
LES CONIQUES : UNE SOURCE DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE AU COLLÈGE ET AU LYCÉE

1

Herinaina Elysé RAJAONARIMANANA,
André TOTOHASINA
IREMI MADAGASCAR

TOURNES Dominique
Irem de LA REUNION

Résumé : Cet article relate les résultats des expériences menées dans des classes de Madagascar et de la Réunion. Il propose des activités possibles et faisables pour introduire les coniques dès le début du collège et rapporte l'importance de l'enseignement des coniques pour développer des compétences élèves et pour apporter un changement de l'image (négative) que ces derniers se font en général des mathématiques, de leur enseignement et de ceux qui les enseignent.

I. — Introduction

À Madagascar, le nombre d'élèves qui optent pour la série C, que nous appellerons série scientifique, diminue d'année en année. Le taux moyen de réussite au baccalauréat scientifique est environ de 40%. Environ 8% des candidats au baccalauréat optent pour la série scientifique. Le même constat se voit aussi dans l'examen du brevet d'étude du premier cycle (BEPC) qui sanctionne la fin du collège. En effet, sur deux années consécutives, nous avons conduit une étude de la réussite des élèves et, chaque année, sur 1500 copies d'examen de mathématique, 5.3% ont obtenu des notes supérieures ou égales à 30/60 parmi des notes qui varient de 01.5/60 à 59/60. Afin d'apporter un souffle nouveau au système éducatif malagasy et tracer les voies et moyens qui permettraient

à tous les acteurs de l'éducation d'œuvrer pour une éducation de qualité, une convention sur l'éducation nationale s'est tenue à Antananarivo, en octobre 2014, durant laquelle les participants- dont nous avons fait partie- ont proposé des réponses à la question : *Comment mettre en œuvre une éducation « inclusive, accessible et de qualité pour tous » dans le contexte malgache et mondialisé actuel ?*

Même si les actes de cette convention ne sont pas encore disponibles, nous pensons que la qualité de l'enseignement en général et des mathématiques en particulier doit afficher le même défi que l'Unesco (2011) veut relever : la formation d'enseignants qualifiés capables de mettre en œuvre un enseignement-apprentis-

sage stimulant, de faire en sorte que les élèves en aient une image plus positive qu'ils se sentent capables de réussir, de casser le cloisonnement entre les différents domaines et de pratiquer l'interdisciplinarité.

Il nous apparaît alors urgent de montrer que l'activité mathématique est en fait :

« une activité humaine aux multiples facettes, très loin des stéréotypes qui lui sont attachés dans la culture commune et qu'elle fait rencontrer différents contenus aux élèves : poser des problèmes ou les reformuler pour les rendre accessibles à un travail mathématique, modéliser, explorer, conjecturer, expérimenter, représenter et formuler en développant des langages spécifiques, argumenter et prouver, développer des méthodes, élaborer des concepts et les relier au sein d'espaces structurés, échanger et communiquer » (Unesco, 2011, p.11).

En prenant spécialement la géométrie, domaine dans lequel se situe le sujet de notre recherche, son enseignement aurait au moins deux avantages par rapport au développement de la capacité intellectuelle de l'homme selon Bkouche (1997, p.54) :

*« – tout d'abord, l'apprentissage de la géométrie construit chez l'enfant l'intelligibilité ou la compréhension du monde sensible, ainsi que celle de l'intuition géométrique ;
– ensuite, la géométrie est riche d'applications ultérieures dans d'autres domaines de la science. »*

Des intérêts que Brousseau (2000, p.2) confirme en disant que :

« La géométrie intervient, par ses objets, par ses énoncés, par ses méthodes, et par les représentations qu'elle propose dans de très nombreuses branches des mathématiques et

des sciences, et quelque fois de façon inattendue. De plus l'enseignement de la géométrie entraîne les élèves au raisonnement mathématique, c'est à dire à un mélange de raisonnement déductif et d'imagination inductive, activé par une manipulation familière des images. De ce fait elle prépare les élèves à aborder d'autres théories mathématiques. »

Comme un enseignement scientifique pour tous sous-entend un enseignement mathématique pour tous, l'enseignement de la géométrie est ainsi un terrain de prédilection pour l'initiation mathématique. Et nous donnerons ci-après des raisons pour lesquelles notre choix s'est porté sur le thème des coniques.

II. — Pourquoi les coniques ?

II.1 *Rappels historiques*

Historiquement, les coniques, comme a dit RINCON (2011), ont toujours fasciné les mathématiciens aussi bien grecs qu'arabes tant pour leurs applications en optique, en astronomie et dans le domaine militaire que pour leur intérêt mathématique propre. Leur étude a fait l'objet de plusieurs traités, entre autres le traité sur les coniques en huit livres d'Apollonius de Perge (262-190 av. J.-C.), et a donné naissance à des machines à construire, dont beaucoup sont relatées dans l'ouvrage *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes* (Barbin, 2014), ou à détruire, à l'instar de la légende des miroirs ardents lors du siège de Syracuse vers l'année 213 av. J.-C. (Walbank, 1970, p.62).

L'apparition des coniques remonterait vers le 5ème siècle avant notre ère. C'est dans l'Académie, une école créée par le philosophe Platon, où l'on trouvait à l'entrée l'inscription « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre », que Menechme, un disciple de Platon, dans ses

recherches sur la section de cône, aurait découvert vers 350 av. J.-C. les courbes coniques comme étant les sections de cône par un plan perpendiculaire à une génératrice.

La section dépendait donc de l'angle au sommet du cône :

- si l'angle au sommet était aigu, les géomètres grecs appelaient la section *oxytome* (ellipse) ;
- si l'angle au sommet était droit, ils appelaient la section *orthotome* (parabole) ;
- si l'angle au sommet était obtus, ils appelaient la section *amblytome* (hyperbole).

Mais ce n'est que plus tard (vers 210 av. J.-C.) qu'Apollonius a défini les coniques comme intersection d'un cône par un plan, sans que celui-ci soit nécessairement perpendiculaire à une génératrice. Apollonius distingue trois cas, selon que le plan sécant :

- coupe deux génératrices (la section est une antobole),
- est parallèle à une génératrice (la section est une parabole),
- est parallèle à deux génératrices et ne passe pas par le sommet (la section est une courbe à deux branches : l'hyperbole).

L'origine des noms des trois courbes coniques revient à Apollonius qui, en utilisant la méthode pythagoricienne de l'application des aires (Euclide, 1819, p.167-173), était arrivé aux propriétés fondamentales des sections coniques exprimées comme des égalités entre aires que nous écrivons actuellement:

- $y^2 = px$ pour la parabole (parabole signifie application, donc idée de comparaison)
- $y^2 = px + p/ax^2$ pour l'hyperbole (hyperbole signifie dépassement, une idée de jeter au-dessus)

- $y^2 = px - p/ax^2$ pour l'antobole (ou ellipse qui signifie défaillant, une idée d'insuffisance).

Dans ces égalités, y désigne l'ordonnée d'un point de la section conique, x son abscisse, p est la mesure d'un segment qu'Apollonius appelait « côté droit » ou « *latus rectum* » et a la longueur du grand axe ou de l'axe transverse.

Les deux grands problèmes que sont la duplication du cube et la trisection de l'angle et dont la résolution nécessitent l'utilisation des sections coniques sont classés dans les *problèmes solides* par les géomètres grecs.

Si après Pappus (4ème après J.C.), les études sur les sections coniques n'ont pas beaucoup avancé chez les Grecs, (Coolidge, 1968, p.26), il n'en est pas de même chez les Arabes. En effet, les frères Banû Mûsâ (Muhammad, ca. 873 ; Ahmed et al-Hassan, 9ème s.) se sont intéressés très tôt à l'étude des sections coniques et ont écrit un traité dont le titre est : *Traité de la figure arrondie et allongée* (Bouzari, 2015, p.43). La version arabe des *Coniques* fut constituée grâce à leurs apports en lemmes et propositions, et la théorie des sections coniques occupa une place centrale dans les mathématiques arabes. Des applications des courbes coniques furent trouvées par Al-Khayyâm (m. 1131), comme la construction de l'enneagone régulier et la théorie géométrique des équations algébriques de degré inférieur ou égal à trois. Par les tracés de coniques, il détermine le nombre des racines réelles et les évalue approximativement. (Bouzari, 2015, p.46).

