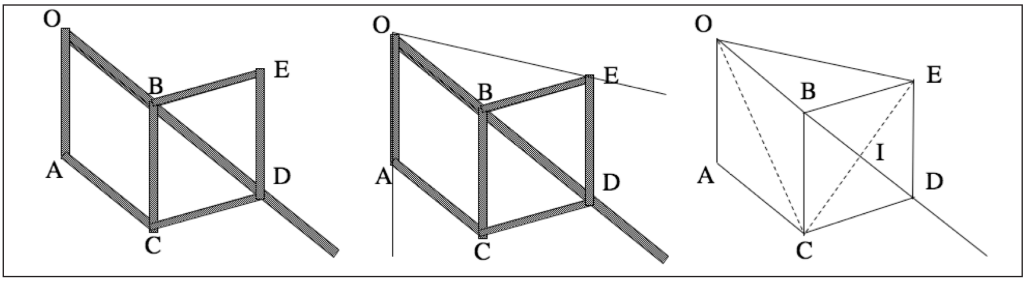


Fig. 22. Le compas trisecteur de Laisant

Les trois instruments de trisections activent des schèmes similaires, mais les deux premiers sont singuliers. En effet, ils ne sont pas susceptibles de résoudre d'autres problèmes, alors que le compas trisecteur appartient à une famille d'instruments qui peuvent se coordonner les uns aux autres et s'enrichir par l'introduction d'autres schèmes. C'est le cas pour l'inverseur de Peaucellier, qui permet de résoudre exactement le problème de Watt. Avec les systèmes articulés s'ouvre la construction de courbes.

4. — Conclusion : approche instrumentale et historique de l'enseignement

Le fonctionnement d'un instrument constitue une connaissance-en-action, susceptible d'être réinvestie et prolongée avec l'emploi de nouveaux instruments ou l'intervention de nouveaux problèmes. De plus, comme nous l'avons souligné à plusieurs endroits, l'invention des instruments offre une entrée dynamique dans la déduction mathématique. En effet, la genèse instrumentale s'accompagne de la construction d'une suite ordonnée de schèmes.

Nous rencontrons dans l'histoire deux dynamiques de la genèse instrumentale : il faut inventer des instruments de plus en plus commodes pour résoudre un même problème, ou bien il faut résoudre des problèmes de plus en plus complexes. Comme l'écrit Séris pour la technique, la genèse instrumentale dépend d'une « aspiration à faire les choses autrement et mieux » (Séris 1994, p. 20-21). Dans l'enseignement, il semble donc nécessaire, d'une part, d'introduire des instruments dont le fonctionnement est accessible et compréhensible aux élèves et, d'autre part, de considérer des familles d'instruments reliés les uns aux autres par des champs de problèmes et/ou des champs de schèmes. Cette conclusion ne concerne pas seulement la géométrie, bien que celle-ci soit l'objet unique de cet article.

Examinons ces deux points dans le contexte de l'enseignement aujourd'hui. Nous avons noté que, plus un instrument est porteur de nombreuses connaissances, plus son usage peut être commode et universel. Mais sa complexité peut alors devenir telle qu'il faille lui intégrer des mécanismes facilitant et régulant son usage. C'est ainsi que le fonctionnement de l'instrument peut devenir en partie ou complètement caché. Nous en avons un exemple avec l'histoire des instruments de calcul, car il est long le processus qui va du boulier à l'ordinateur (Chabert, et ali., 2010). En présence d'un ordinateur, l'élève sait ce qui entre dans la machine et ce qui en sort, mais non ce qui s'y fait : il s'accomplit une opération à laquelle l'élève ne participe pas, même s'il la commande.

Ce qu'écrit Simondon de la situation du travailleur face à une machine peut être repris ici : « commander est encore rester extérieur à ce que l'on commande, lorsque le fait de commander consiste à déclencher selon un montage préétabli, fait pour ce déclenchement, prévu pour opérer ce déclenchement dans le schéma de construction de l'objet technique ». Pour lui, l'aliénation du travailleur, qui résulte de cette extériorité, réside dans la rupture qui se produit entre la genèse et l'existence de l'objet technique : « il faut que la genèse de l'objet technique fasse effectivement partie de son existence, et que la relation de l'homme à l'objet technique comporte cette attention à la genèse continue de l'objet technique » (Simondon 1969, p. 249-250). Cette attention à l'invention ou à la genèse instrumentale est nécessaire dans une approche éducative, si nous voulons voir s'accomplir les effets que nous leur accordons pour la compréhension mathématique des élèves. Elle invite à se tourner vers la genèse historique des instruments, leur invention et leur rôle dans l'histoire des mathématiques. Par ailleurs, cette conception de la genèse instrumentale demande de ne pas se défaire du sujet connaissant, sous peine en effet d'aliénation : « les objets techniques qui produisent le plus d'aliénation sont aussi ceux qui sont destinés à des utilisateurs ignorants » (Simondon 1969, p. 249-250). La réflexion pédagogique doit donc intégrer l'enseignant et l'élève comme sujets connaissants.

L'introduction de familles d'instruments, plutôt que d'instruments hétéroclites et isolés, est indispensable dans le cadre de l'enseignement de la géométrie, et plus largement des mathématiques d'aujourd'hui. En France, comme dans beaucoup de pays, l'enseignement de la géométrie est de plus en plus limité et éparpillé, dans le contexte d'un enseignement des mathématiques lui-même réduit et morcelé. Il ne s'agit plus tant de former les élèves et les étudiants, que de leur inculquer des savoirs et surtout de leur fournir des compétences. Il s'avère que plus ces enseignements sont amoindris de la sorte, plus ils perdent de leur légitimité sociale et de leur intérêt cognitif. L'approche instrumentale devrait permettre de relier des connaissances et non pas favoriser encore un éparpillement de savoirs. Elle devrait placer les élèves en face d'instruments dont le fonctionnement leur soit compréhensible et qui soit, de plus, porteurs de connaissance-en-action.

