REPERES - IREM. N° 108 - juillet 2017

MODELISATION : LE CAS DES FONCTIONS AFFINES

Sylvie GRAU
ESPE – CREN
Université de Nantes

Résumé : Comment amener les élèves à modéliser la covariation de deux grandeurs par une fonction affine ? Cet article met en évidence les obstacles rencontrés par les élèves et propose l'analyse d'une activité expérimentée à différents niveaux de la scolarité. Il s'appuie sur l'apport d'une approche covriationnelle de la fonction affine et sur les différentes unités de raisonnement mobilisées. Il permet de s'interroger sur le lien entre le modèle théorique et la situation proposée.

Dans les programmes du collège de 2016, la modélisation apparaît explicitement comme un objectif d'apprentissage au cycle 4. Nous allons nous interroger sur ce que modéliser signifie, sur le lien à tisser entre les mathématiques et les sciences expérimentales, sur l'approche covariationnelle et sur les unités de raisonnement mobilisées lors de la modélisation par une fonction affine. Nous proposerons dans cet article l'analyse d'une activité proposée à différents niveaux de la scolarité et tirerons de cette analyse quelques pistes pour penser l'enseignement-apprentissage de l'affinité. Ces pistes peuvent être un cadre pour penser l'introduction des fonctions à travers un travail interdisciplinaire avec toute discipline ayant recours à la modélisation mathématique pour interpréter la covariation de deux grandeurs. Elles mettent aussi en garde sur l'écart entre les connaissances construites en situation et l'objet théorique visé.

1. — L'approche covariationnelle

Une fonction est définie par la donnée d'un ensemble E de départ, d'un ensemble F d'arrivée, et d'un procédé mettant en relation chaque élément de l'ensemble de départ avec au plus un élément de l'ensemble d'arrivée. Cette définition peut amener des représentations plus ou moins erronées de ce qu'est une fonction. En effet chaque élément de l'ensemble de départ peut être pris isolément, lui et son image déterminent un couple. Dans le cas d'une fonction linéaire, ce couple suffit à déterminer la fonction. Par extension, l'élève peut penser qu'un couple suffit à déterminer n'importe quelle fonction. Plusieurs couples peuvent amener à une organisation dans un tableau de valeurs, on peut alors représenter graphiquement un ensemble de points isolés. Nous avons ici un point de vue statique de la fonction basé sur la correspondance terme à terme. On peut l'illustrer par un schéma de type diagramme de Venn.

Si maintenant nous définissons la fonction comme ce qui caractérise la covariation de deux grandeurs, cela signifie que tout élément de l'ensemble de départ E peut varier et que cette variation entraîne une variation de son image dans F. Nous avons une représentation dynamique qui peut prendre en charge le continu, le cas échéant. On peut schématiser ce point de vue par deux droites ou segments qui définissent d'ailleurs un repère si les deux axes sont sécants en l'origine. La représentation graphique peut amener à l'idée d'une courbe.

La première approche est un contresens épistémologique. En effet, l'idée de fonction émerge historiquement de la nécessité de modéliser les « lois de variations » entre deux grandeurs. L'évolution de la notion est liée à la notion de variable et au dépassement de l'obstacle de l'homogénéité et de celui de l'incommensurabilité. Cette genèse est donc associée à celle des différents ensembles de nombres : « l'étude élémentaire des fonctions ne peut être, à ses débuts, qu'une modélisation de l'arithmétique des grandeurs » (Comin, 2005). En fait les deux approches se complètent mais l'étude des fonctions dans notre système scolaire débouche sur l'étude des dérivées et donc sur un usage dynamique alors que son introduction est faite de manière statique. Il semblerait donc utile de développer le raisonnement co-variationnel chez les élèves dès le début du collège.

2. — La modélisation : deux types de fonctions

Tran Kiem (Tran Kiem, 2012) propose un schéma du cycle de modélisation reprenant trois niveaux de représentation des fonctions que sont : la covariance et la dépendance dans un système physique, la covariance et la dépendance au niveau des grandeurs et des mesures, les

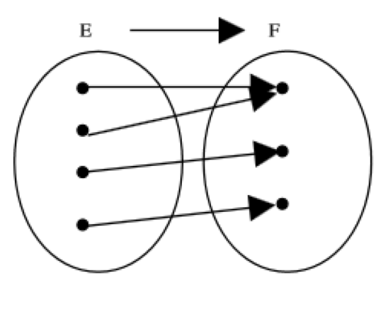


Schéma 1 : point de vue statique

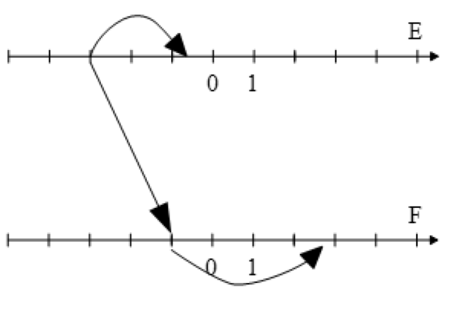
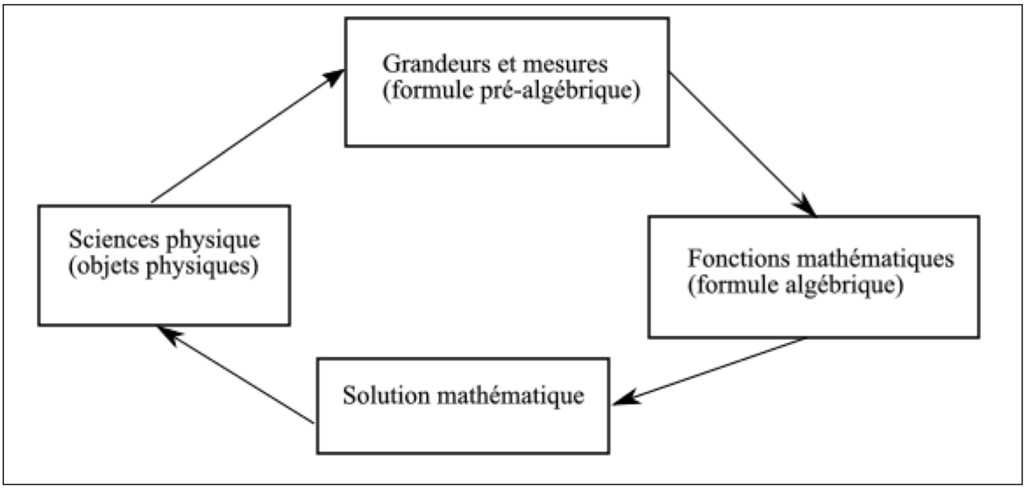


Schéma 2 : point de vue dynamique



fonctions mathématiques. Partant du système physique, l'élève repère des modifications du système liées à des objets physiques. Il repère des grandeurs et faisant varier ces grandeurs, il peut mesurer les variations de mesures, il peut alors choisir une variable et écrire une formule pré-algébrique de dépendance. La représentation algébrique de cette formule se fait au niveau des fonctions mathématiques qui peuvent permettre une preuve algébrique d'une solution mathématique, qu'il s'agit ensuite d'interpréter dans le système physique de départ.

Tran Kiem s'appuie sur une typologie proposée par Lagrange et Artigue (Lagrange & Artigue, 2009) ayant pour but de classifier et de relier les activités variées sur les fonctions. Cette typologie définit différents niveaux de représentation ainsi que des types de représentations et d'activité. Elle est résumée dans le tableau de la page suivante. L'objectif de l'activité mathématique peut être la modélisation de la relation entre deux grandeurs à partir de mesures empiriques données, dans le but de comprendre cette relation, la décrire, anticiper une évolution, permettre une prise de décision. Si les données sont des mesures empiriques (effectivement mesurées ou non), on ne peut évacuer la question de l'approximation de mesurage. Certains élèves peuvent les considérer comme des mesures théoriques et donc comme des valeurs exactes alors que d'autres estimeront que ce sont des valeurs approchées et que les calculs effectués sur ces valeurs sont valides à condition que la dispersion des résultats de calcul soit dans un intervalle acceptable. Toute la difficulté est dans la définition de cet « acceptable », de la négligibilité, d'autant que peuvent se cumuler des approximations de mesurage et des approximations de calcul.

