DIVERSITE DES METHODES DE RESOLUTION POUR UN MEME PROBLEME

Un exemple en géométrie

Chloée ARENAS
Céline MURPHY
Irem de Montpellier

Résumé : Nous avons proposé à des élèves de seconde un problème de recherche dans le cadre géométrique, afin de mettre en valeur la diversité des raisonnements possibles pour résoudre un même problème, ainsi que la variété des notions mathématiques pouvant être mobilisées. Dans la première partie de cet article, nous présentons la situation choisie, nos motivations et les méthodes de résolution envisageables en classe de seconde. Dans la deuxième partie, nous présentons la mise en œuvre dans deux classes de seconde, ainsi que des éléments d'analyse des travaux des élèves.

Lors de la résolution d'un problème, dans la plupart des cas, plusieurs méthodes de résolutions peuvent être mises en œuvre. Ceci n'est en général pas reconnu par les élèves qui s'attendent à ce qu'à chaque problème corresponde une seule méthode de résolution. De plus, chacune d'entre elles met en jeu des cadres et/ou des objets mathématiques différents. La recherche autour d'un problème est un enjeu et un moteur d'apprentissage. En effet, en plus de travailler des compétences heuristiques, les raisonnements font intervenir un travail sur les notions mathématiques à travers leurs définitions, leurs propriétés et leurs caractérisations.

Dans les bulletins officiels fixant les programmes de mathématiques des classes de lycée, dans la rubrique « Objectif général », quelques points doivent attirer l'attention des professeurs : les élèves doivent être « capables de : modéliser et s'engager dans une activité de recherche ; de conduire un raisonnement, une démonstration ; faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche. ».

Il est donc important d'amener les élèves à réfléchir sur des problèmes nécessitant la recherche et le choix d'un raisonnement. Afin que les élèves trouvant une autre démonstration ou solution que celle proposée par l'enseignant ou un camarade remettent moins en doute leur raisonnement, il nous semble judicieux de proposer des problèmes ayant plusieurs axes de résolutions et d'amener les élèves à argumenter leur choix de méthodes.

Nous soumettons une situation de recherche autour d'un problème classique en géométrie pour sensibiliser les élèves de seconde à cette diversité possible de méthodes de résolution pour un même problème. Dans cet article, nous présentons l'activité choisie et nos motivations pour ce choix. Ensuite, dans une deuxième partie, nous proposons un compte rendu de l'activité à travers les productions écrites des élèves et nous détaillons des modalités pour la phase de mise en commun orale. Pour finir, nous exposons les conclusions et les perspectives ouvertes par ce travail.[1]

1. — Présentation et analyse de la situation choisie

1. *Choix de l'activité*

Nous choisissons de proposer un problème de recherche en géométrie pour lesquelles des raisonnements variés relevant de différents cadres mathématiques sont accessibles pour des élèves de seconde.

Nous considérons que l'alignement de points est un bon candidat. En effet, les possibilités de sa caractérisation sont variées : par l'appartenance à une même droite, par les angles (angle nul ou plat), par l'inégalité triangulaire (cas de l'égalité) ou encore par la colinéarité de vecteurs. Nous avons choisi d'organiser une situation de recherche en appui sur un problème « classique », présents dans divers manuels[2] : voir figure 1 page 29.

Dans ces différents manuels, les énoncés sont tous guidés et par conséquent la dévolution du problème et celle de la preuve y sont inexistantes. A partir de l'étude des différents énoncés proposés, nous dégageons plusieurs façons d'aborder le problème et de le soumettre aux élèves.

— Dans tous les énoncés, l'utilisation de la géométrie repérée est imposée par la donnée d'un repère qui n'est cependant pas le même dans tous les énoncés. Dans notre énoncé, nous choisissons de ne pas évoquer de repère car cela peut inhiber certaines méthodes.

— Deux énoncés consistent en une succession de questions qui aboutissent à l'étude de l'alignement. Les deux autres énoncés annoncent clairement l'objectif soit en commençant par conjecturer l'alignement soit en annonçant explicitement que le but de l'exercice est la preuve de l'alignement, puis ils proposent une démonstration guidée. Dans tous les cas, la question est soit de démontrer soit d'étudier l'alignement des points. Nous posons la question sous forme ouverte mais en orientant les élèves vers la propriété d'alignement de points.

— Dans certains énoncés, la longueur du carré apparaît. Cette donnée est inutile à la résolution du problème qui perd alors une part

1 Inspiré du Travail Scientifique Réflexif de Arenas Chloée et Murphy Céline : Plusieurs raisonnements pour une même résolution - année universitaire 2015-2016 – Directrice de mémoire : Viviane Durand-Guerrier

2 Nous nous appuierons ici sur :
Collection Odyssée - Edition Hatier - Programme 2009- Chapitre : Vecteurs et repère-p°181
Collection Math'x - Edition Didier - Programme 2010- Chapitre : Equations de droites -p°310
Collection Pixel - Edition Bordas - Programme 2009- Chapitre: Coordonnées d'un point- p°173
Collection Pixel - Edition Bordas - Programme 2009- Chapitre: Droites dans le plan - p°191

ABCD est un carré et ABE et CBF sont deux triangles équilatéraux.
Démontrer l'alignement des points D, E et F.

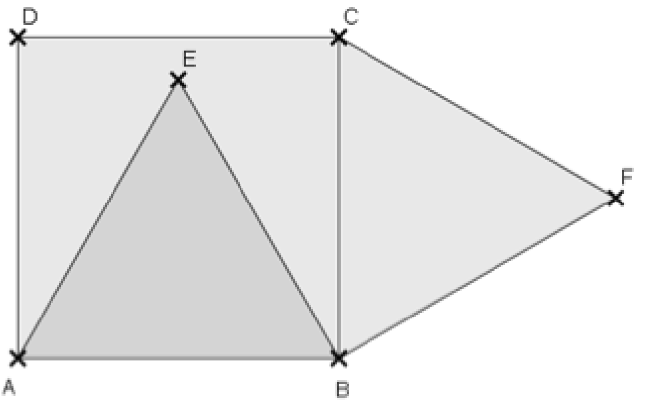


Figure 1 : énoncé du problème mathématique

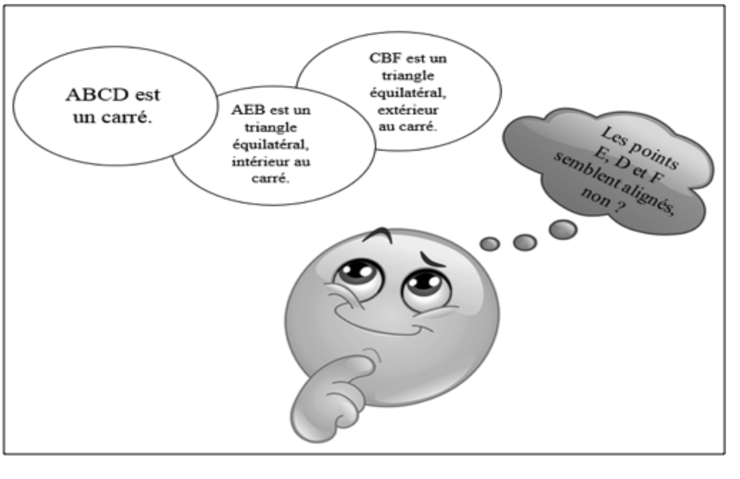


Figure 2: énoncé du problème pour les élèves

de son intérêt. En effet, la propriété à démontrer est vraie pour n'importe quelle longueur du côté du carré et l'élève peut penser qu'il a seulement démontré un cas particulier.