Références

Archimède (1960). *Les œuvres complètes* (Vol. II). Trad. P. Ver Eecke. Liège : Vaillant-Carmanne.

Aristote (1991). *Métaphysique*. Trad. Tricot, J. Paris : Vrin.

Barbin, Évelyne (1994), L'invention des théorèmes et des instruments. In É. Hébert (Ed.), *Instruments scientifiques à travers l'histoire*. Paris : Ellipses. 7-12.

Barbin, Évelyne (2004). L'outil technique comme théorème en acte. In *Ces instruments qui font la science*. Paris : Sciences et avenir. 26-28.

Barbin, Évelyne (2006). *La révolution mathématique du XVII^{e} siècle*. Paris : Ellipses.

Barbin, Évelyne (éd.) (2014). *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*. Paris : Ellipses.

Barbin, Évelyne (2017). La Dioptre d'Héron d'Alexandrie : investigations pratiques et théoriques. In É. Barbin, D. Bénard & G. Moussard (éd.). *Les mathématiques et le réel : expériences, instruments, investigations*. Rennes : PUR, à paraître.

Bénard, Dominique (2014). Agrandir, réduire, cartographier, mesurer l'inaccessible. In É. Barbin (éd.). *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*. Paris : Ellipses. 27-56.

Brocard, Henri (1875). Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant. *Bulletin de la SMF*, *3*, 47-48.

Cerquetti, Françoise, Rodriguez, Annie, Johan, Patrice (1997). *Les maths ont une histoire activités pour le cycle 3*. Paris : Hachette.

Chabert, Jean-Luc et ali. (2010). *Histoires d'algorithmes*. Paris : Belin.

Chatelon, David, Troudet, Marc (2017). Expériences de géométrie pratique avec graphomètre en classe. In É. Barbin, D. Bénard & G. Moussard (éd.). *Les mathématiques et le réel : expériences, instruments, investigations*. Rennes : PUR, à paraître.

Chevalarias, Nathalie (2017). Instruments et méthodes de dessin : de la géométrie pratique vers l'enseignement secondaire au début du XX^{e} siècle. In É. Barbin, D. Bénard & G. Moussard (éd.). *Les mathématiques et le réel : expériences, instruments, investigations*. Rennes : PUR, à paraître.

Euclide (1994). *Les Éléments* (Vol. 2). Trad. B. Vitrac. Paris : PUF.

Fine, Oronce (1532). *Protomathesis*. Paris: Impensis Gerard Morrhij et Ioannis Petri.

Guichard, Jean-Paul (2016), Angles in secondary school : surveing and navigation ». In É. Barbin, et ali, *Let history into the Mathematics Classroom* , New-York : Springer.

Guyot, Patrick, Métin, Frédéric (2014). Calculer, mesurer et tracer pour se protéger. In É. Barbin (éd.), *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*. Paris : Ellipses. 205-234.

Hébert, Élisabeth (éd.) (1994), *Instruments scientifiques à travers l'histoire*. Paris : Ellipses.

Knorr, Willbur Richard (1986), *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Boston : Birhauser.

Mercier, Jean-Paul (2017), Mesureurs d'angles du XX^e^ au XVI^e^ siècle : recherches en filiation (2017). In É. Barbin, D. Bénard & G. Moussard (éd.). *Les mathématiques et le réel : expériences, instruments, investigations*. Rennes: PUR, à paraître.

Moyon, Marc (2017). *La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales*. Turnhout : Brepols.

Rabardel, Pierre (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Séris, Jean-Pierre (1994), *La technique*. Paris : PUF.

Simondon, Gilbert (1969), *Du mode d'existence des objets techniques*. Paris : Aubier-Montaigne.

Trouche, Luc (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. In *Actes de l'université d'été de Saint-Flour*, 265-276.

ERRATUM

A la suite d'un problème de conversion du ficher LaTeX plusieurs erreurs se sont glissées dans l'article d'Andrea Bréard, du numéro 109 "Euclide en Chine ou comment faire communiquer différentes cultures mathématiques ?" :

— page 13 encadré. - au lieu de "On divise le segment de droite AB en A deux", lire "On divise le segment de droite AB en deux".

— page 13 encadré. - au lieu de "On obtient la démonstration que D la figure", lire "On obtient la démonstration que la figure".

— page 13, premier paragraphe en-dessous de l'encadré. - au lieu de "bisecter l'angle BAC", lire "bisecter l'angle ABC"

— page 14, citation de la proposition I.44, au lieu de "une triangle" lire "un triangle".

— page 16. - au lieu de "Gu Shuchun", lire "Guo, Shuchun".

— page 17, référence à N. Sivin. - au lieu de "Studia Copernicana", lire "Studia Copernicana 6".

— page 17, référence à M. Tian. - au lieu de "Algebra in Qing china", lire "Algebra in Qing China".

— page 18, note 32. - au lieu de "[Gu, Shuchun et al. 1993]", lire " [Guo et al. 1993]".

— page 19, note 33. - au lieu de "[Gu, Shuchun et al. 1993]", lire [Guo et al. 1993]".

— page 22, légende de la figure 4. - au lieu de "[Guo Shuchun et al. 1993]", lire [Guo et al. 1993]".