Il s'agit donc d'articuler l'élaboration de lois avec d'une part des mesures empiriques et d'autre part des théorèmes mathématiques sur des mesures théoriques. On peut estimer qu'une étape consiste à faire « comme si » on travaillait sur des mesures théoriques dans un intervalle de confiance. L'élaboration d'un modèle dans cet espace théorique ne peut en aucun cas être élaboré sans un but. La modélisation

		Types de représentations et d'activités			
		Enactive-iconique	**Générative**	**Transformationnelle**	**Global/méta**
Niveaux de représentation	**Système physique**	Exploration globale des modifications du système	Perception de dépendance entre les grandeurs		Considération des objets génériques
	Grandeurs et mesures	Exploration locale : faire varier une grandeur et observer les variations des mesures	Choix d'une variable et création d'une formule exprimant la dépendance		Interprétation des grandeurs génériques
	Fonctions mathématiques	Trace locale du graphe et étude de ses propriétés	Création d'une formule algébrique et d'un domaine de définition	Développer, factoriser, reconnaître des expressions équivalentes.	Reconnaître la structure d'une fonction, d'une famille de fonctions, établir une preuve.

Tableau 1 : Types de représentations et d'activités suivant les niveaux de représentations (Lagrange & Artigue, 2009)

peut avoir pour objectif d'élaborer une loi ou de permettre un traitement. Ce traitement ne peut pas servir à compléter un tableau de mesures empiriques, cela n'aurait aucun sens. Les modèles théoriques mis en place à partir de mesures empiriques ne se justifient que s'ils ont pour fonction d'aider à la prise de décision. Chesnais et Munier (Chesnais & Munier, 2015) proposent d'expliciter aux élèves les deux types de mesures en distinguant « mesures empiriques » et « mesures théoriques ».

Cela nous amène à repenser le statut de la fonction affine comme modèle. Dans la situation, le modèle empirique permet de définir une fonction affine « pratique » en ce sens que les coefficients sont des valeurs approchées calculées à partir de mesures empiriques. Le modèle théorique ne peut pas être une fonction affine clairement définie puisque nous ne pouvons pas calculer les coefficients exacts. Il peut cependant émaner d'une théorie mathématique ou d'une théorie relevant du champ des sciences expérimentales dont relève la situation. Nous avons donc une phase inductive qui permet de modéliser la situation empirique par une fonction pratique. Cette fonction peut amener, à travers un champ théorique précis, à une modélisation par une fonction théorique permettant des déductions.

Nous avons ainsi deux types de fonctions : pratiques et théoriques. La fonction pratique s'applique à des mesures de grandeurs et doit prendre en compte les incertitudes ainsi que le contexte pour établir un domaine de validité, elle peut amener à l'écriture de lois dans le domaine scientifique concerné. La fonction théorique mathématique s'applique à des nombres, l'ensemble de définition peut être un ensemble discret ou continu. Nous ne pouvons pas avoir un traitement identique sur ces deux types de fonctions. Les traitements effectués avec la fonction théorique ne peuvent pas avoir le même statut que ceux effectués avec la fonction pratique. Le modèle théorique permet d'identifier des classes de problèmes et peut devenir un outil pour résoudre de nouveaux problèmes du même type. La fonction pratique permet d'anticiper un phénomène pour prendre une décision, comprendre ou expliquer, elle n'a pas à proprement parler statut de modèle.

3. — Qu'en est-il dans les situations d'enseignement-apprentissage usuels ?

Certains automatismes ont été mis en évidence par un test proposé à des élèves de fin de 3ème et début de seconde. L'analyse des manuels scolaire a permis de repérer que ces automatismes pouvaient être liés au fait que les situations rencontrées par les élèves relèvent des mêmes caractéristiques. Cette fréquence engendre des automatismes qu'il s'agit d'inhiber. Parmi ces caractéristiques, nous avons relevé que les exercices proposés aux élèves demandent le plus souvent d'étudier les fonctions d'un point de vue local et non global comme attendu dans une approche covariationnelle.

Par ailleurs, les élèves se représentent la proportionnalité comme le seul modèle pour caractériser la covariation de deux grandeurs par les propriétés de linéarité. Un autre obstacle est lié au fait que les élèves considèrent toutes les fonctions comme des fonctions monotones voire des fonctions croissantes. Enfin la variable temps a un statut privilégié qui fait que l'organisation des variations est, dans ce cas, principalement liée à la chronologie, d'où peut-être cette idée de croissance implicite. Actuellement, les activités proposées au collège visent la comparaison de quantités et la détermination d'une quantité à partir d'une autre. Les problèmes décrivent des phénomènes par des modèles en quantifiant la dépendance, mais les élèves n'ont pas à déterminer ou critiquer ces modèles, ils sont imposés pour permettre le traitement. Modéliser demande de décrire les variations d'une quantité en fonction d'une autre et donc de mettre en place un autre point de vue sur la dépendance de deux grandeurs. Nous allons analyser une situation expérimentée à différents niveaux de la scolarité pour mieux identifier les unités de raisonnement mobilisées lors du travail de modélisation par une fonction affine.

4. — La généralisation d'un comportement covariationnel pour résoudre un problème non affine

Nous avons cherché, au sein du groupe « fonctions au collège » de l'Irem de Nantes[1], à créer une situation tenant compte des différents obstacles cités plus haut et des représentations erronées des élèves. La situation a été expérimentée dans leurs classes par quelques membres du groupe IREM. J'ai collecté les productions des élèves et certains enregistrements pour les analyser dans le cadre de mon travail de thèse. La situation devait avoir les caractéristiques suivantes : une covariation mais pas une fonction du temps ; une rupture avec la proportionnalité ou des formules pré-établies ; plusieurs solutions possibles d'où la nécessité de prouver et d'argumenter la réponse proposée ; un problème ouvert pour comparer les procédures.

En premier lieu, l'organisation mathématique de la notion de fonction amène à considérer cette notion comme liée à l'étude de la covariation de deux grandeurs. Le plus souvent cette variation est considérée comme fonction du temps. Ici le problème que nous proposons en annexe

1 http://www.irem.sciences.univ-nantes.fr/

1, amène à comparer entre elles deux grandeurs fonction du temps : la pluviométrie trouvée sur un site Internet en fonction des dates ainsi que la hauteur d'eau dans un pluviomètre en fonction des dates. Ces grandeurs ne sont pas liées par une relation connue des élèves et à fortiori ces deux grandeurs ne sont pas proportionnelles. En effet, la pluviométrie exprimée en litres par m^2 correspond au volume d'un prisme droit dont la base serait un carré de 1m de côté alors que la hauteur d'eau dans le pluviomètre est exprimée en millimètres et correspond au volume d'eau recueilli dans un récipient dont nous ne donnons pas l'aspect mais que nous avons pensé en forme de tronc de cône. Plusieurs formes différentes peuvent être imaginées, nous verrons en quoi leur présentation peut amener la prise de conscience de représentations implicites (voir annexe 3).