Au 17ème siècle, un intérêt majeur pour les sections coniques est apparu en Europe. Ceci s'est manifesté par les nombreuses œuvres (Coolidge, 1968, p.32-66) des mathématiciens de cette époque. Si actuellement, nombreux

sont les enseignants qui n'associent les courbes coniques qu'à la forme quadratique des courbes du second degré :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

où A, B, C, D, E, F sont des réels tels que $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Signalons que le traitement algébrique des sections coniques a été développé par René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665) et Leonhard Euler (1707-1783).

II.2. Des raisons du choix

II.2.1. Des défis à relever

Notre choix est dicté par le souci de relever deux défis sur l'enseignement-apprentissage des mathématiques à Madagascar.

Le premier défi à relever est de donner une image plus positive des mathématiques et des mathématiciens à la société. Nous devons montrer que les mathématiques contribuent au développement de l'individu et de la société en prenant part à la résolution des problèmes qui nous préoccupent à l'aide d'outils technologiques appropriés. Pour cela elles doivent s'ouvrir à toutes les disciplines et vaincre le cloisonnement qui existe en leur sein même.

Le second défi est l'évolution des pratiques d'enseignement. Actuellement, l'enseignement dispensé à l'école est peu stimulant d'après les enquêtes et les observations que nous avons faites. Former des enseignants qualifiés, capables de faire face à l'imprévu et d'aider les élèves à créer des liens entre les connaissances dispensées à l'école et ce qu'ils voient dans leur vie quotidienne, est un grand challenge.

Passons brièvement en revue le système de formation initiale et continue, puis le pro-

gramme scolaire de mathématiques à Madagascar.

II.2.1.1. Le système de formation initiale et continue à Madagascar.

À Madagascar, le système éducatif est de type 5-4-3. Le cycle primaire, dénommé EF1 ou Éducation Fondamentale du premier cycle, dure 5 ans ; le cycle collège dénommé EF2 ou Éducation Fondamentale du deuxième cycle, dure 4 ans ; enfin, le cycle lycée dure 3 ans.

Le document de travail de la Banque mondiale dans le secteur éducation rapporte qu'à Madagascar,

« la qualité de l'enseignement en général et l'enseignement secondaire en particulier est médiocre et cette situation s'explique par le manque de matériel didactique, mais aussi et surtout par le manque de qualification des enseignants. En 2004, seuls 20 % des professeurs des collèges et 33 % des professeurs des lycées possèdent les diplômes d'enseignement requis » (Ramanantoanina, 2008, p.xv).

C'est-à-dire au moins le diplôme Bac+2 pour le collège et Bac+3 pour le lycée.

Comme « *Les enseignants sont le maillon clé de toute évolution positive et durable des systèmes éducatifs* » (UNESCO, 2011, p.27), qu'en est-il de leur formation initiale et continue à Madagascar ?

Le système de formation initiale à Madagascar est assuré par deux établissements : l'INFP¹ et les ENS². L'INFP a la charge de la formation initiale des enseignants du primaire, des professeurs de collège et des conseillers pédagogiques de l'enseignement primaire. Les ENS, au nombre de quatre, ont la charge de former

1 Institut National de Formation Pédagogique.

2 Ecole Normale Supérieure

les enseignants des lycées (trois ENS), et l'école normale supérieure de l'enseignement technique (ENSET) d'Antsiranana forme les enseignants des lycées techniques et professionnels.

La formation continue dans le domaine primaire et collège est aussi une attribution de l'INFP. Les recrutements pour la formation à l'INFP et ses centres régionaux (CRINFP) se font sur concours parmi les bacheliers. Les formations continues sont programmées durant les pauses scolaires des enseignants. Ce sont soit des formations in situ où les formateurs rejoignent les établissements pour observer et conseiller les enseignants, soit des séances de formation mutuelle entre les enseignants pour échanger et trouver ensemble des solutions aux éventuels problèmes rencontrés dans l'enseignement/ apprentissage. L'INFP projette la diffusion de documents d'autoformation pour que les enseignants puissent réactualiser leurs connaissances académiques.

Les étudiants formés dans les ENS et ENSET sont recrutés par voie de concours après le Bac et suivent des formations pendant 5 ans, mais avec le système LMD mis en place au sein des universités de Madagascar, ils peuvent enseigner directement après la licence ou continuer jusqu'au master. Actuellement, la formation continue des enseignants des lycées n'est pas encore bien structurée, les réunions entre les professeurs d'une même discipline se font au sein de leur établissement et sont axées généralement sur la répartition semestrielle du programme de chaque niveau (seconde, première, terminale).

En tant qu'enseignant dans des lycées, formateur d'enseignants de mathématiques des collèges et de conseillers pédagogiques du primaire à l'INFP depuis de nombreuses années, il nous paraît intéressant de faire état des représentations que les enseignants de mathéma-

tiques ont de leur métier. Notre vécu en côtoyant les enseignants des collèges et des lycées nous permet de décrire une des réponses à cette question : c'est un travail comme tout autre. En début de carrière, il y a un gros travail de préparation qui s'inspire, en grande partie, des cours de professeurs chevronnés ou encore de leurs propres cours quand ils étaient collégiens ou lycéens. Ensuite, cela devient généralement de la routine : on reprend les cours et les exercices des années précédentes.

L'enseignement des mathématiques est alors une éternelle répétition, et pour le professeur et pour les élèves : des leçons à apprendre par cœur, des méthodes à appliquer sur des exercices stéréotypés, des démarches à reproduire en classe et à l'examen. Des pratiques pédagogiques du style transmissif durant lesquelles les élèves ne font généralement qu'accepter ce que le professeur dicte et donne. Des professeurs qui ne tiennent pas, ou ne veulent pas tenir compte des représentations que leurs élèves ont des savoirs qu'ils veulent faire acquérir. Ne nous étonnons pas alors si les élèves ne sont pas motivés, car ils ne se sentent pas partie prenante dans la construction de leur savoir. Cette attitude a des effets néfastes sur leur niveau en mathématiques. Pour les professeurs, la faute revient toujours aux élèves en disant que ces derniers n'apprennent pas leurs leçons, ne font pas les exercices qu'on leur propose et n'ont aucun raisonnement logique.

Par ce constat, ces professeurs avouent, sans doute inconsciemment, leur propre échec dans l'acte d'enseigner.

En effet, un des objectifs de l'éducation mathématique n'est-il pas de permettre aux élèves d'exercer à leur niveau les moyens de la pensée mathématique que sont l'abstraction, la généralisation, *le raisonnement logique* et la preuve, la symbolisation mathématique, et d'en comprendre la puissance ? (UNESCO, 2011, p.16).

II.2.1.2. *Le programme scolaire de mathématiques à Madagascar*

En mathématiques, le programme en vigueur est celui de 1996 dont le contenu est calqué en grande partie sur le programme français de ce temps. Il est présenté sous forme de tableau à trois colonnes. La première colonne précise les objectifs spécifiques (dans les domaines : savoir, savoir-faire, savoir-être) à atteindre pour une notion déterminée ; la deuxième colonne indique les contenus à enseigner ; des observations pour des contenus ou des démarches pour l'enseignement-apprentissage constituent la troisième colonne. Les aménagements, lorsqu'il y en a, se limitent en général à la suppression ou à la circonscription de certains intitulés ou notions.

La révision des programmes et des méthodes d'enseignement-apprentissage en mathématiques est alors un besoin urgent car il existe un vaste fossé entre ce qui est prescrit et ce qui est réellement mis en œuvre (Ramanantoanina, 2008, p.73). Nous pensons que la qualité de la formation des enseignants y est pour beaucoup : ces derniers ne sont pas formés pour la mise en œuvre du programme, outre le manque de manuel et matériel didactique.

Concernant la partie dévolue à la géométrie, elle est en général traitée en dernier par les professeurs, qui aiment bien commencer par l'algèbre et l'analyse. Sur 150 élèves de la classe de seconde du Lycée Rabearivelo, donc ceux qui viennent de finir les années du collège, 133 pensent que la géométrie est essentiellement analytique. D'ailleurs, il ne peut pas en être autrement, car les professeurs ont appris la géométrie analytiquement, les sujets d'examen au brevet sont essentiellement analytiques, et rares, voire inexistantes, sont les formations en géométrie synthétique dont les professeurs

ont pu bénéficier. Par suite, il n'est pas surprenant que les enseignants éprouvent des difficultés pour enseigner à leurs élèves ce qu'eux-mêmes n'ont pas appris.