— L'introduction de points supplémentaires est parfois initiée par l'énoncé. Cette étape peut être laissée à la charge des élèves. Par exemple, le nom du pied de la hauteur du triangle équilatéral AEB issue de E n'est pas nécessaire. Ce point est utile pour déterminer les coordonnées de E mais il est intéressant que l'élève se rende compte de lui-même de la nécessité d'introduire cette hauteur s'il s'oriente vers cette méthode.

— Dans tous les problèmes, la figure est donnée. Cette option a des conséquences importantes, que nous estimons contreproductives. Par exemple, en cas de solution par le calcul algébrique, orientation et choix du repère en sont influencés, ce qui empêche les élèves de réfléchir à l'importance du choix d'un bon repère pour simplifier les calculs. Nous préférons ne pas donner la figure car le fait de devoir la construire implique un recul par rapport à l'énoncé et une meilleure entrée dans le sujet. Nous ne cherchons pas à obtenir que les élèves trouvent rapidement une solution, mais plutôt à ce qu'ils réfléchissent vraiment.

A la lumière de ce qui précède, nous proposons un problème de recherche qui se présente avec un énoncé court, sans guidage et sans figure : voir figure 2 de la page précédente.

2. *Différentes méthodes de résolution*

Dans cette partie, nous étudions *a priori* l'activité proposée. Afin de permettre une meilleure appropriation des propriétés de la figure, comme c'est le cas ici, le professeur peut proposer une aide sous la forme d'une fiche contenant plusieurs figures correspondant ou non à l'énoncé (cf. annexe). L'activité est prévue en environnement papier/crayon ; nous faisons en effet l'hypothèse que pour ce problème l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique ne renforce pas la conjecture. Les choix que nous faisons pour les différentes variables didactiques étudiées dans la partie précédente permettent de mettre en œuvre une variété des méthodes de résolution [3] tant dans la géométrie synthétique que dans la géométrie repérée.

2. a *Géométrie non repérée*

Toutes ces méthodes, faisant appel à la géométrie euclidienne synthétique, sont accessibles dès le collège de la 5ème à la 3ème selon les notions, les objets et les théorèmes mis en jeu.

Nous détaillons dans ce paragraphe les méthodes faisant intervenir des angles. Une première méthode consiste à caractériser l'alignement de trois points par la présence d'un angle admettant une mesure de 180 degrés. Une deuxième méthode consiste à montrer l'alignement des points D, E et F en prouvant que $\widehat{CDE}$ et $\widehat{CDF}$ sont de même mesure. Une troisième méthode consiste, à partir de considérations sur les angles, à montrer que les droites (DE) et (EF) sont parallèles (donc confondues car ayant un point commun E).

Dans les démonstrations basées sur les angles, les élèves utilisent naturellement, leurs connaissances des angles du carré et de ceux du

3 Le site http://www.ilemaths.net/sujet-un-exercice-et-14-methodes-195876.html propose 14méthodes de résolutions pour ce problème.

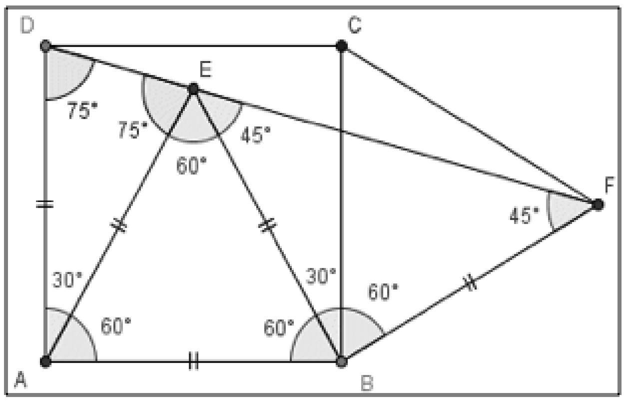


Figure 3 : un angle de 180°

triangle équilatéral. Ils utilisent implicitement le fait qu'un triangle isocèle a ses angles à la base de même mesure, et ils n'ignorent ni la définition d'un triangle rectangle, ni le fait que la somme des angles d'un triangle fasse 180°. Le schéma ci-dessus (figure 3) permet d'avoir un aperçu d'une première méthode.

En plus de connaitre les propriétés citées ci-dessus, les élèves doivent les mobiliser dans un raisonnement à plusieurs étapes :

« On a AD = AE donc le triangle ADE est isocèle en A. Donc ses angles de base $\widehat{AED}$ et $\widehat{ADE}$ ont la même mesure. »

Il faut à partir de la caractérisation du triangle isocèle extraire les deux implications nécessaires à la démonstration.

Pour mettre en place une démonstration synthétique, les élèves doivent au moins tracer deux des trois segments DE, EF et DF qui ne sont pas mentionnés dans la description initiale de la figure. En outre, DF « recouvre » au moins visuellement DE et EF, ce qui ne facilite pas la démonstration. Il apparait ici un obstacle cognitif mais même si cette aptitude à l'invention ne va pas de soi, elle est un des objectifs poursuivis avec notre énoncé non directif.

Dans la figure 4 de la page suivante, nous avons scindé en deux la figure pour rendre compte du raisonnement mis en œuvre qui nécessite de considérer séparément les angles $\widehat{CDE}$ et $\widehat{CDF}$ alors que sur la figure ils sont confondus étant donné que les points D, E et F sont alignés. Cette caractérisation de l'alignement est peu usuelle dans la pratique des mathématiques au collège. Nous faisons l'hypothèse que cette méthode est difficilement mobilisable en classe de seconde.

Pour la méthode liée à la figure 5 (page suivante), l'introduction des deux points H_1 et H_2, pieds de deux hauteurs, est une difficulté pour les élèves. L'objectif est ensuite de mon-

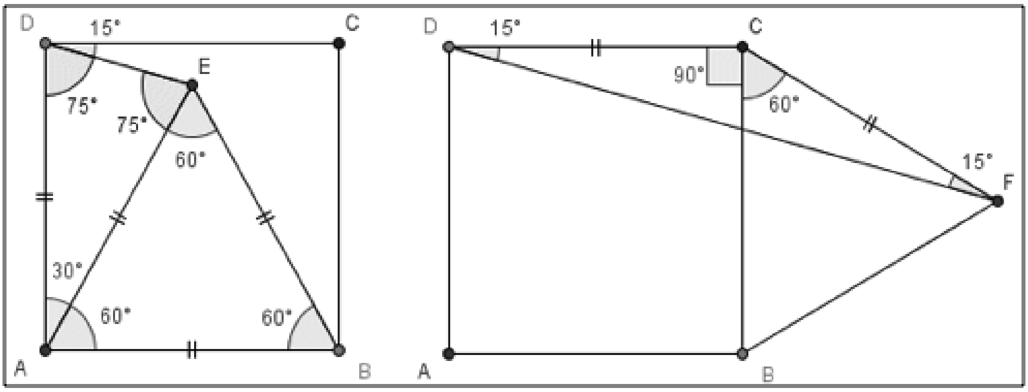


Figure 4 : présence d'un triangle

trer l'égalité des mesures des angles $\widehat{DAH_1}$ et $\widehat{CBH_2}$ par des considérations similaires à celle de la première méthode. Cette égalité démontrée permet de prouver le parallélisme de (AH_1) et (BH_2). Divers théorèmes liant droites parallèles et perpendiculaires permettent de conclure sur le parallélisme de (DE) et (EF). L'alignement est alors démontré grâce à l'appartenance des trois points à une même droite.