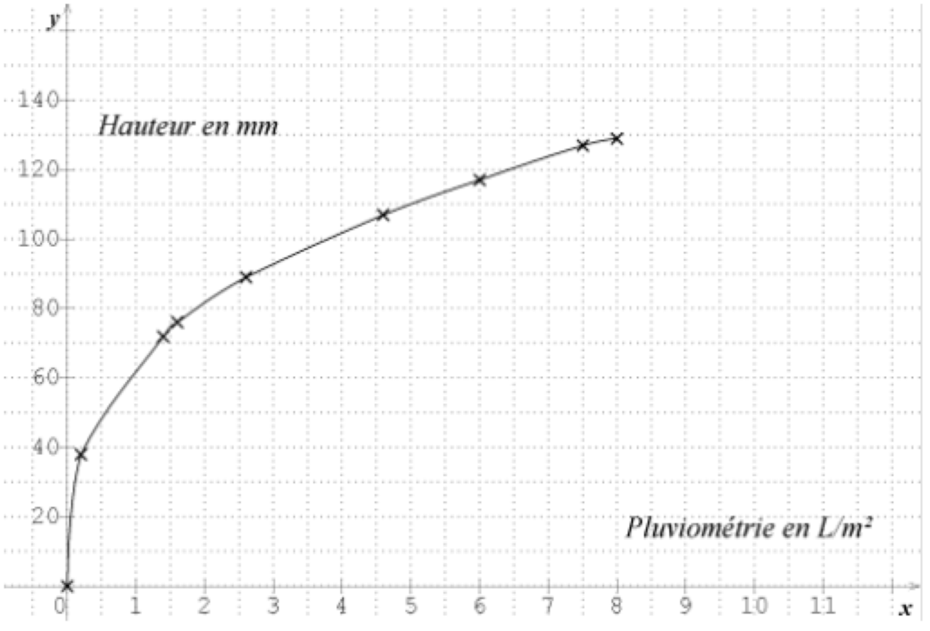
Les données sont fournies dans des tableaux qui ne sont pas organisés de la même manière. L'un est en ligne et l'autre en colonne. Ceci pour rompre avec les représentations usuelles des tableaux de proportionnalité en lignes. Les dates n'ont pas non plus le même format (12/01 ou 12 janvier). Le problème amène à argumenter pour une prise de décision. La solution n'est pas évidente, on peut donc être amené à prédire deux réponses contraires, ce qui doit amener du doute et provoquer des débats. L'approximation linéaire doit cependant permettre de donner une réponse convaincante. Enfin, aucune procédure n'est induite, les élèves peuvent se lancer dans des essais. Aucune aide n'est proposée au départ de l'activité pour laisser le choix des cadres et registres dans lesquels ils vont travailler.

Plusieurs expérimentations présentées dans la suite de cet article ont permis de faire évoluer la situation pour aboutir à la version en annexe qui tient compte des difficultés rencontrées. En particulier, les valeurs numériques ont été modifiées pour que les approximations permettent d'argumenter la prise de décision et que le graphique soit relativement simple à tracer pour favoriser les conjectures par lecture graphique. Différents scénarios sont envisageables, nous allons en découvrir quelques aspects dans l'analyse qui va suivre.

5. — Analyse préalable de la situation

Une première étape du raisonnement doit amener les élèves à considérer la grandeur indépendante et la grandeur dépendante, ce qui signifie faire abstraction des dates. Les élèves sont alors amenés à réorganiser les données en niant l'ordre chronologique. Cette mise en relation peut être faite de manière isolée à partir de quelques valeurs ou bien elle peut être organisée en rangeant les données dans un nouveau tableau mettant en évidence les deux grandeurs étudiées par ordre croissant. Cette organisation n'est pas indispensable pour répondre au problème à partir du moment où les connaissances des élèves les amènent à considérer que plus la pluviométrie est importante, plus la hauteur d'eau dans le pluviomètre augmente, ce qui revient à savoir que les deux grandeurs varient dans le même sens, mais elle peut aider à la représentation du problème. Nous obtenons alors le tableau de données suivantes :

Pluviométrie en L/m^2	0	0,2	1,4	1,6	2,6	4,6	6	7,5	8
Hauteur d'eau dans le pluviomètre en mm	0	38	72	76	89	107	117	127	129



Graphique 1 : Hauteur d'eau dans le pluviomètre (en *mm*)
en fonction de la pluviométrie (en *L/m²)*

On peut aussi représenter la situation sur un graphique mais ici encore la difficulté réside dans la mise en relation des deux grandeurs pour les représenter sur un seul et même graphique.

L'analyse des données doit amener les élèves à repérer l'intervalle sur lequel le risque existe. Beaucoup de questions peuvent venir du contexte et du passage du discret au continu. Si lorsqu'il pleut, l'augmentation du niveau de l'eau dans le récipient amène une représentation continue de la variation de hauteur dans le pluviomètre, le manque d'informations sur la pluviométrie peut laisser penser que les valeurs indiquées sont des moyennes. La prise en compte de ces remarques doit permettre de différencier clairement la fonction théorique de la fonction pratique. La relation n'étant pas affine, les élèves ne devraient pas être tentés de mettre en œuvre des procédures liées à la proportionnalité. Cependant la courbe peut être approchée localement par une droite.

Nous pouvons penser que les élèves peuvent mettre en place différentes procédures qui toutes sont basées sur l'idée implicite que le phénomène ne présente pas de changement brutal des accroissements. Des contre-exemples présentés en annexe 3 peuvent donner l'occasion de mettre en évidence cet implicite, ils présentent différentes formes de pluviomètres qui correspondent aux valeurs de l'exercice mais qui donnent des conclusions divergentes.

Ces procédures sont :

— ***L'approximation graphique*** : l'élève peut prolonger la courbe par un tracé de même direction et vérifier que le tracé est en dessous de la droite d'équation $y = 142$. La lecture est approximative et ne permet pas de prendre la décision.

— ***La conversion*** : l'élève cherche à établir la formule exprimant la hauteur d'eau dans le pluviomètre en fonction de la pluviométrie. Pour cela, il faut des données supplémentaires sur la forme du pluviomètre et sur ses dimensions. Les élèves qui se lancent dans cette procédure risquent de rester sur des procédures erronées de conversion.

— ***L'interpolation linéaire*** : nous avons ici un des objectifs de l'étude des fonctions affines qui est la modélisation de problèmes complexes par des situations affines afin de permettre une prise de décision.

Pour cette approximation il s'agit de choisir l'intervalle le plus petit possible. Si nous prenons par exemple les valeurs 7,5 et 8 ; nous obtenons :

7,5	8
127	129

On remarque que 7,5 + 0,5 = 8 alors que 127 + 2 = 129, or pour atteindre 142 la hauteur doit augmenter de 13mm à partir de 129, ce qui correspondrait à 6,5 fois l'augmentation de 2mm ci-dessus. On aura donc une augmentation de la pluviométrie de 6,5 × 0,5 L/m^2 soit 3,25 L/m^2 donc 11,25 L/m^2. Ce qui permet de dire que M. Legoff ne doit pas s'inquiéter.

Si on choisit d'autres valeurs voisines, on aura une approximation différente et la conclusion sera elle aussi différente. Par exemple en prenant les valeurs pour 6mm et 8mm :

6	8
117	129

Le pluviomètre augmente de 12mm quand la pluviométrie augmente de 2L/m^2, donc pour augmentation de 3L/m^2 la hauteur sera de 129 + 12 + 6 = 147mm. M. Legoff doit donc s'inquiéter.

Une même procédure amène deux conclusions opposées. La seule différence est le domaine d'approximation. On peut justifier de la pertinence du premier calcul en montrant que la courbe « monte de moins en moins vite » ce qui correspond au fait que les variations sont dans un rapport qui est de plus en plus petit.

— ***la détermination d'une fonction affine*** : le traitement précédent utilise la proportionnalité des accroissements mais on peut imaginer d'autres procédures, comme le calcul du coefficient de proportionnalité, la recherche de l'expression de la fonction affine f telle que $f(7{,}5) = 127$ et $f(8) = 129$. Suivant les savoirs disponibles, d'autres techniques peuvent encore être utilisées.