Nous allons maintenant exposer les raisons pour lesquelles nous avons choisi les coniques comme thème de notre expérimentation didactique.

II.2.2. *Une notion dans le programme scolaire malagasy*

L'étude des coniques figure dans la partie géométrie du programme scolaire malagasy (MEN, 1999) et elle doit être traitée en classe terminale scientifique. Le contenu du programme sur les coniques est le suivant :

« **Les coniques** : - Définition géométrique : bifocale, foyer et directrice. - Equation cartésienne réduite des coniques propres. - Equations paramétriques d'une ellipse, d'une parabole. - Tangente en un point d'une conique. - Régionnement d'un plan par une conique. »

La logique du programme serait de définir géométriquement les coniques par foyer-directrice et excentricité, puis de donner une définition bifocale des coniques à centre. C'est seulement après que viendraient les équations cartésiennes, paramétriques et les tangentes. Ainsi une approche géométrique des coniques comme lieu de points suivie de l'étude des expressions analytiques des courbes coniques correspondrait à la démarche chronologique suggérée dans le programme scolaire. Cependant, le manque de formation des enseignants en géométrie ne leur permet pas d'assumer convenablement cette approche géométrique. Cette lacune dans la formation était mise en exergue lors de la correction de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat

scientifique de 2012, dans laquelle une centaine de professeurs de mathématiques de la région d'Antananarivo ont débattu sur la pertinence de la question : « *Déduire la nature de la courbe Γ formée par l'ensemble des points M du plan vérifiant $2MF^2 = MH^2$ où F est un point fixe n'appartenant pas à une droite donnée D , et H le projeté orthogonal de M sur D* ».

La détermination de la nature de Γ , qui n'est autre qu'une ellipse de foyer F et d'excentricité $\frac{1}{\sqrt{2}}$, mais que beaucoup de professeurs ne savaient pas reconnaître, a pris une bonne partie du temps dévolu à la commission d'harmonisation de la correction.

Il est encore temps, à la veille d'une réforme du programme scolaire malagasy, de sensibiliser les concepteurs de programme sur l'importance de la géométrie qui figure encore dans le programme actuel mais qui, par manque de formation des enseignants tend à être négligée, voire supprimée. Relever le défi d'assurer une formation initiale et continue des enseignants de mathématiques en géométrie, d'abord au sein des CRINFP et des ENS, puis par des informations-formations dans le cadre de groupes Irem, serait alors la tâche cruciale de tous les formateurs en mathématique à Madagascar.

Signalons qu'en France, l'étude des coniques ne figure plus au programme du lycée. Trgalova (1995), dans sa thèse, met en évidence les problèmes relatifs à leur enseignement en invoquant : un manque d'outils géométriques à disposition des enseignants, outils qui leur permettraient de faire une étude profonde de leurs propriétés géométriques ; une insuffisance de formation des enseignants pour faire apprendre les coniques ; une difficulté, voire une impossibilité, de la construction de la connaissance

géométrique de cette notion par les élèves à cause d'une approche analytique précoce. Elle propose alors l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, Cabri-géomètre, pour contourner ces problèmes.

II.2.3. Des intérêts didactiques

II.2.3.1. Coniques : interface entre plan, solide et espace

Le contenu de l'enseignement-apprentissage des coniques, du fait qu'elles sont des courbes qui jouent le rôle d'interface entre plan, solide et espace, cadre bien avec la psychologie de la géométrie comme l'a souligné Morris (1987, p.83) :

« Nous considérons comme essentiel le fait qu'un élève apprenne les propriétés de l'espace où il vit et qu'il perçoit par ses sens, en particulier le toucher et la vue. La base de l'apprentissage doit donc être l'expérience tirée d'activités pré-mathématiques (jeux avec des modèles, constructions, etc.) ainsi que d'activités mathématiques (dessin, établissement de plans, tris, etc.). »

Partant d'un article sur une introduction précoce de l'enseignement des coniques (Totohasina, 2008), notre recherche voudrait mettre en évidence l'intérêt didactique de leur étude en combinant les deux géométries que sont la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Nous allons essayer de changer la conception qui a pris et continue à prendre beaucoup d'ampleur chez nos élèves, vision selon laquelle la géométrie se résume à des calculs sur les coordonnées, et est donc purement analytique.

Les coniques, vues comme section de l'objet solide qu'est le cône, font appel à la fois à l'étude des solides (donc de l'espace) et à l'étude

des courbes planes (donc du plan). Par rotation autour de leur axe focal ou non focal, les coniques non dégénérées engendrent les quadriques de références : l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à une ou à deux nappes, le paraboloides elliptique.

II.2.3.2. *Coniques :* *pour combler des lacunes.*

De par les multiples activités que l'on peut concevoir, les élèves des collèges et lycées peuvent acquérir des savoirs et savoir-faire en géométrie synthétique. En effet, dès la création de l'algèbre par Mohammed Al-Khwarizmi (vers 780-vers 850) et son utilisation par Descartes (1596-1650) pour résoudre des problèmes géométriques, l'algébrisation de la géométrie ou la géométrie analytique a pris tellement de place que, actuellement, il nous est habituel d'entendre des enseignants se plaindre de la faiblesse de leurs élèves dans les séances de construction avec des matériels classiques de géométrie. Nous pensons qu'à force de trop vouloir, nous arrivons à ne rien avoir. À vouloir trop démontrer par la méthode algébrique, nos élèves perçoivent les mathématiques comme une discipline excessivement abstraite, ce qui nuit fortement à leur motivation et à l'image qu'ils se font des mathématiques et des mathématiciens. C'est une des raisons qui poussent bon nombre d'élèves à s'orienter vers un enseignement plus axé vers la littérature, et un facteur de la diminution du taux de réussite aux examens du bac scientifique.

Combien de fois voyons-nous des cours de géométrie sans figures et combien de nos élèves n'ont pas recours à un petit dessin ou un schéma d'illustration quand on leur demande de démontrer une proposition en géométrie, en analyse ou en algèbre ?

Généralement, l'homme aime le connu, le familier, sans vouloir pour autant se condam-

ner à vivre dans la routine. Nous pensons qu'il en est de même dans un apprentissage : il est toujours réconfortant pour un apprenant de se retrouver devant des situations, des notions ou des objets qui lui sont familiers ou concrets. En effet, ayant confiance en lui-même, ces situations- didactiques ou adidactiques - l'encouragent à aller toujours de l'avant, car il sait qu'il peut toujours se référer à des choses qui lui sont déjà connues, et par suite, il est presque sûr de ne pas se perdre. Cependant, un élève qui n'a que « le plan » comme support concret, aurait certainement des difficultés pour résoudre des problèmes autres que « les problèmes plans ». Et s'il n'a pas de connaissances sur « le solide », il ne sera certainement pas apte à résoudre des « problèmes solides ». Faisons alors en sorte que nos élèves aient l'habitude de se représenter par des dessins ou des schémas les problèmes qu'ils doivent résoudre. Essayons, autant que possible, de donner à nos élèves la chance de raisonner en s'appuyant sur des notions concrètes et de relier les savoirs à des choses simples qu'ils peuvent voir et percevoir, en leur faisant manipuler, autant que faire se peut, des instruments.

En effet, celui qui tient en main un instrument détient une connaissance mathématique plus ou moins élaborée (Barbin, 2014, p.x). Si nous réduisons les supports concrets de nos élèves, ils se représenteront les mathématiques comme une matière qui n'a aucun lien avec la réalité. Alors, l'essence même de cette discipline est remise en cause car la naissance d'une notion y est toujours précédée d'un besoin de résoudre un problème « concret ». Une solution trouvée est alors une prémisse de la construction des mathématiques, mais pas son application (ibid., p.xiv). Nous ne sommes pas contre l'algébrisation, un outil très puissant d'abstraction, mais nous voulons trouver le juste milieu pour que nos élèves appuient leur réflexion sur des objets qu'ils peuvent voir, toucher, etc.,

c'est-à-dire correspondant au premier niveau dans la taxonomie de van Hiele (1988, p.5).