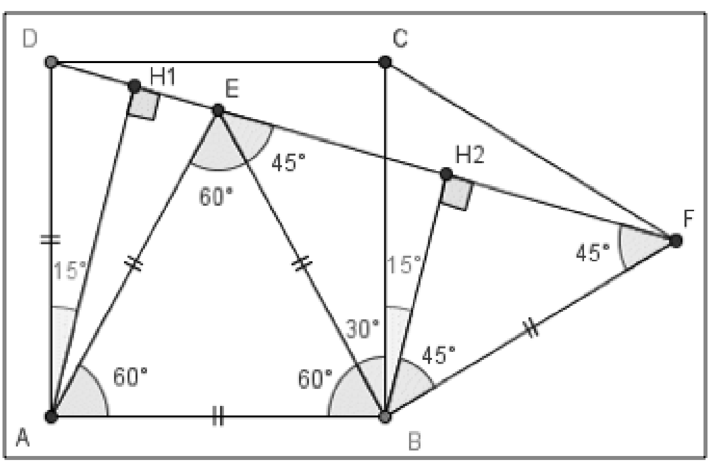


Figure 5 : parallélisme de (DE) et (EF)

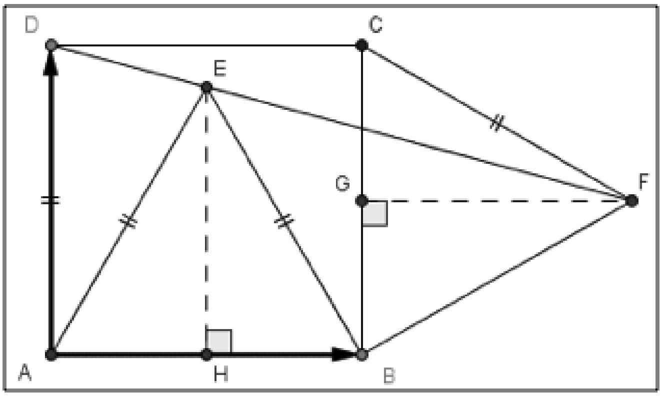


Figure 6 : avec un repère

Les angles font l'objet d'une importante étude au collège, on peut donc envisager que ces méthodes apparaissent encore largement au lycée. Nous faisons l'hypothèse que les élèves sont susceptibles de déterminer les mesures de la plupart ou de tous les angles. Néanmoins, le choix de la caractérisation de l'alignement peut n'être effectué qu'après avoir déterminer quelques angles ; ce qui peut entrainer des difficultés pour la rédaction de la démonstration pour laquelle il faut choisir les éléments nécessaires.

Il existe d'autres méthodes [4] en géométrie non repérée que nous pensons moins accessibles. La caractérisation de l'alignement par la propriété : « Si DF = DE + EF alors les points D, E et F sont alignés » est classique mais nécessite le calcul d'un grand nombre de longueur en appliquant le théorème de Pythagore. Deux autres méthodes susceptibles d'apparaître s'appuient respectivement sur le théorème de Thalès et des égalités d'aires mais les caractérisations de l'alignement liées à celles-ci ne sont pas usuelles. Nous ne développerons pas plus en détails ces deux méthodes.

2. b *Géométrie repérée*

La géométrie repérée est une nouvelle approche de la géométrie en seconde. Les repères utilisés en classe de seconde sont en général au moins orthogonaux. Dans la pratique de la géométrie repérée, il est usuel de faire apparaitre un repère à partir d'un quadrilatère particulier. Ici, le carré ABCD permet visuellement de faire apparaitre le repère (figure 6).

Après avoir choisi un repère, il faut déterminer les coordonnées de chaque point de la figure. Pour certains points, comme E, il est nécessaire de s'appuyer sur les connaissances de géométrie plane (longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral).

4 Ces méthodes ont été détaillées dans notre travail scientifique réflexif.

— Méthode avec des vecteurs colinéaires :

Trois connaissances sur les vecteurs sont principalement mobilisées. Premièrement, les élèves doivent penser au lien entre alignement de points et colinéarité de vecteurs. Deuxièmement, pour prouver la colinéarité de deux vecteurs, les élèves peuvent montrer que leurs coordonnées sont proportionnelles. Pour ce faire, il est nécessaire de déterminer les coordonnées des vecteurs.

La rédaction demande à réécrire le raisonnement dans le sens inverse de celui de la pensée et peut donc présenter une difficulté pour les élèves. Les vecteurs sont une notion nouvelle en classe de seconde donc elle est encore fragile. Par conséquent, malgré la simplicité de cette méthode, cette caractérisation de l'alignement est certainement plus difficile à mobiliser dans le cadre d'un problème ouvert.

— Méthode avec des longueurs :

La caractérisation de l'alignement dans cette méthode est la même que celle mise en jeu en géométrie non repérée, c'est-à-dire le cas de l'égalité dans l'inégalité triangulaire. Pour calculer les diverses longueurs, il est important de choisir un repère orthonormé afin d'utiliser la formule permettant de calculer la distance entre deux points dont on connait les coordonnées.

Seuls les calculs des trois longueurs directement liées à la caractérisation de l'alignement sont à faire. La géométrie repérée permet ainsi d'alléger le raisonnement en géométrie synthétique euclidienne évoqué plus haut.

— Méthodes avec des équations de droites :

Deux caractérisations de l'alignement peuvent être utilisées : l'appartenance d'un des points à la droite passant par les deux autres points ou la présence de deux droites parallèles ayant un point commun. Les calculs mis en jeu dans ces méthodes sont similaires.

La première méthode consiste à déterminer l'équation d'une droite passant par deux points dont les coordonnées sont connues. Les élèves doivent être capables de calculer le coefficient directeur d'une droite à partir de la propriété de proportionnalité des accroissements puis l'ordonnée à l'origine en s'appuyant sur l'appartenance d'un point à la droite. Pour conclure, il suffit de s'assurer que les coordonnées du dernier point vérifient l'équation de la droite. Cette méthode est clairement accessible pour des élèves de seconde ayant travaillé sur les équations de droites.

En géométrie repérée, la caractérisation de l'alignement à partir de la propriété *« Si deux droites sont parallèles et ont un point commun, alors elles sont confondues »* nécessite le calcul des coefficients directeurs de deux des droites formées par les trois points dont l'égalité caractérise le parallélisme. Une autre méthode consiste à déterminer les équations réduites de deux droites permettant aussi de conclure que les deux droites sont confondues. Dans ces deux cas, la conclusion concernant l'alignement est alors immédiate.

Les coefficients directeurs obtenus sont $\sqrt{3} - 2$ pour (DE) ; $\dfrac{-1}{2 + \sqrt{3}}$ pour (DF) et $\dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ pour (EF). Pour des élèves de seconde, il peut être difficile de remarquer l'égalité de ces réels. Il est donc possible que les élèves abandonnent ces méthodes qui auraient pourtant pu aboutir. On peut noter que le choix d'un repère d'origine D présente l'avantage de simplifier les calculs.

Pour conclure sur l'utilisation de la géométrie repérée dans la résolution de ce problème, le programme est largement orienté en ce sens et nous faisons donc l'hypothèse que ce sont principalement ces méthodes qui seront mobilisées par les élèves.