6. — Analyse des expérimentations en classe de sixième

La situation a été proposée dans une classe de sixième. Les élèves sont par groupes de 3 ou 4 et doivent rédiger une chronique de leur recherche. L'enseignant n'apporte aucune aide sur cette première étape. Notre objectif est de voir comment les élèves traitent les données et quelles procédures ils utilisent alors qu'ils n'ont pas travaillé la notion

Pluviométrie en L/m²	0	0,2	1,4	1,6	2,6	4,6	7,5	7,6	11
Hauteur d'eau dans le pluviomètre en mm	0	38	72	76	89	107	127	129	144

de fonction. Dans la version du problème proposée en sixième les valeurs étaient différentes de celles exposées précédemment. La hauteur critique est de 130mm et le tableau obtenu est donné ci-dessus.

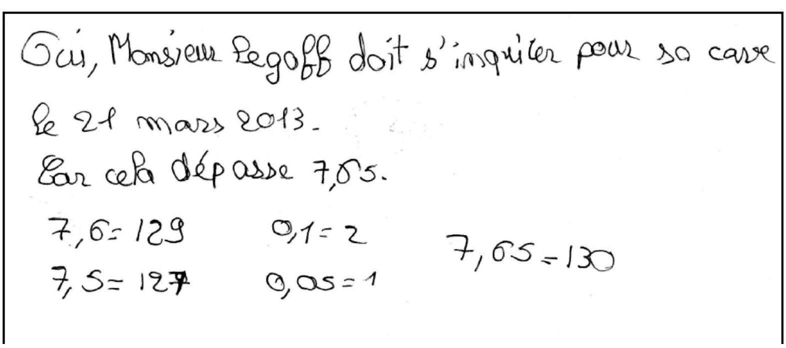
Dans cette version la pluviométrie la plus élevée est prévue le 21 mars, elle est de 9 L/m² alors qu'elle reste inférieure à 7,6 sur les autres dates. La question est donc de savoir si entre 7,6 L/m² et 11 L/m² la hauteur de 130mm est atteinte à 9L/m². Par rapport à notre situation présentée précédemment qui proposait une interpolation par prolongement, il s'agit ici d'une interpolation sur un intervalle.

Nous allons analyser les productions des différents groupes.

Groupe A : les élèves ont identifié dans les deux tableaux les dates du 10 mars et du 11 mars qui correspondent à 11 et 7,6 L/m² et ils ont fait une croix pour repérer la date du 21 mars sur la feuille distribuée aux élèves avec les données du problème. Ils ont donc bien identifié l'intervalle sur lequel il faut travailler.

Ils n'ont pas organisé les données dans un nouveau tableau mais ils concluent par le texte ci-dessous.

On remarque que le groupe met les données en relation en utilisant le symbole d'égalité entre les deux grandeurs. Les unités ont disparu, les élèves travaillent donc sur des nombres. Cette écriture pourrait être rapprochée de $f(7{,}6)=129$ et $f(7{,}5) = 127$.


Oui, Monsieur Legoff doit s'inquiter pour sa cave
le 21 mars 2013.
Car cela dépasse 7,65.
7,6= 129   0,1= 2   7,65=130
7,5= 127   0,05=1

Texte 1 : Pluviométrie 6ème groupe A

En face ils écrivent la correspondance liée aux variations. En effet 0,1 correspond à la variation de 7,5 à 7,6 et 2 à celle de 127 à 129. Il s symbolisent donc ici qu'une variation de 0,1 pour l'une correspond à une variation de 2 pour l'autre. Enfin ils utilisent la proportionnalité des écarts pour dire qu'une variation de moitié, donc de 0,05 de l'une correspond à la variation de moitié de l'autre, c'est à dire 1. Ce qui donne que 7,6 augmenté de 0,05 correspond à 129 augmenté de 1. Comme 7,65 correspond à 130 et que la hauteur maximum doit être de 130mm, les élèves concluent que dès que la pluviométrie dépasse 7,65 L/m², il y a un risque d'inondation.

Groupe B : Ce groupe conclut aussi au risque d'inondation. Il fournit le compte-rendu ci-dessous.

Ce groupe s'intéresse aussi au voisinage de 130mm et donc recopie les valeurs prises les 7 et 11 mars. Ces élèves mettent en relation les deux grandeurs en utilisant aussi le signe d'égalité. Ici, l'unité est conservée pour la première grandeur et elle ne figure pas pour la seconde. De plus, la date est indiquée. La

Calcul:

7 mars : 127 mm = 7,5
11 mars : 129 mm = 7,6

127 mm = 7,5 L

Il y a une intervale de 2 mm entre la quantité d'eau du 7 mars (127 mm) et celle du 11 mars (129 mm).

Selon la météo (celle-ci ne se trompe pas), la quantité d'eau en L par m² du 7 mars (7,5) et celle du 11 mar (7,6) a une intervale de 0,10.

~~Donc l'intervalle entre 1~~

Texte 2 : Pluviométrie 6ème groupe B

ligne suivante fait apparaître la même égalité sans la date et avec l'unité (on lit :7,5L). Cette ligne est effacée puis recopiée en dessous, on peut lire 7,54L mais cette valeur ne semble pas correspondre à un calcul. Comme le groupe A, ce groupe s'occupe ensuite des variations. Le raisonnement n'est pas mené à son terme mais dans la partie qui est rayée, on voit que les dates sont sans doute un obstacle, les élèves ne savent pas vraiment comment exploiter les trois variables simultanément.

Groupe C : Cette production est intéressante car les élèves prennent soin de formuler leur problème. Ils n'arrivent pas à s'extraire de la chronologie et ils se focalisent donc sur ce qui se passe du 16 au 21 mars. Ils ne réorganisent pas les données mais ils extraient la partie du tableau correspondant à la période critique. Ils concluent que M.Legoff doit s'inquiéter puisque 9 est supérieur à 7,6 qu'ils identifient comme étant le maximum. Comme le risque est pour une hauteur de 130mm, les élèves concluent que 129mm, obtenu pour 7,6L/m², est le maximum à ne pas dépasser. Ils n'envisagent pas une hauteur de 129,8mm, ils raisonnent sur des valeurs discrètes et non continues. Ils ne se posent pas non plus la question des variations. Trois autres groupes ont le même raisonnement et concluent donc très vite au fait que M.Legoff doit s'inquiéter.

Groupe D : Ce groupe n'a pas rendu l'intégralité de son travail, il a organisé les données dans un tableau regroupant les dates, la pluviométrie et la hauteur d'eau. Ce groupe a ensuite cherché une conversion. Il conclut « Oui, monsieur Legoff doit s'inquiéter car : 3,4 L = 3400 ml ». On peut supposer que les élèves ont tenu compte de la taille des nombres pour chercher un système de conversion mais que ces calculs n'ont pas abouti.

Groupe E : Comme l'équipe précédente, le problème est posé : « Il faut trouver combien

Il faut trouver combien il y aura de m² à 130m

le 7 et le 12 mars, il y a eu 127 et 107 mm de pluie, donc 20mm
de différence. En m² il y a eu 7,5 et 4,6 m² de pluie
donc 2,9 de différence. 2,9 m² = 20 mm.
On cherche pour 130, 3mm de plus de 127mm (7,5m²)
3mm = ? m²
(2,9 ÷ 20) × 3 = 0,435
0,435 + 7,5 = 7,935
À partir de 7,935 m² de pluie, la cave s'inondera,
le 21 mars, le jour de son retour
(9m²)

Texte 3 : Pluviométrie 6ème groupe E

il y aura de m² à 130m ». Ce groupe utilise les données des 7 et 12 mars sans que ce choix soit explicité. On peut supposer qu'il choisit les données proches des 130mm mais alors, pourquoi ne pas utiliser la donnée du 11 mars qui est de 129mm ? Peut-être les calculs ont-ils semblé plus faciles puisque les écarts sont plus importants. Les élèves ont calculé les variations et symbolisent la proportionnalité des accroissements par l'égalité 2,9 m² = 20mm. Ils utilisent ensuite la proportionnalité pour calculer la variation correspondant à 3mm et obtiennent que la hauteur de 130mm correspond à 7,935 L/m², ce qui leur permet de conclure. Les unités sont indiquées même si elles sont erronées, on peut penser que c'est un outil de contrôle pour vérifier de quelle grandeur il s'agit à chaque étape.