Parmi nos élèves, beaucoup ne vont pas faire des mathématiques très poussées. Ils ont alors besoin de les voir comme un outil pratique pour répondre aux besoins de leur vie quotidienne. La géométrie est l'un des moyens pour y parvenir car « *la géométrie ne consiste pas à décrire ce qu'on voit mais à établir ce qui doit être vu* » (Brousseau, 2000, p.9). L'étude des coniques, de par les multiples registres (géométrique, algébrique, transformations, métrique, analytique, calculatoire, etc.) qu'on peut y utiliser, offrirait une vue transversale et verticale des mathématiques, et apporterait une nouvelle façon de concevoir la relation des mathématiques avec les autres matières et entre ses propres composantes.

II.2.3.3. Coniques : aide à la formation en démonstration mathématique

Une autre raison pour laquelle notre choix a porté sur le thème des coniques est le fait que « *leurs constructions mettent en jeu de nombreuses figures géométriques premières, basées sur des droites et des cercles. Et pour l'accessibilité aux démonstrations portant sur des propriétés métriques qui les caractérisent* » (Rincon, 2011, p.8). Les figures géométriques aideraient alors mieux les élèves dans l'apprentissage et c'est peut-être une des raisons pour lesquelles nous voyons des manuels ou des enseignants qui mettent des figures ou formes (carrées, rondes, triangulaires...) à la place des lettres inconnues dans les résolutions des équations du premier degré. En manipulant ces courbes, un raisonnement « visio-déductif » - comme Brousseau l'a qualifié -, puis déductif, et finalement mathématique se développerait chez les élèves. En les abordant selon une approche géométrique, on cultiverait chez les élèves des habitudes d'esprit comme l'envie constante de poser et résoudre

les problèmes, de chercher des modèles, de noter des liens et par-dessus tout de prouver des conjectures (French, 2004, p.3)

II.2.3.4. Coniques : initiation à l'utilisation des TICE

En ce qui concerne les TICE, le thème conique se prête favorablement à l'usage de la technologie comme support à l'enseignement des mathématiques, car même si la technologie en elle-même ne garantit pas la réussite en mathématiques, son intégration dans l'enseignement constitue une aide et un support pour la connaissance (Rincon, 2011, p.33). À part la visualisation, le travail dans des environnements informatiques dynamiques permet aux élèves d'apprendre et d'expérimenter. À travers des activités de construction portant sur ce thème, les élèves, en utilisant un logiciel de géométrie dynamique, voient l'intérêt et l'utilité des avancées technologiques dans l'enseignement-apprentissage :

« *Le fait de pouvoir construire de façon assez précise et, en un temps raisonnable, des figures de qualité est de nature à aider puissamment à la formation de concepts, notamment en dégageant les propriétés qui justifient les constructions* » (Cazzaro et al, 2001, p.103, cité dans Rincon, 2011, p.34-35)

II.2.3.5. Coniques : donner de la place à l'histoire des mathématiques

Une dernière raison est l'importance ou encore la place de l'histoire dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Nous citons juste deux arguments qui justifient l'intérêt didactique de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement-apprentissage de cette matière : « *le professeur peut y trouver une riche source d'inspiration pour concevoir des activités motivantes à tous les niveaux* » (Tour-

nès, 2012, p. 2). C'est d'ailleurs grâce à l'étude historique des coniques que nous avons pu élaborer des activités pour chaque classe du collège et du lycée.

Et selon l'Unesco (2011, p.54), «*il est important de pouvoir analyser le présent et penser le futur à la lumière d'un regard historique, qu'il s'agisse ici d'histoire des mathématiques ou d'histoire de l'éducation*».

III. — Protocole de recherches et analyses *a priori*

III.1. Les classes de l'expérimentation

Les classes à Madagascar et à la Réunion, dans lesquelles nous avons mené des expérimentations similaires, seront mentionnées dans cet article afin de permettre une étude comparative. En tout, cinq classes de sixième dont trois à la Réunion, quatre classes de cinquième dont deux à la Réunion et trois classes de seconde

au lycée Jean Joseph Rabearivelo de Madagascar, ont participé à notre expérimentation. Le nombre d'élèves concernés est de 530, dont 126 à la Réunion.

Les deux établissements Réunionnais qui nous ont accueillis pour les expérimentations sont le collège Émile-Hugot de Saint-Denis et le collège La Marine de Saint-Joseph. Pour Madagascar, le collège d'enseignement général d'Antehiroka, situé à environ 12 km de la capitale et le lycée Rabearivelo ont bien voulu coopérer avec nous.

À la Réunion, une séance de cours dure entre 1 heure et 1 heure 30 minutes, rarement 2 heures, alors qu'à Madagascar, c'est l'inverse : une séance se fait le plus souvent en 2 heures et rarement en 1 heure. Ainsi, les séances d'expérimentation ont duré au total 3 heures à la Réunion et 4 heures à Madagascar. Le tableau ci-dessous donne les répartitions des classes ainsi que les effectifs et les professeurs responsables.

Établissements	Classes	Effectifs	Professeurs responsables
Collège Émile Hugot, Saint-Denis	6 ^e 4	25	Madame Caroline Boulevart
Collège Émile Hugot, Saint-Denis	6 ^e 5	25	Monsieur Souillot Quentin
Collège La Marine, Saint-Joseph	6 ^e 1	26	Monsieur Florian Tobé
Collège La Marine, Saint-Joseph	5 ^{es} 4 et 5	50	Monsieur Florian Tobé
CEG d'Antehiroka	6 ^{es} 1 et 3	120	Madame Herinambinina
CEG d'Antehiroka	5 ^{es} 2 et 3	120	Madame Misa
Lycée J.-J. Rabearivelo	2 ^{de} 4	54	Madame Zoé
Lycée J.-J. Rabearivelo	2 ^{des} 6 et 13	110	Monsieur Mirault

III.2. Les activités et les objectifs

Pour les activités, choisies comme *milieu et situation d'apprentissage*, nous avons opté pour celles qui permettent aux élèves de manipuler et de voir. Les activités sont alors de trois types.

III.2.1. Des activités de manipulation

Les activités ont pour objectifs de :

- faire voir des formes coniques aux élèves ;
- faire trouver par les élèves des formes coniques dans leur quotidien.

Les activités de manipulation consistent à faire passer la lumière d'une lampe LED à travers le trou d'un classeur et de décrire, selon les positions d'un écran placé en dessous du trou, les formes des contours de la lumière projetée. Après l'inventaire des formes trouvées avec leur nom respectif, les élèves auront à chercher des formes coniques dans leur quotidien. Ces activités sont prévues pour durer 20 minutes.

III.2.2. Des activités de construction papier-crayon

Les buts de ces activités sont de renforcer les compétences des élèves dans le traçage des

Activités de manipulation :

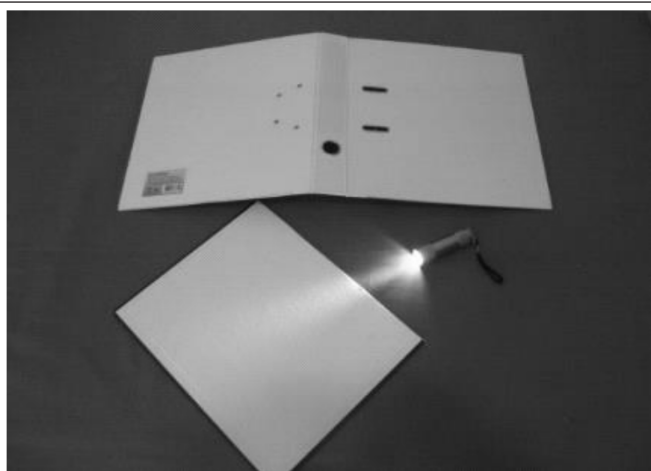
Activité 1 :

Matériel à disposition : une lampe de poche LED, un classeur avec un trou circulaire, un écran blanc en carton. Placer la lampe allumée à 20 cm (environ) au-dessus du classeur troué, et l'écran à 10 cm (environ) au-dessous du classeur troué.