En définitive, toutes les méthodes nécessitent d'introduire de nouveaux éléments pour compléter la figure (angles, points, segments, repères, etc.), ce qui constitue une rupture du contrat didactique. Puisque la construction de la figure est laissée à l'initiative des élèves, l'utilisation de la géométrie synthétique est indispensable pour cette étape. De plus, l'utilisation de polygones usuels pourrait favoriser les méthodes utilisant des notions étudiées au collège, notamment celles employant les angles. Cependant, nous faisons l'hypothèse que la disponibilité des connaissances au programme en géométrie repérée peut inhiber les autres méthodes de résolutions exposées. Ces éléments laissent penser que l'on peut voir apparaitre une relative diversité dans les méthodes mobilisées par les élèves.

3. *Modalité de mise en œuvre*

Comme le travail que nous proposons ici comporte une certaine complexité, il nous semble judicieux d'initier un travail en groupe. Pourquoi faire un travail en groupe ? D'une part, tous les élèves peuvent enrichir le raisonnement nécessaire à la résolution du problème, et ce quel que soit leur niveau en mathématiques. D'autre part, le travail en groupe incite les élèves à formuler leurs idées et à expliciter leurs raisonnements pour convaincre les autres, même si cette modalité cache parfois une partie du travail au professeur. Un des mérites que nous revendiquons pour notre méthode est de leur permettre d'entrer dans le royaume mathématique de ce que sont vraiment les démonstrations.

Ce choix permet également de régler des problèmes d'organisation en limitant le nombre de solutions et en permettant une meilleure gestion des productions des élèves par le professeur lors des phases de mise en commun (Arsac et Mante, 2007). Nous nous sommes appuyées sur les recommandations de ces auteurs pour organiser le travail des élèves en deux temps : une phase de recherche et une phase de mise en commun. La première phase est découpée en trois temps: la donnée par le professeur des consignes initiales, la recherche proprement dite et la rédaction de propositions de solutions. Même s'il est recommandé de peu intervenir auprès des élèves, le professeur doit guider les groupes qui ne parviennent pas à se lancer dans la phase de recherche (proposition de figures et/ou recherche de caractérisation de l'alignement). Une mise en commun des méthodes élaborées dans les groupes avec un débat est prévue. Cette modalité a pour objectif d'aider les élèves à remarquer que les arguments permettent de convaincre leurs camarades et que la démonstration n'est pas un jeu de forme demandé par l'enseignant.

A la fin de cette mise en commun, nous prévoyons d'institutionnaliser les différentes caractérisations de l'alignement (cf. figure 7) :

Pour démontrer que trois points D, E et F sont alignés dans cet ordre, on peut montrer l'une des assertions suivantes :

- $\widehat{DEF}$ est un angle plat.
- DE + EF = DF
- $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
- E appartient à la droite (DF).
- (DE) et (EF) ont même coefficient directeur.

Figure 7

On accentuera sur la validité de certaines uniquement dans ce problème (par exemple le dernier point) et sur le rôle interchangeable de D, E et F dans les trois dernières caractérisations.

Les élèves pourront constater que plusieurs raisonnements ont abouti. En effet, l'enseignant leur fera remarquer qu'ils sont capables de produire une preuve de façon autonome en faisant des choix et que même si au quotidien le professeur impose une méthode d'autres peuvent être possibles. L'autorité magistrale du professeur vient ainsi appuyer le vécu des élèves lors de cette expérience.

2. — L'expérimentation en classe de seconde

1. *Cadre de l'expérimentation*

Cette expérimentation se déroule dans deux lycées de la ville de Montpellier avec deux classes de seconde que l'on nommera classe A et classe B. L'expérimentation a lieu sur une séance de demi-classe et les élèves travaillent en groupe : les groupes sont hétérogènes et sont imposés par le professeur.

Lorsque nous avons proposé cette activité, les deux classes avaient abordé les chapitres concernant l'introduction de la géométrie repérée, la notion de vecteurs et l'étude des droites à partir des équations réduites. Au sein de ces chapitres, l'étude de l'alignement était déjà apparue dans diverses activités. Dans les deux classes, des notions de géométrie euclidienne synthétique étudiées au collège avaient été réinvesties : le théorème de Thalès, le théorème de Pythagore, la symétrie centrale, les quadrilatères et les triangles particuliers, etc. L'étude de ces polygones particuliers avait permis de revenir sur leurs caractérisations en termes de conditions nécessaires et suffisantes. En géométrie repérée, les élèves avaient déjà travaillés avec des repères non orthonormés ou dans des configurations non conventionnelles (axe des abscisses non horizontal). En outre, un problème nécessitant l'introduction d'un repère avait été traité.

Enfin, dans ces classes, des problèmes ouverts ou des problèmes de recherche avaient été proposés à plusieurs reprises dans le cadre géométrique mais aussi dans le cadre des fonctions. Dans la plupart des cas, les groupes devaient fournir un compte rendu écrit de leur travail durant la séance. Cependant, la phase de débat envisagée pour notre expérimentation était une nouveauté.

2. *Premiers éléments d'analyse de l'expérimentation*

Nous présentons dans ce paragraphe une première analyse globale du déroulement. Dans la classe A, tous les groupes introduisent un repère. Les méthodes faisant appel aux connaissances sur les droites sont majoritaires : elles apparaissent dans 6 groupes sur 8. Concernant les deux autres groupes, l'un emploie la caractérisation de l'alignement par les distances tandis que l'autre n'aboutit pas à une solution. Dans la classe B, bien que les méthodes utilisant des droites soient également présentes, les méthodes employées sont plus variées: sur 9 groupes, deux groupes utilisent la caractérisation par les angles, deux groupes la notion de colinéarité de vecteurs, un groupe l'inégalité triangulaire et quatre groupes la caractérisation de l'alignement par l'appartenance à une même droite.

Nous revenons dans ce qui suit sur les effets liés au choix concernant « donner une figure ou non ». Le début de la recherche consiste à récapituler les informations sur une figure liée au problème. Le choix de ne pas proposer celle-ci s'est révélé être à double tranchant. Comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, la construction de la figure permet une mise en activité rapide de tous les élèves.

De nombreuses propositions apparaissent permettant aux élèves de s'approprier le problème. Néanmoins, la réalisation de la figure peut conduire à deux types d'erreurs. La première erreur consiste à placer le sommet du triangle équilatéral intérieur au carré au milieu du côté opposé.

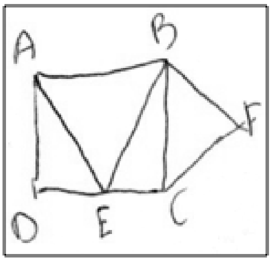


Figure 8 : E placé sur [CD]

La deuxième erreur plus marginale consiste à tracer le carré ABDC au lieu de ABCD. En outre, suite à des erreurs de construction ou à des imprécisions de tracé, certains élèves ne conjecturent pas l'alignement des points :

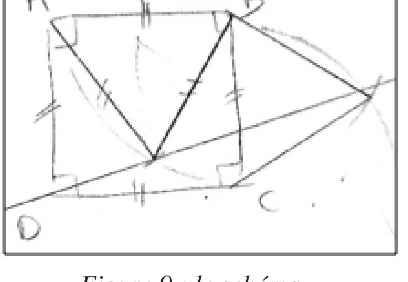


Figure 9 : le schéma, obstacle à la conjecture

Nous souhaitions aussi laisser le tracé de la figure aux élèves pour qu'ils puissent avoir la liberté d'orienter la figure. Trois orientations sont apparues (cf. figure 10) ; cependant cela a parfois considérablement compliqué les calculs.