Groupe F : Ce groupe a rendu un bilan constitué de deux courbes collées sur une feuille recto- verso, ce qui ne permet pas de les comparer entre elles. La première est le graphique représentant la hauteur en mm dans le pluviomètre en fonction de la date du 1er au 15 mars. Le second prolonge la courbe du 16 au 21 mars. Le premier point a 17 comme abscisse. Il semble y avoir un décalage et que la dernière valeur est manquante. Si bien que le 16 qui se retrouve à l'origine du repère est relié au point suivant. Le même type de décalage est visible sur le premier graphique qui a été gommé et refait. Par contre les ordonnées des points correspondent globalement à la pluviométrie en L/m² à laquelle serait appliqué un coefficient multiplicateur voisin de 15. Nous pouvons alors nous demander d'où vient ce coefficient ? Une hypothèse est que le groupe a cherché un coefficient de proportionnalité entre la pluviométrie et la hauteur d'eau.

Si on compare les quotients $\frac{114}{11} \approx 13{,}09$ et $\frac{129}{7{,}6} \approx 16{,}97$, mais la moyenne donne effectivement 15,03. Par contre nous n'avons aucun indice pour savoir si les élèves ont ordonné les données pour se focaliser sur ces valeurs. Le calcul des quotients est très différent pour $\frac{38}{0{,}2}$ on obtient 190 par exemple.

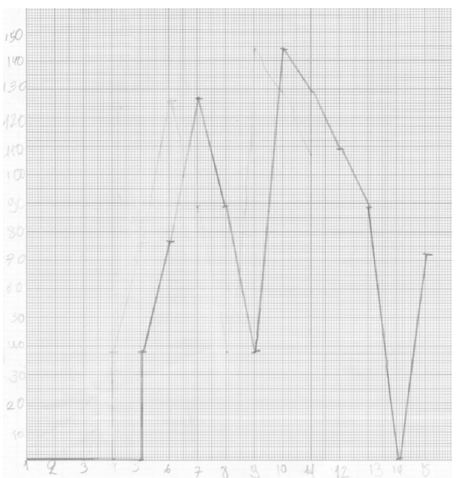
Peut-être ont-ils testé tous les quotients et gardé une valeur moyenne correspondant aux environs de 130. Voici, dans le tableau ci-contre, les valeurs obtenues par application du coefficient multiplicateur de 15. On retrouve les ordonnées du second graphique avec un décalage d'une abscisse...

En conclusion, la situation proposée dès la sixième prouve que la procédure qui consiste à étudier la covariation est mise en application par les élèves et donc que le concept d'affinité est déjà outil sans que l'objet n'ait été étudié. L'obstacle du continu par rapport au discret apparaît dans la moitié des groupes. Il n'est pas lié au fait d'avoir un point de vue global ou local sur la fonction, les élèves étudient effectivement la covariation au voisinage du point (7,6 ; 129), donc localement, mais ils n'envisagent pas de valeurs intermédiaires entre 129 et 130. Nous pouvons aussi remarquer que les élèves peuvent traiter les données comme des nombres et donc indépendamment des unités, ce qui ne signifie pas qu'ils élaborent un modèle théorique.

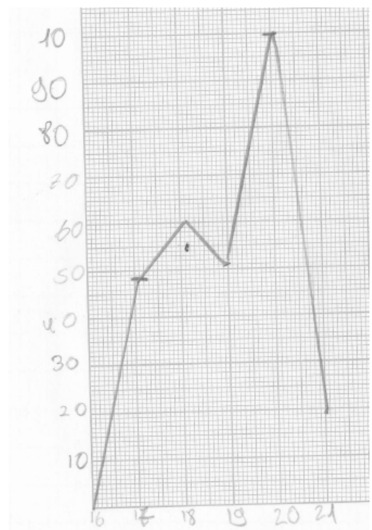
7. — Analyse des expérimentations en classe de 5ème

La situation a été proposée dans deux classes de 5ème. La consigne donnée est « Vous répondrez à la question posée en ayant soin d'argumenter votre réponse. Si vous ne trouvez pas de réponse satisfaisante, vous indiquez vos difficultés, vos essais, vos erreurs, les pistes que

Pluviométrie	3,2	4	3,4	7	1,2	9
Ordonnée	48	60	51	105	18	135



Graphique 2: Pluviométrie 6ème groupe F recto

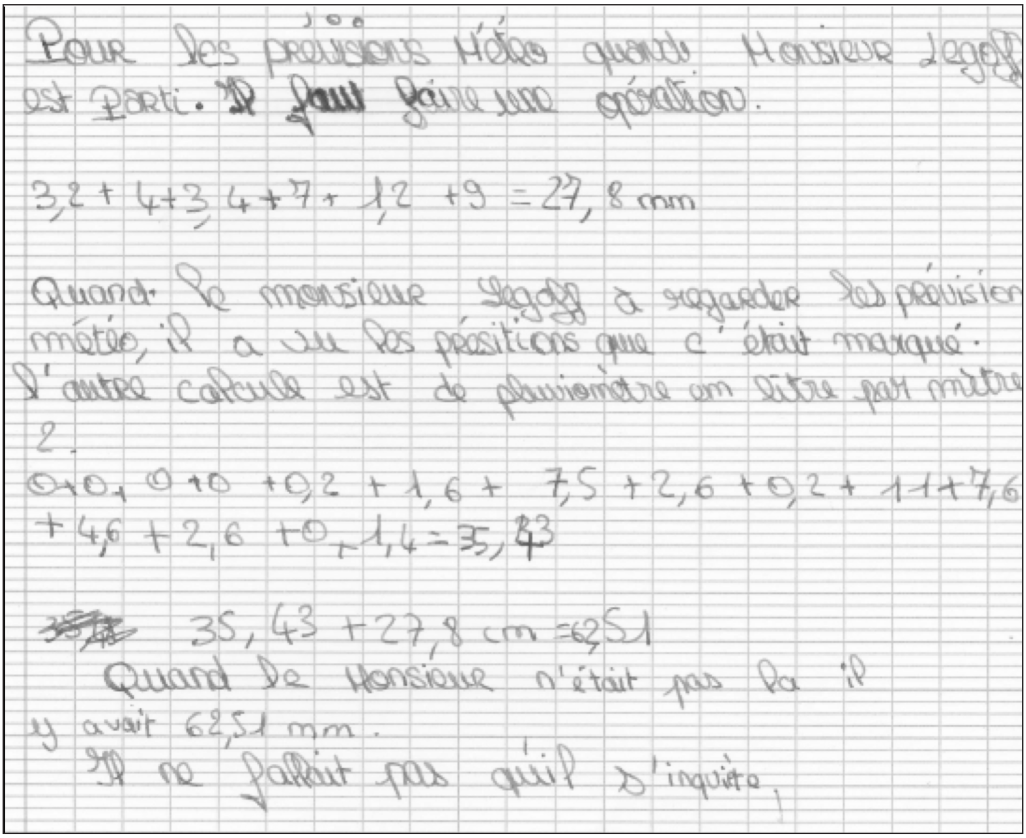


Graphique 3 : Pluviométrie 6ème groupe F verso

vous avez suivies avec ou sans succès. » Le travail est individuel.