- 1) *Quelle forme a le contour de la lumière projetée sur l'écran lorsque l'écran et le classeur sont parallèles ? (Comparer la grandeur du contour obtenu avec celle du trou du classeur)*
- 2) *Incliner lentement l'écran jusqu'à ce que sa position soit perpendiculaire au classeur troué. Esquisser la (les) forme(s) possible(s) du contour de la lumière projetée au cours de l'inclinaison.*

(Pour chaque différente position de l'écran, chaque élève esquisse le type de contour obtenu)

Activité 2 : *Trouver des objets dans votre environnement, où des courbes coniques sont visibles.*



droites, des segments, des droites perpendiculaires, des cercles, des médiatrices en construisant des coniques propres.

Ces activités, au nombre de quatre, sont extraites de celles proposées par Nourby et Morel (2005) à des élèves des collèges de la Réunion et reflètent bien la progression du mode et de la structure de pensée géométrique selon Hiele (1988, p.3) : d'abord une structure concrète globale par des opérations d'identification, de nomination, de comparaison et d'opération sur des figures géométriques ; ensuite une structure géométrique visuelle par des analyses des figures, des éléments qui les composent ainsi que les relations logiques existantes entre ces éléments pour dégager

des propriétés et les interrelations entre ces propriétés ; enfin une structure abstraite en prouvant par des raisonnements déductifs des théorèmes et en établissant des liens entre ces théorèmes et les symboles.

Les constructions tangentielles de la parabole (Lebossé et Héméry, 1968, p.346), de l'ellipse (ibid., p.280-281) et de l'hyperbole (ibid., p.315), sous-tendent ces activités. Nous avons choisi délibérément ces quatre exercices car les compétences mises en jeu relèvent de l'usage par les élèves des instruments usuels de géométrie et parce que les formes obtenues sont des courbes qu'ils ont déjà vues lors des activités précédentes de manipulation.

Activités papier crayon :

<p>ACTIVITÉ 1</p> <p>1°) Trace une droite(d) en bas de ta feuille. 2°) A 2cm au-dessus de (d), dans l'axe de la feuille, marque un point S. 3°) Marque un point A_1 sur la droite (d) 4°) Trace en trait léger le segment $[SA_1]$. 5°) Trace la droite perpendiculaire au segment $[SA_1]$ et qui passe par le point A_1. 6°) Recommence les étapes 3) 4) et 5) beaucoup de fois, appelle les points $A_2, A_3, A_4, etc. \dots$ jusqu'à ce que tu voies apparaître une forme « harmonieuse ».</p>	<p>ACTIVITÉ 2</p> <p>1°) Trace un cercle de centre O et de rayon $R=8cm$. 2°) Place un point S tel que $OS=5cm$. 3°) Prends un point A_1 sur le cercle. 4°) Joins en pointillés les points S et A_1. 5°) Trace la droite perpendiculaire au segment $[SA_1]$ et qui passe par le point A_1. 6°) Reprends les étapes 3) 4) et 5) beaucoup de fois, appelle les points $A_2, A_3, etc. \dots$ jusqu'à ce que tu voies apparaître une forme « harmonieuse ».</p>
<p>ACTIVITÉ 3</p> <p>1°) Trace un cercle de rayon 3 cm au centre de ta feuille. 2°) Marque un point S à l'extérieur du cercle (pas trop loin, au plus à 3cm du cercle). 3°) Marque un point A_1 sur le cercle. 4°) Trace d'un trait léger, le segment $[SA_1]$. 5°) Trace la droite perpendiculaire au segment $[SA_1]$ et qui passe par le point A_1. 6°) Recommence les tracés effectués pour A_1 avec de nombreux points $A_2, A_3, A_4, etc.$ choisis sur le cercle, jusqu'à ce que tu voies apparaître une forme « harmonieuse ».</p>	<p>ACTIVITÉ 4 (Construction de parabole par l'enveloppe de médiatrices en classe de cinquième).</p> <p>1°) Trace une droite (d) en bas de ta feuille. 2°) À 2cm au-dessus de (d), dans l'axe de la feuille, marque un point S. 3°) Marque un point A_1 sur la droite (d). 4°) Trace en trait léger le segment $[SA_1]$. 5°) Construis la médiatrice du segment $[SA_1]$. 6°) Recommence les étapes 3) 4) et 5) beaucoup de fois, appelle les points $A_2, A_3, A_4, etc. \dots$, jusqu'à ce que tu voies apparaître une forme « harmonieuse ».</p>

Il est clair que, pour créer des exercices analogues, il suffit de prendre une autre valeur du rayon du cercle principal, et/ou un point S plus ou moins éloigné du centre du cercle principal, si l'on veut que l'ellipse soit plus ou moins aplatie et l'hyperbole plus ou moins ouverte. Et prendre un point S plus ou moins éloigné de la droite (d) si l'on veut que la parabole soit plus ou moins ouverte.

La première de ces quatre activités prendra environ 25 minutes et sera traitée juste après les activités d'expérimentation, les trois autres prendront chacune une vingtaine de minutes.

III.2.3. Des activités faisant appel à la manipulation d'un logiciel de géométrie dynamique

Dans ces activités, les objectifs sont :

- d'initier les élèves au logiciel de géométrie dynamique : GeoGebra ;
- de familiariser les élèves avec le logiciel ;
- de faire voir des intérêts de l'usage de la technologie dans l'enseignement-apprentissage de la géométrie.

Pour ce faire, notre stratégie est de placer les élèves dans une situation d'enseignement-apprentissage où seul l'outil utilisé est nouveau pour eux ; mais le milieu, les exercices et consignes leur sont familiers, afin de mieux réussir l'acte d'enseignement-apprentissage (en réduisant les variables didactiques intéressantes). Les élèves auront alors à manipuler le logiciel de géométrie dynamique par l'intermédiaire **des mêmes activités** que dans l'environnement papier-crayon.

III.3. Les analyses *a priori*

Nous allons faire les analyses *a priori* selon les trois types d'activités.

III.3.1. Activités de manipulation

Les activités vont intéresser les élèves car rares sont les séances de mathématiques dans lesquelles on manipule des objets autres que les outils scolaires.

Les élèves travailleront en groupe et le professeur pourra donc privilégier un type d'enseignement associatif.

Ils verront et sauront décrire les formes de l'ellipse et de l'hyperbole, mais ne verront pas la parabole. Cependant leur vocabulaire sera enrichi.

Ils trouveront facilement des exemples des courbes coniques dans leur quotidien, et percevront par eux-mêmes que des formes qu'ils côtoient peuvent être des formes mathématiques qui ont fait l'objet de plusieurs siècles de recherches et que les mathématiques se rencontrent dans la vie de tous les jours. Une autre vision de notre discipline en découlera.

III.3.2. Activités de construction papier crayon

Ce sont des activités qui privilégieront les manipulations. Des automatismes et une plus grande dextérité seront acquis quant à l'utilisation des matériels scolaires de géométrie.

Les élèves vont participer pleinement et verront que des notions simples permettent d'obtenir des belles figures.

Comme les constructions se font individuellement, ils vont se sentir responsables de leur production et s'appliqueront davantage.

Les élèves vont comparer leur production avec celle de leur camarade et ils pourront

éventuellement discuter afin de trouver la bonne construction en cas de désaccord.

Par le fait qu'ils peuvent placer le point S n'importe où dans les activités 1, 2 et 4 pour obtenir une construction correcte (en effet, toutes les constructions seront les mêmes à une rotation près), ils réaliseront qu'ils peuvent prendre des initiatives en mathématiques. Le professeur ne sera plus celui qui dicte et/ou celui qui impose.

C'est une occasion de maîtriser des constructions et notions de base comme : point, droite, segment, cercle, médiatrice, distance, du même côté d'une droite et de constater eux-mêmes qu'ils peuvent aboutir à de bonnes productions.

L'image que les élèves se font d'eux-mêmes changera, ainsi que l'image qu'ils se font des mathématiques. Ils pourront penser : « *Je suis capable de faire de bonnes choses en maths et je me rends compte que les maths ne sont pas réservées à quelques élèves privilégiés* ».

Le professeur aura le temps d'encadrer ses élèves pendant les constructions, de voir leurs lacunes, d'encourager les initiatives : il sera un accompagnateur dans la construction des savoirs élèves, et non celui qui détient et qui donne tout.