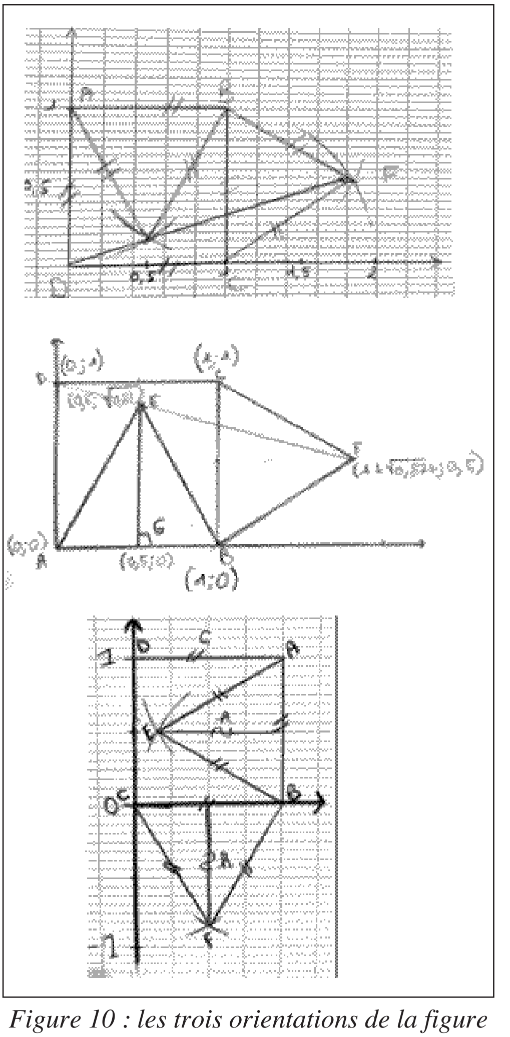


Figure 10 : les trois orientations de la figure apparues dans les classes

Dans la classe B, comme cela avait été envisagé dans l'analyse *a priori*, le professeur a fait le choix de proposer différentes figures vérifiant ou non les propriétés mentionnées dans l'énoncé (cf. annexe) aux groupes pour lesquels cela semblait nécessaire afin qu'ils puissent s'engager dans l'activité. Au vu du déroulement de l'activité dans les deux classes, ceci s'est révélé un choix judicieux ; les quelques figures à trier ont permis aux élèves de se plonger dans le problème tout en ne parasitant pas la nécessité de prouver l'alignement des points.

3. *Analyse des productions en géométrie non repérée*

Concernant ces méthodes, seules celles faisant intervenir les angles apparaissent. La troisième méthode sur les angles n'apparaît pas, en effet comme prévu dans l'analyse *a priori*, l'introduction de nouveaux points n'est pas naturelle chez les élèves car c'est une rupture avec le contrat didactique usuel. Parmi les autres méthodes de géométrie non repérée, celles s'appuyant respectivement sur le théorème de Thalès et le calcul d'aires sont initiées une fois dans chacune des classes. Pendant la phase heuristique, la présence de parallèles dans la figure amène certains élèves à penser au théorème de Thalès étudié au collège. D'autre part, l'idée d'employer le calcul d'aire est liée aux problèmes de modélisation par des fonctions, étudiés de façon récurrente. Cependant, ces pistes sont abandonnées par les élèves qui s'orientent vers d'autres méthodes.

Nous nous intéressons ci-dessous aux deux productions utilisant la notion d'angle. La caractérisation de l'alignement par les angles semble maitrisée par ces élèves dont les méthodes aboutissent. Un des groupes produit une démonstration synthétique et sans erreur de raisonnement employant les diverses propriétés des angles des triangles particuliers. Ce groupe montre une compétence liée à l'économie de travail. Concernant l'autre groupe, comme nous pouvons l'observer sur la figure 11 ci-dessous, les élèves déterminent tous les angles sans faire le tri entre ceux qui sont nécessaires et ceux qui ne le sont pas. Ceci provoque une difficulté lors de la rédaction de leur raisonnement car l'ordre dans lequel les angles sont déterminés et la nécessité de chacun d'eux est à réfléchir à nouveau. On peut noter que dans ce cas des détours complexes pour déterminer certains angles apparaissent.

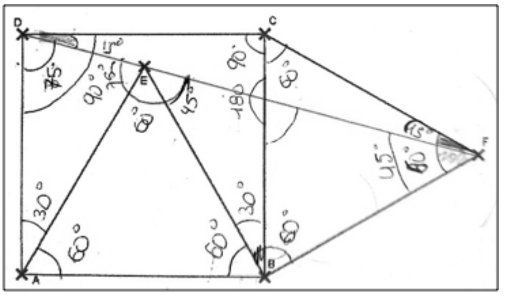


Figure 11 : schéma du raisonnement avec les angles

Nous relevons deux erreurs de raisonnement. Tout d'abord, les élèves déterminent l'angle $\widehat{CDF}$ en travaillant dans le triangle CDF avec un raisonnement correct. Cependant, ils assimilent ensuite l'angle $\widehat{CDF}$ à l'angle $\widehat{CDE}$. Cette considération est vraie si les points E, D et F sont alignés. Ici, c'est le cas mais la preuve de l'alignement est notre objectif : les élèves ne perçoivent pas la subtilité qui se présente. Cette erreur rend inopérant le reste de leur raisonnement. Nous avons relevé une autre erreur du même ordre : afin de déterminer l'angle $\widehat{BEF}$, les élèves ayant produit le texte ci-dessous (figure 12) s'appuient sur le fait que l'angle $\widehat{DEF}$ a pour mesure 180° alors que c'est ce que leur démonstration doit établir.

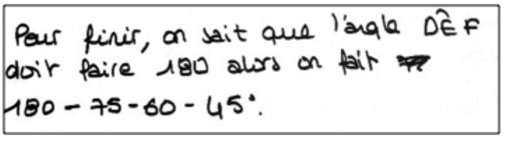

Pour finir, on sait que l'angle DÊF doit faire 180 alors on fait 180 − 75 − 60 − 45°.

Figure 12 : erreur de logique

Cependant, lors du débat, les élèves de ce groupe présentent un exposé correct, sans erreur de logique. On peut supposer que c'est le passage à l'écrit qui pose problème aux élèves de ce groupe.

En définitive, les connaissances maitrisées des élèves sur les angles leur permettent de proposer des raisonnements complets. Toutefois, la figure peut apporter un obstacle au raisonnement : il faut montrer l'alignement sans s'appuyer sur des propriétés qui ne seraient vraies que dans le cas d'un alignement de ces points.

4. *Analyse des productions en géométrie repérée*

Quatorze groupes parmi les dix-sept introduisent un repère. Dans tous les cas, les élèves choisissent le sommet en bas à gauche comme origine du repère. D'autre part, le choix d'un repère orthonormé est systématique à l'exception d'un groupe qui se ravise finalement. Dans de nombreux groupes, l'unité choisie pour le repère est le centimètre et non la longueur du côté du carré. Dans ce cas, le caractère général du résultat établi est difficilement perçu par les élèves.

Un repère étant choisi, il devient possible de déterminer les coordonnées des points. Comme nous l'avons indiqué dans l'analyse *a priori*, selon le choix de l'origine du repère, les calculs sont plus ou moins complexes. En effet, pour certains, l'ordonnée de E est $1 - \sqrt{3}/2$. De nombreuses erreurs sont liées au choix de l'unité et à la difficulté de généralisation. Les points A, B, C et D dont les coordonnées sont directement données par le repère ne posent pas problème. Cependant, dès lors qu'il faut déterminer une coordonnée dépendant de la hauteur du triangle équilatéral, les calculs des élèves se basent sur leur figure. La lecture graphique amène à proposer 2 comme abscisse de F plutôt que $1 - \sqrt{3}/2$; cette approximation est présente dans le travail de plusieurs groupes. Une fois l'erreur identifiée, ce calcul amène l'intervention de longueurs en centimètre malgré le choix d'une unité ; ceci apparaissant également dans d'autres groupes (cf. figure 13).