Différentes procédures sont apparues à ce niveau :

Procédure somme : Les élèves ont eu l'idée d'additionner les hauteurs d'eau dans le pluviomètre. Il n'était pas précisé dans cette version du texte du problème que le pluviomètre est vidé à chaque prise de mesure, les élèves ont avec raison pensé que l'eau s'accumule de jour en jour et ils n'ont pas posé la question à l'enseignant. Nous avons modifié ultérieurement l'énoncé du problème pour éviter d'intervenir pour apporter cette précision à l'oral. Par contre ce qui est intéressant, c'est que les élèves ont additionné toutes les hauteurs du 1er au 15 mars sans se préoccuper de ce qui se passerait ensuite puisqu'ils ont déjà leur conclusion. Le tableau de pluviométrie n'a donc pas été utilisé par certains élèves qui peuvent conclure : « Oui, il devrait s'inquiéter car si on additionne tout ce qui va tomber, ça fera 909 mm. » alors que d'autres ont additionné les valeurs de la pluviométrie avant et après le départ de M.Legoff, comme l'a fait par exemple l'élève B2 ci-dessous. Certains font les deux calculs en présentant cela comme deux essais et arrivent donc à une contradiction. Un autre encore additionne



Pour les prevision météo quand Monsieur Legoff est parti. Il faut faire une opération.

3,2 + 4 + 3,4 + 7 + 1,2 + 9 = 27,8 mm

Quand le monsieur Legoff a regarder les prévision météo, il a vu les précitions que c'était marqué. L'autre calcule est de pluviomètre en litre par mètre 2.

0 + 0, 0 + 0 + 0,2 + 1,6 + 7,5 + 2,6 + 0,2 + 11 + 7,6 + 4,6 + 2,6 + 0, 1,4 = 35,43

35,43 + 27,8 cm = 62,51

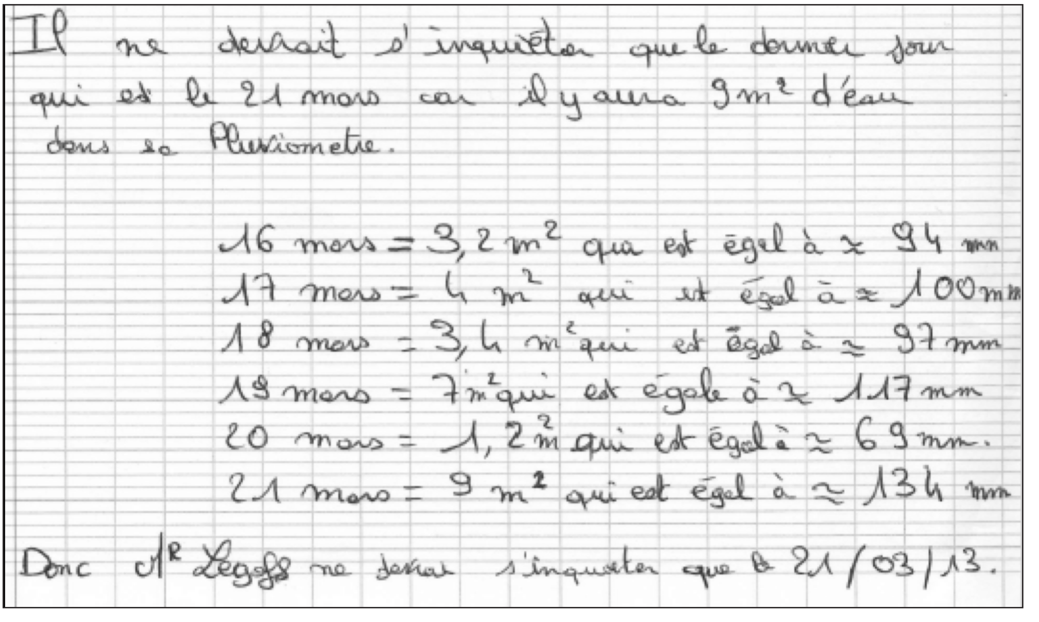
Quand le Monsieur n'était pas la il y avait 62,51 mm.

Il ne fallait pas quil s'inquite.

Texte 4 : Pluviométrie 5ème élève B2

les valeurs de la pluviométrie et trouve 27,8mm pour la période du 1er au 15 mars. Ensuite comme M.Legoff part 6 jours, il multiplie ce résultat par 6 pour prévoir la hauteur d'eau dans la cave, il conclut qu'il y aura $27{,}8 \times 6 = 166{,}8$ soit 1,66m d'eau dans la cave. Il y a ici confusion entre les différentes grandeurs. En fait beaucoup d'élèves écrivent qu'ils ne savent pas ce qu'il faut calculer. Ils font des essais, mais la somme des hauteurs donne 909mm ce qui semble beaucoup, celle des valeurs de pluviométrie donne 67,1 L/m² ce qui semble peu. Comme les unités ne sont pas usuelles, les élèves sont nombreux à penser qu'une conversion doit permettre d'exprimer ce résultat en mm. Un élève écrit par exemple que 67,1 m² fera 671mm d'eau.

Procédure conversion : Une autre procédure a consisté à chercher une conversion entre deux unités. Les élèves ont sans doute considéré que cet outil étudié en classe de 5ème était à privi-



Il ne devrait s' inquiéter que le dernier jour qui est le 21 mars car il y aura 9m² d'eau dans sa Pluviometre.

16 mars = 3,2 m² qui est égal à ≈ 94 mm
17 mars = 4 m² qui est égal à ≈ 100mm
18 mars = 3,4 m² qui est égal à ≈ 97 mm
19 mars = 7m² qui est égale à ≈ 117 mm
20 mars = 1,2 m² qui est égal à ≈ 69 mm.
21 mars = 9 m² qui est égal à ≈ 134 mm

Donc Mr Legoff ne devrait s'inquiéter que le 21/03/13.

Texte 5 : Pluviométrie 5ème élève A5

légier. Ils sont nombreux à avoir posé des tableaux de conversion qu'ils utilisent pour exprimer les L en mm ou m². Ces conversions peuvent intervenir en début de calcul ou après quelques essais. Certaines peuvent être complexes et passent par la recherche d'une relation de proportionnalité, la multiplication par des puissances de 10, des calculs plus ou moins évoqués. Tous résument leur travail par des correspondances comme par exemple l'élève A5 ci-dessus.

Proportionnalité **:** Les élèves qui utilisent cette procédure utilisent les propriétés de linéarité en écrivant par exemple que si pour 1,6L/m² on a 76mm pour le double 3,2L/m² on aura 76 × 2 = 152 soit 152mm. Si les valeurs obtenues semblent ne pas correspondre, les élèves n'hésitent pas à jouer sur la virgule pour interpréter le 152 obtenu en 15,2mm. Une élève propose par exemple de multiplier la pluviométrie par 9 et de comparer à 130mm. Le coefficient 9 étant choisi car il correspond à la pluviométrie au 21 mars. On constate que cette procédure est utilisée comme une technique sans que le sens soit interrogé par rapport aux valeurs obtenues ou traitées.

Explication physique : Un élève explique que « Monsieur Legoff ne doit pas s'inquiéter car l'eau va descendre au fur et à mesure grâce à la chaleur haute de la prévision météo car elle va de 1,2 à 9mm. » Cette explication laisse entendre une confusion entre pluviométrie et température. En tout cas, elle cherche à tenir compte d'un phénomène physique réel qui est l'évaporation. La difficulté dans ce type de contexte est la simplification nécessaire de la situation pour pouvoir la traiter. Cette modélisation d'un point de vue des sciences physiques est implicite alors que nous cherchons à expliciter un modèle mathématique. Deux théories sont donc utiles alors que nous ne tenons compte que d'une seule dans la classe de mathématiques.

L'étude d'une seule donnée : Certains élèves concluent à partir d'une seule donnée en disant qu'ils n'ont trouvé aucune date où la pluviométrie est de 130mm.

L'étude des variations : Cette étude peut amener les élèves à parler de proportionnalité mais d'autres en restent au constat et à la comparaison comme en témoigne la production de l'élève A6 (ci-dessous).