III.3.3. Activités TICE, manipulation GeoGebra

À Madagascar, le lycée J.-J. Rabearivelo est choisi pour les activités TICE, car c'est l'un des rares établissements qui possèdent de salles informatiques. Les élèves ont donc fait les activités de manipulation et de construction papier-crayon avant de manipuler pour la première fois le logiciel de géométrie dynamique. Ils auront certainement des appréhensions devant les ordinateurs et a fortiori dans la manipulation de GeoGebra.

À la Réunion, l'intégration des TIC figure dans le programme scolaire, donc il n'y aura pas trop de problèmes pour manipuler GeoGebra. Les élèves percevront par eux-mêmes les avantages et intérêts de l'usage de la technologie dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

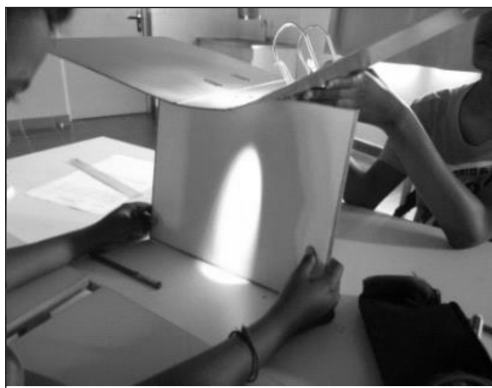
Un type d'enseignement associatif sera mis en place par le professeur à travers le travail de groupe. En effet, soit par l'emplacement contigu des machines, soit par leur insuffisance, les élèves doivent s'associer pour faire les activités et auront la possibilité de comparer leurs productions ou de demander de l'aide à leurs voisins.

À Madagascar, ce sera l'occasion pour le professeur d'emmener pour la première fois ses élèves dans la salle d'informatique. Bien que le lycée possède des salles informatiques, certains professeurs de mathématiques ne savent pas quelles activités faire avec les ordinateurs.

IV. — Les résultats et analyses *a posteriori*

La première séance se divise en deux parties : une première partie qui porte sur la manipulation de matériels utilisant une lampe, une plaque trouée et un écran afin de voir les contours des lumières projetées faisant apparaître des figures rondes des coniques propres, comme nous les voyons sur les photos de la page ci-contre.

La parabole n'est évidemment pas visible car il nous est difficile d'avoir la position de l'écran parallèle aux faisceaux de lumière. Et le professeur devrait signaler que c'est une partie de l'hyperbole que l'on voit sur l'écran car une hyperbole est la section plane d'une surface conique formée par deux cônes opposés par le sommet comme l'a défini Apollonius.



Des photos des contours des lumières projetées moyennant les matériels de l'expérimentation.

À la fin de cette première partie, l'esquisse des quatre courbes que l'on devrait obtenir est visualisée au tableau et le nom de chaque courbe est donné.

Ce qui est commun à tous les élèves, sans distinction d'âge ni de niveau, c'est le nom donné à « l'ovale ». Mais chacun a sa façon de nommer la branche d'hyperbole. À la Réunion, le nom donné par tous les élèves à cette branche, sans aucune hésitation, est « forme montagne ». C'est certainement l'influence de l'environnement sur l'apprentissage, car le paysage quotidien des élèves réunionnais est la montagne. À Madagascar, les élèves ont du mal à trouver un nom à cette branche de l'hyperbole. Au collège d'Antehiroka, qui est un peu éloigné de la ville et où des collines sont visibles, c'est la « colline ». Au lycée Rabearivelo, aucun nom n'a été donné ; on s'est contenté de « forme comme ça » (et on trace la forme).

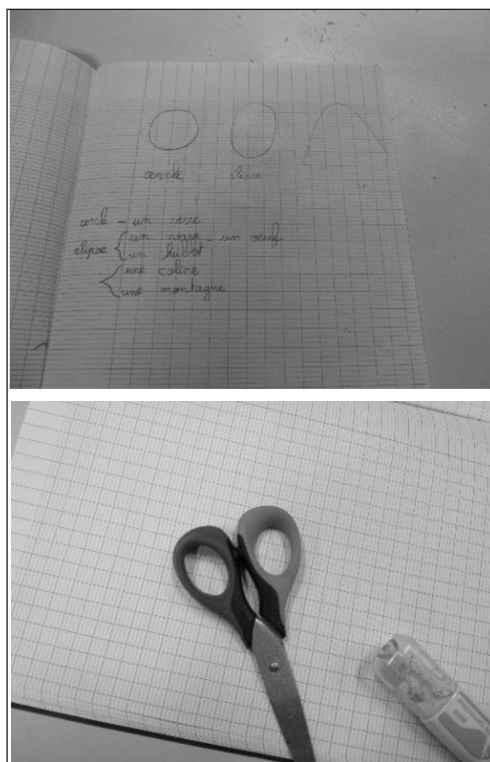
Après avoir fait tracer par les élèves les formes vues par expérimentation (cercle, puis ellipse, puis branche d'hyperbole), un professeur a demandé à ses élèves : « *quelle différence y a-t-il entre ces courbes ?* » Un élève a répondu « *les deux sont fermées et l'autre ouverte* ». Une question pertinente et une réponse intelligente, à notre avis ; c'était l'occasion parfaite pour introduire la courbe parabole : courbe limite entre l'ellipse et l'hyperbole, obtenue au moment où les *courbes fermées s'ouvrent* pendant l'expérimentation. Malheureusement, le professeur a raté cette opportunité.

Dans la seconde partie, on a demandé aux élèves si les trois nouvelles courbes qu'ils viennent de découvrir et dont les esquisses sont au tableau se rencontrent dans leur vécu. Ceci afin d'attirer leur attention sur le fait que des courbes présentes dans leur quotidien sont des objets mathématiques qui ont des noms savants et qui ont leur histoire (que l'on verra un peu plus tard).

LES CONIQUES : SOURCE DE SITUATIONS
D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE ...

Ce qui caractérise cette activité, c'est de les amener à réfléchir sur leur quotidien, les faire revenir sur terre si l'on peut dire. Leur faire voir qu'en cours de mathématiques, on n'est pas déconnecté de la vie de tous les jours. Les élèves, un peu surpris de la consigne, se sont mis à essayer de trouver des exemples de « formes coniques ». Le travail de groupe étant automatique chez les apprenants en cas d'obstacles (car beaucoup ont du mal à trouver des exemples), dès qu'un élève a trouvé un exemple et que le professeur a encouragé à en trouver d'autres, l'inspiration devient contagieuse : les uns ont décelé des exemples en classe, comme leur gomme (qui commence à prendre des formes rondes), le capuchon de leur stylo, la forme ronde dans les ciseaux (forme elliptique des trous où l'on fait entrer les doigts), les lunettes de leurs camarades de classe, etc. ; d'autres ont pensé à des exemples à la maison comme la forme des assiettes, leur baignoire, les antennes paraboliques, les mortiers pour piller le riz, etc.

Mais la grande différence entre les deux pays réside surtout dans les sources des exemples. À la Réunion, ils prennent d'abord des exemples de leur classe et ensuite cherchent des exemples ailleurs, alors qu'à Madagascar ils choisissent systématiquement des exemples en dehors de l'école et de l'établissement. Ces constatations nous amèneraient à avancer comme hypothèse que les élèves malgaches, contrairement à leurs homologues réunionnais, conçoivent le milieu de leur vie de tous les jours comme extérieur à l'école et à l'établissement, où ils passent cependant la plus grande partie de leur temps. C'est du, à notre avis, à la représentation de l'école comme un lieu que l'on doit fréquenter pour acquérir des connaissances contenues dans des programmes scolaires, mais qui n'a pas de lien avec la vie de tous les jours située au dehors. Une image de l'école que tout éducateur devrait changer.



*Des exemples de formes coniques
que les élèves ont trouvés*

La deuxième séance est réservée à des activités crayon-papier qui consistent à tracer des perpendiculaires afin de voir apparaître les formes des coniques propres. Dans la première de ces activités, on fait tracer la parabole (la courbe non visible lors de l'expérimentation) comme enveloppe de droites perpendiculaires.