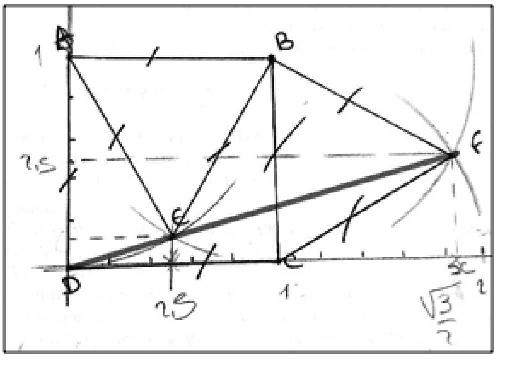


Figure 13 : confusion due à l'unité du repère

Dans le repère (A, B, D), le point E a pour abscisse la moitié de AB. Les élèves admettent que la hauteur d'un triangle équilatéral est aussi une médiane et une médiatrice de ce triangle. L'absence de justification révèle peut être une maitrise de cette propriété mais plus vraisemblablement ici une conjecture faite sur le schéma dont la démonstration ne leur semble pas nécessaire. D'autre part, parfois, bien que l'unité soit prise en compte pour l'abscisse de E, lors de la détermination

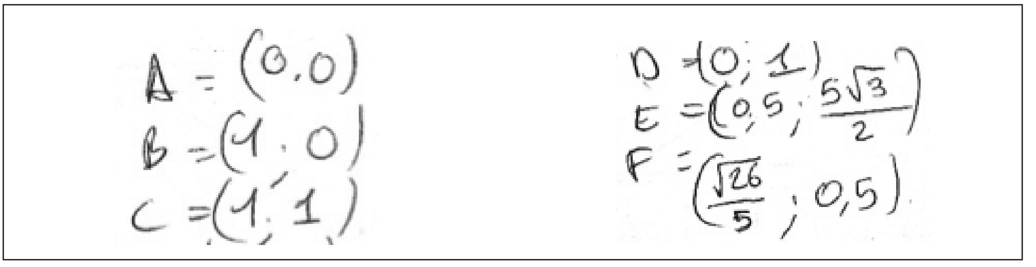


Figure 14 : coexistence de deux unités pour le calcul des coordonnées

de l'ordonnée de E, la longueur de [AB] en centimètre est utilisée : figure 14 ci-dessus.

Le calcul de la longueur d'une hauteur du triangle équilatéral reste difficile pour des élèves de seconde. Dans la classe A, le professeur propose aux élèves d'admettre que « la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral de coté c est donnée par $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ ». Dans la classe B, le calcul demande un temps non négligeable aux élèves. En outre, certains élèves ont du mal à envisager l'irrationnel $\sqrt{3}$ comme un nombre que l'on peut engager dans des calculs ce qui les conduit à utiliser une valeur approchée. D'autres élèves mesurent sur le dessin puis comparent à la valeur théorique :

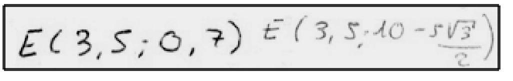


Figure 15 : valeurs approchées

Nous détaillons dans ce qui suit les méthodes utilisant la caractérisation par les longueurs, par les vecteurs puis par les droites.

4. a *Avec des longueurs*

Deux formulations de la caractérisation de l'alignement en terme de distance sont proposées par les élèves, comme les exemples ci-dessous (cf. figure 16) :

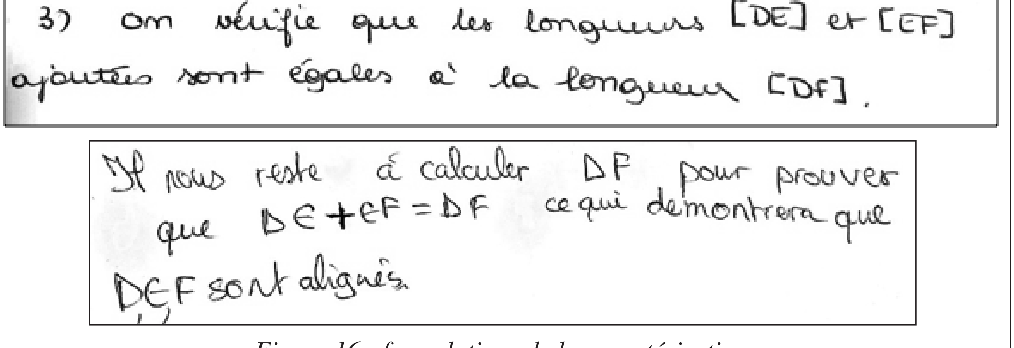


Figure 16 : formulations de la caractérisation

Dans la première production, la notation standard pour indiquer que l'on parle d'un segment est utilisée ici pour désigner la longueur d'un segment. Ceci peut correspondre à une confusion entre les deux types d'objets, mais d'autres indicateurs seraient nécessaires pour pouvoir l'affirmer. L'autre production énonce une caractérisation claire.

Au sein de leurs productions, la notion de valeur approchée joue encore un rôle important. Lors de la détermination des coordonnées, à plusieurs reprises, les élèves hésitent entre la valeur exacte et une valeur approchée (cf. figure 17).

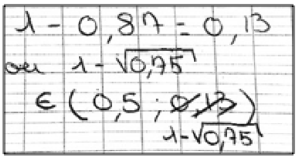


Figure 17 : valeur approchée ou valeur exacte

Dans certains cas (cf. figure 18), les élèves conservent la valeur exacte pour permettre le calcul des longueurs à l'aide de la formule liant coordonnées de points et distance. Cependant, la distance s'exprime finalement comme la racine carrée de la racine carrée (racine 4ème) d'un nombre. Ceci les conduit à utiliser une valeur approchée ; la présence du symbole montre qu'il en ont conscience :

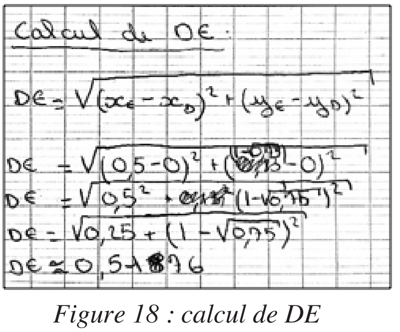


Figure 18 : calcul de DE

D'un point de vue théorique, la démonstration n'est plus valide, l'égalité des approximations de longueur ne permettant pas de conclure à l'égalité des longueurs.

4. b *Avec des vecteurs*

L'idée de prouver l'alignement en utilisant les vecteurs apparaît parfois au début de la recherche.

Le fait d'avoir explicitement donné une caractérisation de l'alignement de points dans le chapitre consacré aux vecteurs peut être l'origine de cette amorce. Cependant, la notion de vecteur est complètement nouvelle en seconde et la colinéarité de vecteurs est peu maîtrisée. Cette fragilité provoque l'abandon de cette caractérisation dans plusieurs groupes. Il faut noter qu'aucun des deux groupes ayant persisté dans l'utilisation de cette méthode ne rédige une démonstration complète.