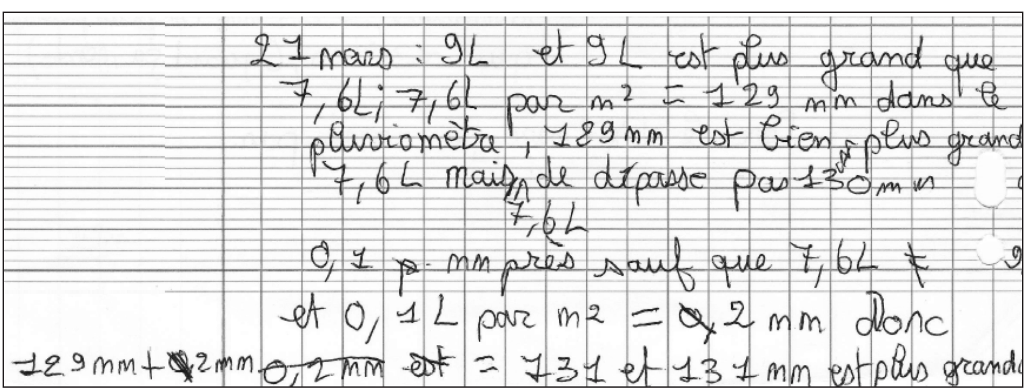
En conclusion, nous pouvons constater que le tiers de l'effectif des élèves de 5ème a utilisé la procédure « *somme* » et un quart les techniques de conversions. Les élèves ont visiblement cherché une technique de calcul mettant en relation des deux séries de valeurs et non les variations. Comparativement à l'expérimentation en 6^{e}, deux hypothèses peuvent être faites. La première est que le travail étant individuel, les échanges entre élèves n'ont pas permis de remettre en cause les représentations erronées comme cela a peut-être été possible en 6^{e} alors qu'ils étaient par groupes de 3 ou 4. La seconde est que les élèves plus habiles dans les procédures techniques cherchent systématiquement à réinvestir ce qu'ils maîtrisent au détriment parfois du sens.

8. — Qu'en est-il plus tard dans la scolarité ?

Cette activité a été proposée à différentes classes de 3ème ou de 2nde ainsi qu'à des étudiants de master MEEF 1er degré ou des étudiants post-bac en apprentissage. L'observation des séances a permis de constater que les différents groupes ont tous eu le même parcours dans la recherche de ce problème. Ils sont passés successivement par les étapes suivantes :

1 la recherche d'un changement d'unités pour obtenir des mesures dans la même unité

2 l'organisation des données dans un seul tableau en ordonnant les données et en oubliant les dates


21 mars : 9L et 9L est plus grand que
7,6L ; 7,6L par m² = 129 mm dans le
pluviomètre, 129 mm est bien plus grand
7,6L mais ne dépasse pas 130 mm
7,6L
0,1 p. mm près sauf que 7,6L ≠
et 0,1 L par m² = 0,2 mm donc
129 mm + 0,2 mm ~~0,2 mm~~ ~~est~~ = 131 et 131 mm est plus grand

Texte 6 : Pluviométrie 5ème élève A6

3 la détermination de l'intervalle qu'il faut étudier

4 le calcul par produit en croix et la vérification par le graphique ou l'inverse ou encore par plusieurs calculs.

5 le doute quant à la procédure.

6 le calcul des variations

7 le calcul par la proportionnalité des écarts au voisinage de la valeur critique

8 le contrôle du résultat au regard de l'ensemble des données

Ces différentes étapes et la constante des observations attestent que le milieu est favorable à un déplacement d'une approche par le processus, à une approche par la covariation. En effet, les élèves et les étudiants parviennent à l'étape 6 du fait que le milieu invalide les autres procédures tout en donnant une idée de la solution attendue. La spécificité de ce problème est qu'il nécessite de mettre en relation différentes données pour permettre un traitement et qu'aucune technique ne peut être directement appliquée pour sa résolution. La solution ne dépend pas uniquement des résultats des calculs puisque nous appliquons un modèle et que ce modèle a ses limites. Les arguments proposés par les élèves ou les étudiants montrent bien en quoi le contexte joue un rôle dans la résolution. Les mathématiques permettent de donner un élément supplémentaire dans la prise de décision mais elles n'offrent pas une solution exacte démontrable. En particulier il faut noter que la pluviométrie est estimée, c'est une prévision qui peut très bien être dépassée. Le calcul montre que nous serons très proches du seuil, il est donc impossible de certifier que nous ne dépasserons pas la hauteur limite. Le phénomène n'est pas lié aux seules précipitations : le sol peut être humide et moins drainer l'eau à partir d'un certain moment, l'évaporation doit aussi jouer un rôle. Par ailleurs, les élèves ont expliqué que le risque ne peut pas être mesuré si on ne sait pas ce qui doit être protégé dans la cave. Si M. Legoff a vraiment besoin de protéger sa cave, il lui suffit d'acheter une pompe pour ne plus avoir de craintes.

Du côté des conditions, on peut voir que les connaissances nécessaires sont limitées au niveau des techniques, par contre la représentation du problème est très liée à une connaissance externe à l'école issue de l'expérience, qui est que plus il pleut, plus la hauteur d'eau augmente dans le pluviomètre, avec une idée de continuité dans le phénomène qui semble naturelle. Les élèves identifient la relation fonctionnelle et la considèrent sous l'angle de la variation du fait de cette représentation.

Il s'agit donc de construire un modèle pour représenter et traiter la manière concomitante dont les deux grandeurs vont croître. Pour les élèves qui sont convaincus qu'il s'agit d'une même grandeur dans deux unités différentes, la recherche d'un processus de conversion les amène à chercher un coefficient multiplicateur donc une proportionnalité entre les deux séries de valeurs. En effet, toutes les conversions d'unités rencontrées par les élèves au 1er degré et au collège se font par application d'un coefficient de proportionnalité. Le milieu est suffisant pour remettre en cause cette procédure, une perception statique du phénomène ne permet pas de résoudre le problème. Une perception globale du processus est nécessaire pour voir que les deux grandeurs varient bien dans le même sens mais que plus la pluviométrie augmente, plus la hauteur d'eau dans le pluviomètre augmente lentement. Pour poser le problème, il faut d'une part avoir une vision globale du processus, et d'autre part un traitement local des données. Nous avons besoin ici de décrire le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente et de généraliser ce comportement.

Ce changement de point de vue a lieu car la situation permet des rétroactions qui invalident les représentations erronées. La première idée étant de travailler sur les conversions, les élèves se perdent dans des calculs qu'ils n'arrivent pas à interpréter. Ils partent de l'expérience qu'ils ont de la pluie et disent que s'il pleut sur une surface, la hauteur d'eau est la même sur toute la surface. La pluviométrie est la mesure de cette hauteur d'eau, si on l'exprime en mm, on peut vérifier que 1L/m^2 correspond à 1mm. On peut donc considérer que les deux grandeurs sont dans la même unité, la question est alors de savoir pourquoi nous n'avons pas les mêmes valeurs. L'image d'un pluviomètre de forme conique peut aider à concevoir que la hauteur d'eau n'est pas proportionnelle au volume.

L'étape suivante est induite par l'intuition que le risque ne va apparaître qu'autour de la valeur 11 qui est la pluviométrie prévue le 21 mars. L'argumentation prend appui sur une étude rapide du comportement des deux variables. A ce stade, certains élèves peuvent déjà proposer une réponse justifiée par une estimation de la prise de risque (« Il n'a qu'à rentrer plus tôt pour être tranquille. »). Le doute rend nécessaire d'établir la concomitance des variations entre les deux grandeurs. Cela passe par le rapprochement des grandeurs dans un même tableau. Une fois ce rapprochement effectué l'hypothèse de la proportionnalité est vite évacuée, il faut donc décrire le comportement de la fonction. C'est à ce stade que plusieurs registres peuvent être utilisés : le tableau ordonné, le graphique. Le graphique montre la croissance de la fonction mais la courbe monte de plus en plus doucement. Ce constat peut être rapproché du calcul des variations à partir du tableau. Ces variations sont le plus souvent indiquées par les élèves par des flèches opérateurs. Les débats dans les groupes amènent les élèves à envisager une modélisation du comportement au voisinage de 8. Sans le formaliser, les élèves considèrent que la fonction peut être confondue avec une fonction affine au voisinage de cette valeur et donc qu'on peut supposer que la courbe se prolonge par un segment ou que les variations peuvent être les mêmes pour les valeurs suivantes.