Certains élèves ont trouvé la courbe après une dizaine de perpendiculaires bien tracées en des points judicieusement placés. D'autres ont en fait choisi des points d'un même côté de la droite et il a fallu que le professeur leur suggère de prendre des points régulièrement répartis

sur la droite. D'autres encore ont tracé des « tronçons de droite » de telle sorte que la courbe n'apparait pas. Mais beaucoup d'élèves ont des difficultés pour tracer les perpendiculaires à cause de la contrainte sur la position de la droite (d) : « *une droite (d) en bas de ta feuille* », imposée par l'énoncé qui les empêche de prolonger le segment.

La manipulation de l'équerre serait la cause principale des difficultés rencontrées. Nous avons alors mis par écrit (en encadré ci-dessous) les étapes à suivre pour manipuler l'équerre dans le traçage des perpendiculaires et aussi, par la même occasion, des parallèles afin d'outiller le professeur dans les aides personnalisées qu'il apportera à ses élèves durant les activités. Il s'agit d'un algorithme d'utilisation de l'équerre qui est efficace pour toutes les activités. À Madagascar, par le fait que la géométrie est traitée dans une partie bien définie de l'horaire hebdomadaire – comme l'algèbre et l'analyse d'ailleurs – et selon la répartition fixée par les enseignants, beaucoup d'élèves n'ont pas de maté-

riels de géométrie, aussi nous avons fabriqué des équerres par pliage.

Rappeler qu'une droite n'a ni commencement ni fin, donc doit remplir la feuille, est une phrase que les professeurs ne cessent de rappeler car beaucoup d'élèves ont l'habitude de tracer des portions de droite et c'est ce que nous voyons aussi dans nombreux manuels de mathématique.

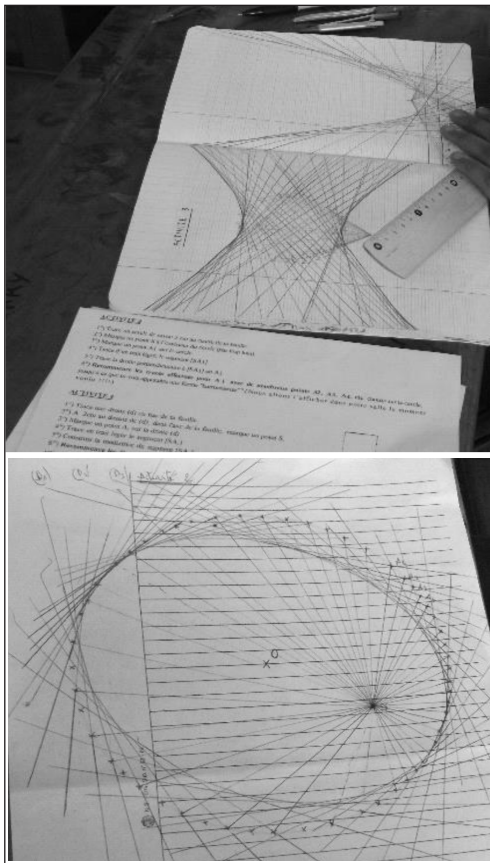
Le vocabulaire est enrichi par les mots : *conique, parabole, ellipse, hyperbole*, mais c'est tellement contextualisé par notre présence (surtout à Madagascar) que dès que le professeur demande la forme que l'on pourrait obtenir, ils répondent par conique, parabole, ellipse, hyperbole (l'effet météo comme on dit !!!), même si la question n'a rien à voir avec les coniques.

Pour ce qui est des courbes obtenues, les élèves ont trouvé qu'elles sont jolies et belles et qu'ils sont surpris d'obtenir telles courbes par

Procédure d'utilisation de l'équerre et la règle pour :

- Construire la perpendiculaire à une droite (ou un segment) passant par un point A donné.
La procédure se résume en trois étapes :
1^{re}étape : Pose un côté droit de ton équerre sur la droite, ou sur le segment ; mais « *l'autre côté droit tourné vers le point* »A.
2^eétape : Glisse ton équerre sur la droite (ou le segment) jusqu'à ce que l'autre côté droit touche le point A.
3^eétape : Trace une portion de la droite perpendiculaire et prolonge avec la règle.
- Construire la parallèle à une droite (ou un segment) et passant par un point A donné.
La procédure se résume en cinq étapes :
1^{re}étape : Pose un côté droit de ton équerre sur la droite, ou sur le segment ; mais « *l'autre côté droit tourné vers le point* »A.
2^eétape : Glisse ton équerre sur la droite (ou le segment) jusqu'à ce que le point A se trouve sous ton équerre.
3^eétape : Fixe une règle contre l'autre côté droit de ton équerre.
4^eétape : Fais glisser ton équerre le long de la règle jusqu'à ce que le point A apparaisse.
5^eétape : Trace une portion de la droite parallèle et prolonge avec la règle.

LES CONIQUES : SOURCE DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE ...



Des productions à la fin des activités papier-crayon

traçage de droites, une notion que nous pourrions exploiter plus tard en première avec les dérivations et tangentes.

Pour les activités 2 et 3, les élèves débütent à peine la construction qu'ils demandent déjà si l'on va obtenir une courbe aussi jolie que la première. La compréhension de l'énoncé prend du temps pour les collégiens et pour les élèves du lycée Rabearivelo, comprendre l'énon-

cé signifie lire et traduire l'énoncé en franc-gasy³. Dans tous les cas, le contexte de travail en groupe a encouragé les élèves et leur a permis de se lancer des défis pour eux-mêmes afin d'avoir les mêmes courbes ou de meilleures courbes que leur camarade. Et poussé par leur professeur, ils se sont lancés des défis entre eux sur le nombre de points placés (donc sur le nombre de perpendiculaires tracées).

C'est l'occasion d'aider les élèves en difficulté pour le traçage en mettant en œuvre la procédure, et de pratiquer une pédagogie différenciée. Les activités ont permis de consolider les compétences dans la manipulation des instruments de géométrie. Elles diffèrent des exercices classiques où l'on fait faire quelques traçages. Ici, on réalise des constructions pour bâtir, produire une figure (les élèves voient le fruit de leur travail sous la forme d'une œuvre).

L'activité 4 n'a pas été traitée car il ne restait pas suffisamment de temps pour le faire et en concertation avec le professeur, nous voulons que les élèves savourent la joie qu'ils éprouvent devant leurs « œuvres ».

Pour l'utilisation des TICE, c'est une occasion d'apprendre et/ou de bien s'entraîner sur l'usage du logiciel GeoGebra. À Madagascar, l'occasion est offerte aux enseignants de faire manipuler un ordinateur et utiliser les fonctions de bases du logiciel Géogebra. Pour eux, utiliser les fonctions « trace » ou « lieux » peut attendre. Mais à la Réunion, où les élèves connaissent déjà ces opérations élémentaires, ils étaient pressés d'avoir le « truc » (fonctions lieu, trace, animation) du professeur qui permet d'obtenir la figure. La joie des élèves ayant réussi à tracer les courbes avec GeoGebra est plus que réconfortante pour eux et pour le professeur.

³ franc-gasy : français associé à du malagasy sans règles claires ni fixes

À Madagascar, quelques-uns ont demandé s'ils peuvent aller en salle d'informatique pour s'exercer avec GeoGebra. Certains même ont demandé à avoir le logiciel (alors qu'ils n'ont pas d'ordinateur !!! mais pour le futur, disent-ils).