C'est le cas pour le groupe ayant rédigé le texte dont nous présentons un extrait ci-dessous (cf. figure 19). La propriété permettant la caractérisation de la colinéarité de vecteurs est présente.

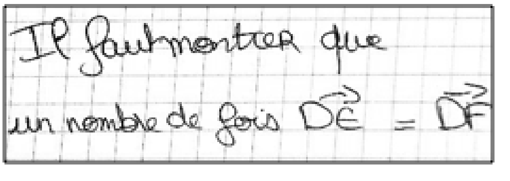
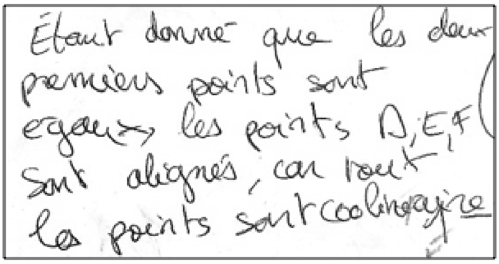


Figure 19 : objectif pour montrer l'alignement

Cependant, le calcul de coordonnées de vecteur est souvent inexact. Certaines productions telles celle de la figure 20 ci-après montrent que l'objet « vecteur » n'est pas encore stabilisé.



Étant donné que les deux premiers points sont égaux, les points D, E, F sont alignés, car tout les points sont colinéaire

Figure 20 : « colinéarité de points »

Les élèves déterminent les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ et seules leurs premières coordonnées sont égales (suite à une erreur de calcul) : c'est ce qu'ils tentent d'expliquer par la formulation « les deux premiers points sont égaux ». La notion de colinéarité de vecteurs semble floue pour les élèves : ils parlent souvent de «parallélisme de vecteurs» ou encore de «colinéarité de droites» et parfois même de «colinéarité de points».

4. c *Avec des droites*

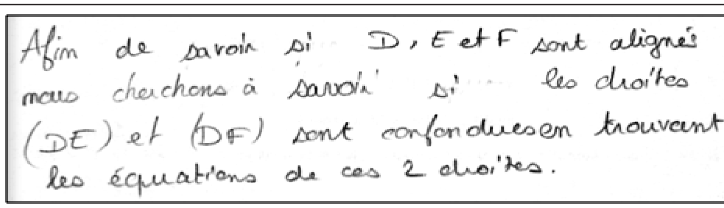
Les méthodes faisant intervenir les droites, en particulier les équations de droites dans un repère, sont les plus fréquentes : 10 groupes sur 17 groupes. Cette prédominance est probablement due à la proximité temporelle de ce chapitre avec l'expérimentation. Les trois raisonnements envisagés interviennent : égalité de deux coefficients directeurs (6 groupes), détermination de deux équations de droites (3 groupes) et appartenance d'un point à une droite (1 groupe). On voit apparaitre plusieurs méthodes relatives à la caractérisation de l'alignement par les droites en géométrie repérée.

Nous avons identifié trois points saillants dans la mise en œuvre de ces méthodes : la nécessité de certaines étapes, l'obstacle des valeurs approchées et la nature des objets.

Les productions ci-dessous (cf. figure 21) et ci-contre, page suivante (cf. figure 22) montrent des travaux de groupes ayant déterminé les équations de deux droites. Comme nous l'avons indiqué dans l'analyse *a priori*, grâce à des connaissances supplémentaires sur le parallélisme de droites, une condition plus faible suffit pour montrer que les droites sont confondues.

Le deuxième groupe obtient deux équations de droites identiques et conclut directement de l'alignement des points en laissant implicite la caractérisation utilisée. L'explication intermédiaire est absente soit par manque de reconnaissance de sa nécessité soit par manque de temps.

La démonstration reste donc incomplète. Remarquons que pour le coefficient directeur



Afin de savoir si D, E et F sont alignés nous cherchons à savoir si les droites (DE) et (DF) sont confondues en trouvant les équations de ces 2 droites.

Figure 21 : caractérisation de l'alignement par les droites

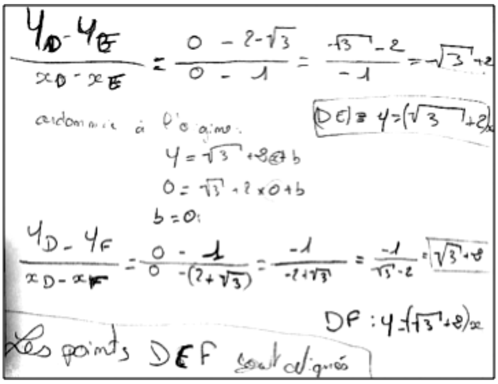


Figure 22 : équations de droites

de (DF), les élèves obtiennent une valeur exacte. La dernière égalité n'est pas justifiée par un calcul : ces élèves disposent de leur calculatrice du collège qui permet d'obtenir des résultats avec des radicaux.

Hormis les élèves ayant leur calculatrice du collège, le calcul des coefficients directeurs est compliqué par la présence d'un radical au dénominateur. En effet, s'ajoutant aux erreurs de formule et de signe, le fait de devoir combiner fractions et radicaux complique les calculs. De ce fait, certains élèves utilisent leur calculatrice afin d'obtenir une valeur approchée comme on le voit dans l'extrait ci-dessous (cf. figure 23):

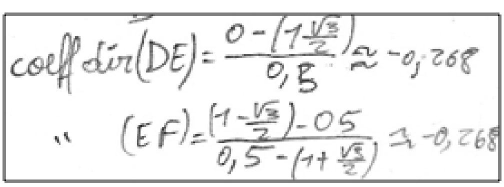


Figure 23 : valeur approchée des coefficients directeurs

Les élèves de ce groupe déduisent l'égalité de ces coefficients de celle des valeurs approchées des coefficients directeurs. Ce raisonnement qui n'est pas valide apparaît fréquemment dans les productions. Les élèves concluent à l'alignement des points à partir d'une égalité non rigoureuse.

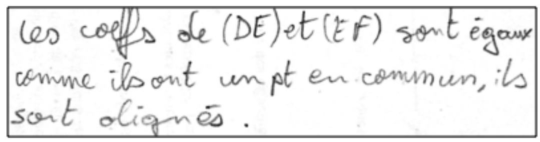


Figure 24 : conclusion et notations

L'extrait ci-dessus (figure 24) laisse à penser qu'il y a une confusion entre différents types d'objets : coefficients directeurs, droites et points. Néanmoins, comme nous l'avons déjà dit plus haut, il faudrait d'autres indicateurs pour pouvoir l'affirmer.

5. *Analyse de la mise en commun orale*

A la suite du recueil des productions, des modalités différentes sont proposées dans les deux classes. Dans la classe A, les différentes productions étant similaires un constat avec les élèves est fait sur l'existence de plusieurs preuves faisant appel aux droites. Le professeur propose ensuite un travail sur les différentes caractérisations de l'alignement : en imposant une notion (angle vecteur et longueur), l'enseignant amène les élèves à chercher une caractérisation liée à celle-ci puis à en déduire le raisonnement associé. L'objectif est de reprendre leurs pistes inabouties afin de valoriser leurs idées ; ceci a permis une implication collective féconde dans cette phase de prolongement de l'activité. Dans la classe B, compte tenu de la diversité des productions, l'enseignant propose une présentation orale de chaque groupe devant la classe ; la présentation ayant été préparée en début de séance.