La modélisation est donc nécessaire pour résoudre le problème et l'approximation affine se justifie par la proportionnalité des écarts. La notion est donc utilisée comme outil sans avoir été objet d'étude. La formalisation par contre est difficile puisque les élèves ne disposent pas de notations conventionnelles pour désigner les variations et opérer sur ces variations. La nécessité apparaît beaucoup plus avec le besoin de prolonger le phénomène que dans l'interpolation linéaire sur un intervalle. Sans doute l'idée de prolonger amène à poser des hypothèses et ouvrir des possibles alors que sur un intervalle où certaines données sont déjà connues, ces mêmes hypothèses sont considérées comme des « erreurs » par rapport à une réalité que l'on peut observer. Dans le premier cas, on ne sait pas si c'est vrai mais on pense que c'est possible, dans le second on sait que c'est faux. Le vocabulaire utilisé montre des analogies avec des grandeurs associées à des taux de variation comme la vitesse (« Ça monte de moins en moins vite. »).

Conclusion

Ces quelques exemples permettent d'identifier certaines compétences indispensables pour modéliser des phénomènes de covariations entre grandeurs par des fonctions affines qu'il s'agirait de travailler au cycle 4 :

— Les élèves doivent savoir identifier les grandeurs étudiées.

— Les élèves doivent avoir une approche globale des variations des deux grandeurs et de la concomitance entre ces variations. Cette approche semble intuitive pour quelques élèves dans toutes les classes ayant participé aux expérimentations. Il semble qu'elle soit plus fréquente en début de collège mais que non outillée par des notations et non reprise par les enseignants, cette approche soit peu à peu abandonnée.

— Les élèves doivent poser des hypothèses sur la continuité du phénomène et sa monotonie sur un intervalle d'étude suffisamment petit pour utiliser la proportionnalité des écarts.

A travers nos différentes expérimentations, nous avons pu adapter la grille d'analyse de Passaro (Passaro, 2016) et identifier sept unités de raisonnement qui interviennent dans la modélisation d'un phénomène par une fonction affine dans une approche covariationnelle. Ces unités sont résumées dans le tableau en annexe. Elles évoluent de l'identification des grandeurs à la fonction théorique en passant par la prise en compte de la concomitance des variations. Dans cette schématisation, les grandeurs sont notées x et y. On note Δx un accroissement de x. La flèche $\rightarrow$ symbolise une relation fonctionnelle. Nous proposons de penser une progressivité dans l'enseignement de l'affinité qui tienne compte de la nécessité de mobiliser ces unités d'enseignement et de tenir compte dans l'analyse des productions des élèves des retours nécessaires à des unités inférieures pour pouvoir penser les unités suivantes. L'objectif étant d'amener les élèves à reconnaître un phénomène pouvant être modélisé par une fonction affine par l'identification de ce phénomène comme continu monotone avec un taux de variation constant sur un intervalle déterminé.

Bibliographie

Chesnais, A., & Munier, V. (2015). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique interdidactique mathématiques/physique. In *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM* (pp. 212–237). Paris. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01317134/document

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel. *IREM*, (67), 33–61.

Lagrange, J.-B., & Artigue, M. (2009). Students'activities about function at upper secondary level : a grid for designing a digital environment and analysing uses. In *Preceedings of 33rd Conference of the international Groupe for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 465–472). Grèce: PME.

Passaro, V. (2016). Analyse du raisonnement covariationnel et des situations qui en favorisent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans au Quebec. In *Actes de la 18ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. à paraître). ARDM.

Tran Kiem, M. (2012). Une approche expérimentale des fonctions au lycée avec le logiciel Casyopée. *Petit X*, (88), 49–74.

ANNEXE 1

Situation expérimentée

Monsieur Legoff, habitant du Finistère Nord, a installé un pluviomètre dans son jardin. Chaque jour il mesure la hauteur d'eau en millimètres dans son pluviomètre et ensuite il le vide. Il a relevé dans un tableau la hauteur d'eau de pluie dans son pluviomètre du 01 mars au 15 mars 2014.

Dates	01/03	02/03	03/03	04/03	05/03	06/03	07/03	08/03	09/03	10/03	11/03	12/03	13/03	14/03	15/03
Hauteur d'eau en mm dans le pluviomètre	0	0	0	0	38	76	127	89	38	117	129	107	89	0	72

Monsieur Legoff a remarqué que sa cave est inondée quand, sur une journée, la hauteur d'eau dans son pluviomètre atteint 142 mm. Il doit s'absenter du 16 au 21 mars. Avant de partir, il consulte un site météo et il obtient les renseignements suivants :

Monsieur Legoff doit-il s'inquiéter pour sa cave ?

Dates	Pluviométrie en litre par m^2
1 mars	0
2 mars	0
3 mars	0
4 mars	0
5 mars	0,2
6 mars	1,6
7 mars	7,5
8 mars	2,6
9 mars	0,2
10 mars	6
11 mars	8
12 mars	4,6
13 mars	2,6
14 mars	0
15 mars	1,4
Prévisions météo	
16 mars	3,2
17 mars	4
18 mars	3,4
19 mars	7
20 mars	1,2
21 mars	11

ANNEXE 2

Grille d'analyse des unités de raisonnement

Unités	Description
U1 $x \rightarrow y$	**Identifier une relation fonctionnelle** • identifier les deux grandeurs étudiées • établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence et sens de cette dépendance) • comparer cette relation à des relations fonctionnelles apprises
U2 $\begin{array}{ccc} x_1 & \rightarrow & x_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ y_1 & \rightarrow & y_2 \end{array}$	**Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation** • établir que la grandeur indépendante est variable • établir que la grandeur dépendante est variable • établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs • interpréter la dépendance
U3 $x + \Delta x \rightarrow y + \Delta y$	**Décrire le comportement de la fonction** • qualifier cette variation de manière intuitive • établir le sens de variation de la grandeur dépendante quand la grandeur indépendante augmente • qualifier cette variation au regard du processus
U4 $\Delta x \rightarrow \Delta y$	**Décrire le comportement des accroissements** • considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante, considérer des accroissements de la grandeur dépendante • établir la concomitance entre les accroissements des deux grandeurs • décrire le comportement global de cette concomitance
U5 $\begin{array}{ccc} \Delta x_1 & \rightarrow & \Delta x_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta y_1 & \rightarrow & \Delta y_2 \end{array}$	**Repérer les changements de comportement** • quantifier les accroissements • comparer les accroissements de la valeur dépendante à ceux de la grandeur indépendante • interpréter la dépendance entre les accroissements
U6 $\Delta x_1 \approx \Delta x_2$ $\Delta y_1 \approx \Delta y_2$	**Considérer des intervalles sur lesquels la fonction est continue monotone** • considérer intuitivement une continuité et une monotonie locale • généraliser intuitivement le comportement sur un intervalle • passer à des accroissements plus petits
U7 $x \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$	**Interpréter le changement des accroissements en terme de taux de variation et nommer la grandeur associée** • considérer le taux de variation comme une variable • considérer les variations du taux de variation • considérer le taux de variation comme une grandeur

ANNEXE 3

Différents modèles de pluviomètres proposés par Emmanuel Claisse