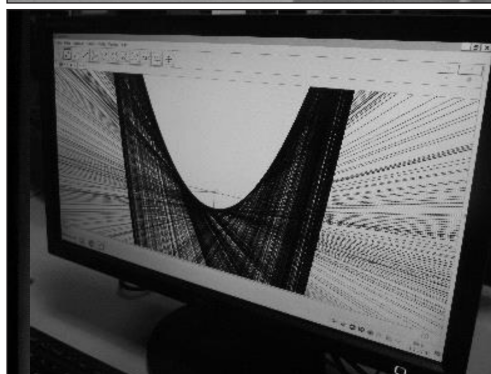
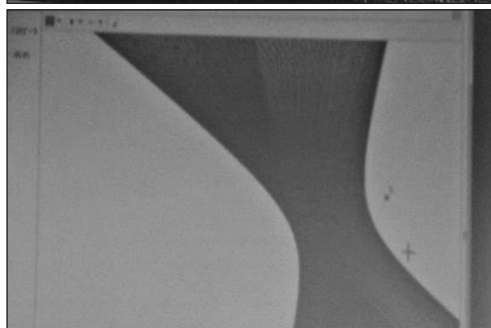
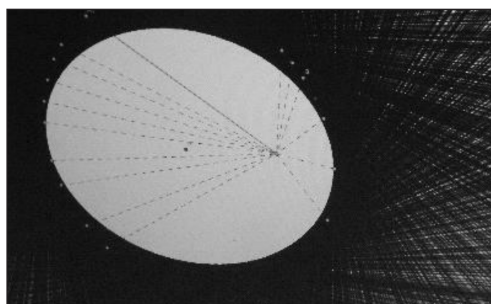
Par un pur hasard, un des groupes d'élèves a déplacé la position du point S de l'activité 3 et a constaté que l'on retrouve l'ellipse de l'activité 2. Tous se sont mis à déplacer le point S et c'était la joie dans la salle informatique. Nous sommes intervenus auprès des professeurs en disant que pour les courbes coniques, on peut passer de l'une à l'autre par une transformation que l'on appelle homographie harmonique.

Quant à l'animation de classe et la technique d'enseignement-apprentissage, les jeunes professeurs ont vu qu'il y a d'autres façons d'enseigner, que c'est toujours bénéfique pour eux de favoriser l'autonomie, de solliciter la participation, de ne pas monopoliser le temps de parole, qu'ils peuvent assumer pleinement leur tâche d'organisateur de situations d'apprentissage, et d'évaluer le savoir et savoir-faire de leurs élèves quand ces derniers sont en activité.

V. — Conclusion et perspectives

Si la recherche du professeur A. Totohasina émet l'hypothèse d'une introduction des figures coniques vers la fin du cycle collège ou en début du lycée, nous pensons qu'il est possible de se familiariser avec ces courbes dès le début du collège à travers des activités de manipulation et de construction avec les instruments usuels de géométrie.

Il y a certainement d'autres activités qui permettraient d'introduire les courbes coniques, mais nous pensons que l'utilisation de faisceaux de lumière est adaptée au contexte malgache par



*Des productions élèves dans
la manipulation du logiciel Géogebra*

sa simplicité, donc facilement réalisable même dans les collèges les plus reculés de l'île.

Les activités ont aussi fait leurs preuves par l'implication et l'intérêt des élèves en classe.

Ce fut l'occasion pour nous de mettre au point une procédure d'utilisation de l'équerre pour le traçage de la perpendiculaire à une droite – ou plus précisément à un segment – passant par un point donné, et par la même occasion une procédure d'utilisation de la règle et de l'équerre pour tracer des parallèles. En effet, nous avons déjà eu conscience du problème éprouvé par nos élèves et même nos élèves-professeurs des collèges durant les séances de simulation de classe quand nous étions enseignant-formateur à l'INFP, mais nos analyses des difficultés rencontrées par les apprenants n'étaient pas assez profondes pour pouvoir mettre par écrit les démarches.

Ce fut aussi une occasion de se fabriquer une équerre par pliage et de se demander comment, avec un papier A4, obtenir une équerre

la plus grande possible et qui tienne (un côté devra être formé de 4 feuilles).

Les activités offrent un moyen de prendre en main un logiciel de géométrie dynamique et de saisir l'avantage de l'outil informatique, rien que pour la rapidité et la précision dans les figures par rapport au traçage papier-crayon. Les situations didactiques proposées par ces activités sont intéressantes, car on peut agir dessus pour changer les stratégies de solution. Par exemple, on ne donnerait pas la consigne mais le résultat, c'est-à-dire les courbes obtenues par des traçages mis en évidence, et on demanderait aux élèves de trouver et de décrire les démarches pour y arriver ; les compétences rédactionnelles et capacité d'analyse seraient fortement développées.

Références bibliographiques

- * BARBIN, Évelyne (dir.) (2014). *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Ellipses, Paris.
- * BKOUSCHE, Rudolph (1997). Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie, *Repères-IREM*, 26, p. 49-71.
- * BONGIOVANNI, Vincenzo (2001). *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue des enseignants : étude d'une séquence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif*, thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- * BOUZARI, Abdelmalek (2015). Les sections coniques d'Apollonius dans la tradition mathématique arabe : un exemple de circulation. Dans *les mathématiques méditerranéennes : d'une rive et de l'autre*, Évelyne BARBIN et Jean-Louis MALTRET (dir.), Ellipses, Paris, p. 43-55.
- * BROUSSEAU, Guy (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. Dans *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques, Réthymnon, Université de Crète, Département des sciences de l'Éducation*, p. 67-83.
- * COOLIDGE, Julian Lowell (1968). *A history of the conic sections and quadric surfaces*, Dover, New York.

- * EUCLIDE (1819). *Les Œuvres d'Euclide, traduites littéralement d'après un manuscrit grec très ancien, resté inconnu jusqu'à nos jours*, par F. Peyrard. Rééd. Blanchard, Paris, 2004
- * FAUCONNET, Annie (1991). Un chemin pour la géométrie dans l'enseignement secondaire. Dans *Rôle et conception des programmes de mathématique*, CIEAEM (éd.), Bruxelles, p. 473-482.
- * FRENCH, Doug (2004). *Teaching and learning Geometry*, Continuum International Publishing Group.
- * LEBOSSÉ, C. et HÉMERY, C. (1961). *Géométrie, classe de Mathématiques. Programme 1945*, Nathan, Paris. Rééd. Gabay, Paris, 1990.
- * MEN (1999). *Programmes scolaires*, CNAPMAD, Antananarivo.
- * MORRIS, Robert (dir.) (1987). *Études sur l'enseignement des mathématiques : L'enseignement de la géométrie*, Vol. 5, UNESCO.
- * NOURBY, Jean-Daniel et MOREL, Virginie (2005). *Coniques et Cardioïdes, deux thèmes à exploiter sur toute l'année de sixième*. IREM de la Réunion.
- * RAMANANTOANINA Patrick Philippe, (2008). Les défis de l'expansion de l'enseignement secondaire et de la formation à Madagascar. Dans *Document de travail de la Banque Mondiale N°143. Série : Le développement humain en Afrique*. Banque Mondiale. USA.
- * RINCON, Bahamon (2011). *Démonstration des propriétés métriques sur les coniques avec un outil de géométrie dynamique*, Mémoire de recherche, Université de Montréal.
- * TRGALOVA, Jana (1995). *Étude historique et épistémologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel Cabri-Géomètre*, thèse de doctorat en didactique des Sciences, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- * TOTOHASINA, André (2008). *Pertinence et faisabilité de l'introduction précoce des coniques*, IREM de la Réunion.
- * TOURNÈS Dominique (2012). Calculer avec des hyperboles et des paraboles. Dans *Des mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*, Évelyne BARBIN (dir.), Vuibert, Paris, p. 131-148.
- * UNESCO (2011). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*, UNESCO, Paris.
- * VAN HIELE (1988). The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents. National Council of Teacher of Mathematics. In *Journal for research in mathematics education. Monograph number 3*, USA. Second printing 1995.
- * WALBANK, F. W. (1970). *A Historical Commentary on Polybius, II*, Oxford.

ANNEXE*Des statistiques :*

A.1) Une enquête menée auprès de 150 élèves de la classe de seconde, pris au hasard dans un lycée de la ville d'Antananarivo concernant leur avis aux questions :

- 1°) Pour vous, les mathématiques sont utiles dans la vie de tous les jours : Oui Non
 2°) Les mathématiques sont destinées à une couche privilégiée de personne : Oui Non
 3°) Les mathématiques sont trop abstraites car toujours des « x et y » : Oui Non
 4°) En géométrie, il y a beaucoup de calcul des coordonnées : Oui Non

Tableau 1 :

Numéro des questions	Nombre de OUI	Nombre de NON
1	120	30
2	17	133
3	122	28
4	133	17

Tableau 2 : Le tableau donnant les avis des élèves aux questions 2 ; 3 ; 4 selon leur réponse à la question 1.

Numéro des questions	Nombre de OUI sur les 120	Nombre de OUI sur les 30	Nombre de NON sur les 120	Nombre de NON sur les 30
2	5	12	115	18
3	110	12	10	18
4	113	20	7	10