Pour un débat plus riche, d'autres modalités pour la mise en commun sont possibles. Si les autres élèves sont peu critiques, le professeur demande des éclaircissements ou des précisions. Sinon, pour lancer le débat, un groupe peut être désigné pour commenter la présentation exposée (c'est la méthode préconisée dans Arsac et Mante, 2007). La présentation d'exposés met en lumière la diversité des notions utilisées dans les groupes et permet de clarifier certains points en révélant une faiblesse de raisonnement ou, au contraire, en remarquant un exposé plus exact ou plus riche que le compte rendu écrit.

Conclusion

Dans cet article, afin de permettre aux élèves d'observer qu'il n'existe pas une unique démonstration pour répondre à un problème, le problème de recherche en géométrie choisi est pertinent. En effet, l'expérimentation révèle la multiplicité des raisonnements grâce aux diverses caractérisations de l'alignement : celles nécessitant les angles, les longueurs, les droites et les vecteurs sont exploitées par les élèves. On peut supposer qu'ils seront maintenant plus aptes à proposer une solution différente de celle d'un camarade ou du professeur.

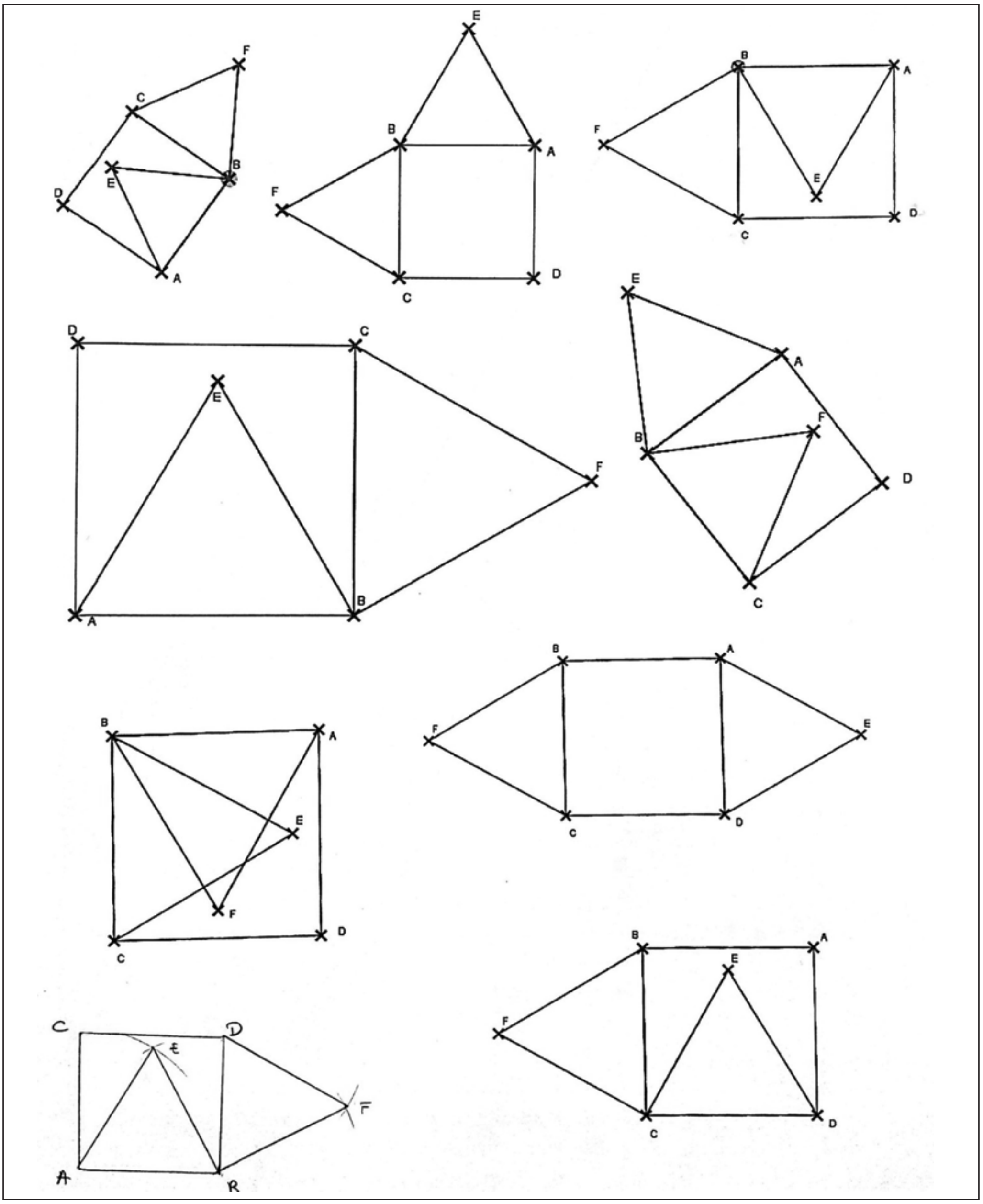
Ce problème permet aux élèves de récapituler des caractérisations de l'alignement, d'être autonome dans l'introduction d'objets (points, repère, etc.) et dans le choix du cadre mathématique. La dévolution de la recherche et les notions mathématiques utilisées familières leur permettent de s'investir dès la phase heuristique et donc de produire un travail conséquent. Il est important de remarquer que les élèves sont capables de prendre des initiatives et de construire seuls un raisonnement.

Dans ce problème bien que la méthode ne soit pas suggérée, la place de l'expérimentation dans la progression mathématique des élèves joue un rôle : selon les éléments travaillés en classe précédemment, une méthode risque d'être favorisée. Cette remarque permet d'être attentif en tant que professeur à la compartimentation des connaissances. Ce point montre l'intérêt d'une progression spiralée. De plus, les élèves dits scolaires cherchent immédiatement la notion à mobiliser, souvent la dernière étudiée et sont parfois déstabilisés par la phase heuristique. Au contraire, d'autres élèves, moins attachés au contrat instauré, présentent des capacités nouvelles en innovant pour trouver une solution. Cette expérimentation et plus généralement les problèmes de recherche modifient le contrat didactique le plus souvent instauré avec la classe et semblent un levier pour renouveler le regard des élèves sur les mathématiques et le regard du professeur sur les élèves. Il est intéressant de renouveler ce type d'expérience ou d'y faire référence tout au long de l'année.

En définitive, l'appropriation du problème, la formulation de conjectures, l'investigation, l'échange argumenté, la structuration et la mobilisation des connaissances sont des points essentiels du programme du collège dont l'apprentissage doit être poursuivit au lycée. En prolongement de ce travail, on peut envisager un travail sur la distinction entre validité d'un raisonnement et vérité d'un énoncé, ainsi que sur ce qui fait que deux démonstrations sont différentes ou non. En effet, les élèves peuvent produire dans certains cas une preuve non valide d'un énoncé vrai : par exemple, lorsqu'elles s'appuient sur une égalité de valeurs approchées. Des problèmes ouverts, des narrations de recherche ou des débats scientifiques en classe peuvent donc à ce sujet jouer un rôle central dans l'apprentissage des mathématiques.

ANNEXE

Parmi les dessins réalisés ci-dessous, entoure les représentations conformes à l'énoncé du problème



Bibliographie

Programme de mathématiques, enseignement commun, seconde générale et technologique

Arrêté du 23 juin 2009 - BO n°30 du 23 juillet 2009

Arsac et Mante, 1er septembre 2007, *Pratique des problèmes ouverts*, Edition CRDP de l'académie de Lyon.

Travail Scientifique Réflexif de Arenas Chloée et Murphy Céline : Plusieurs raisonnements pour une même résolution - année universitaire 2015-2016 – directrice de mémoire : Viviane Durand-Guerrier