REPERES - IREM. N° 105 - octobre 2016

LA LOGIQUE MATHEMATIQUE : UN LANGAGE EXPERT A S'APPROPRIER

Christelle FITAMANT
Philippe SAUX PICART
Marie-Aline TIRAT
Irem de Brest

Résumé : Dans le cadre de l'enseignement de la logique au lycée, nous axons notre démarche autour du langage: les élèves pratiquent une logique au quotidien plus ou moins bien acquise dès le plus jeune âge, il s'agit de les amener à un langage plus rigoureux. Trois étapes apparaissent : consolider cet acquis ancien, en découvrir les limites, l'affiner. Pour chaque étape nous décrivons quelques expériences en classe et proposons divers types d'activités. La présentation du « pour tout » est délicate et impose des choix. Nous proposons ici non pas une progression mais une approche méthodologique.

Introduction

L'histoire de l'enseignement de la logique au collège et au lycée n'est pas un long fleuve tranquille. La logique est enseignée vers les années 60-70 sous sa forme axiomatique, une longue période d'abandon et de silence s'ensuit, il faut attendre beaucoup plus tard, programme 2009, pour voir sa réapparition dans les textes sous des conditions assez floues : on y demande d'en parler sans pour autant faire de cours. Qu'espère-t-on alors atteindre ? Quels savoirs, savoir-faire, sont réellement visés ?

Toute entreprise pédagogique se doit de déterminer les prérequis supposés maîtrisés par les élèves ainsi que les objectifs à atteindre. C'est ici que les questions commencent à affluer : la manipulation du langage d'un enfant de sixième, son aptitude à formuler des propos cohérents, sa maîtrise du lien cause-conséquence sont-ils des bases sur lesquelles on s'appuiera dans l'enseignement ultérieur de la logique, ou ne sont-ils d'aucune utilité et devrons-nous apprendre aux enfants à s'en défaire pour accéder à une « nouvelle » logique ?

Autrement dit pouvons-nous concevoir une progression qui fasse passer de la logique « du quotidien » à la logique mathématique de manière aussi ouverte et progressive que possible ?

Nos deux hypothèses initiales de travail sont les suivantes :

1. La logique n'est pas l'apanage des mathématiciens. Nous entendons par là que toute discipline demande de produire des discours cohérents, donc munis d'une certaine structure logique.
2. La cohérence du discours mathématique exige une logique particulière qui ne peut se contenter des connecteurs quotidiennement utilisés. Notre objectif en classe de mathématique est donc d'amener l'élève, partant d'une logique du quotidien, vers cette logique spécifique, de le faire accéder à « *un langage expert* » dont la maîtrise lui sera utile en mathématique et aussi dans les disciplines connexes ou qui utilisent des modèles mathématiques (informatique, sciences de la terre et de la vie, technologie).

Nous tenons à noter ici le rapport entre la maîtrise du langage et la progression en logique. On peut de fait imaginer qu'une telle initiation se fasse ex abrupto : tout le monde apprend les rudiments d'une logique élémentaire en même temps que sa langue maternelle. Au terme de ce processus tout un chacun saura utiliser les connecteurs dans un sens courant, par exemple le OU sera en général exclusif et l'implication utilisée supposera la prémisse vraie. Peut-on pour autant imaginer que la suite de cet apprentissage qui mène par exemple à un OU inclusif et une implication plus riche, se fasse aussi par mimétisme comme on apprend une langue maternelle ?

Pas besoin alors d'enseignement spécifique, on attendrait seulement de l'élève qu'il apprenne en copiant le langage du maître, en moulant son discours sur celui entendu. Il faut bien reconnaître que ce fut la règle pendant les siècles passés et qu'actuellement c'est souvent encore le cas même si de temps à autre, selon les injonctions du programme, on passe quelques minutes à discuter d'un connecteur...

Une troisième hypothèse de travail, qui est aussi notre parti-pris en réponse à la question posée ci-dessus, est alors la suivante :

3. Nous pensons que ce cheminement vers un langage expert doit être progressif et que la logique mathématique doit s'introduire de manière circonstanciée tout au long du collège et du lycée.

Il nous est apparu que cette troisième hypothèse pouvait se décrire en trois étapes successives qui feront l'objet des trois premières parties de notre propos :

- consolider la logique du quotidien (partie I),
- en montrer les insuffisances et la nécessité d'affiner le discours en précisant les connecteurs et quantificateurs (partie II),
- enfin s'exercer régulièrement au travers des exercices rencontrés en classe au jour le jour, quelle qu'en soit la teneur (partie III).

D'autre part la mise en place des quantificateurs pose un problème spécifique dans la mesure où il ne s'agit pas seulement d'affiner un connecteur déjà connu, mais d'introduire un nouvel élément de logique (partie IV).

Pour autant nous n'avons nullement l'intention de proposer ici une progression année par année, mais plutôt de décrire une démarche pédagogique qui rende possible le cheminement de l'élève vers un langage expert. Nous tenons à joindre nos réflexions à d'autres approches complémentaires, par exemple celle de C. Hache, 2013, ou D. Grenier, 2015.

Les réflexions présentées ici sont en grande partie le fruit du travail d'un groupe Irem qui pendant plusieurs années a travaillé à Brest sur le sujet en collaboration avec une formatrice IUFM de français. [1]

1 Co-auteur de « La logique au fil de l'eau »

I. — Partir de la logique du quotidien et en consolider les bases.

Il y a d'abord un préjugé contre lequel il nous faut réagir : il n'y a pas qu'en mathématiques que l'on raisonne ! Même dans des disciplines non scientifiques cela peut se faire !… Voici pour preuve un petit exercice donné par notre collègue professeure de français à ses élèves de BTS (encadré ci-dessous).

Il est facile d'imaginer de tels « exercices à trous » pour tout niveau et toute discipline et personne ne niera l'intérêt logique de la chose. On peut compliquer l'exercice en ne donnant pas les mots pour boucher les trous par exemple. D'autres exercices transdisciplinaires peuvent aussi être imaginés où l'on demande de reconnaître les liens logiques liant les propositions d'un texte (conjonction, conséquence, négation,…).

UN TEXTE A TROUS. Les liens logiques de ce texte ont été supprimés, à vous de les rétablir en puisant dans la liste : ainsi que, car, en définitive, enfin, et (2 fois), mais (2 fois), si bien que, tandis que (2 fois).

Mardi 12 Août : Aux abords extrêmes de la Méditerranée, le ciel restera assez nuageux . . . . . le risque d'ondées sera plus limité que la veille, ... il fera toujours aussi beau en Corse. Après le passage perturbé, une zone de belles éclaircies s'établira temporairement du Bordelais à la Bourgogne, tandis qu'un bon tiers Nord-Ouest sera soumis à un régime de traîne, avec alternance équitable d'averses généralement faibles et d'éclaircies. Les ondées seront plus fréquentes et musclées en Manche où le vent d'Ouest approchera les 80 km/h en rafales, pour 60 dans les terres.

Mercredi 13 Août : Le front se sera évacué, ... le ciel de traîne se généralisera à l'ensemble du pays. En matinée, le temps sera généralement variable partout avec un petit risque d'ondées et une ambiance ventée, puis petit à petit la situation s'améliorera sur la moitié Sud à la faveur d'une dorsale anticyclonique, ... les trouées prendront nettement l'avantage. Il fera très beau en Méditerranée dès l'aube, avec une petite tramontane dans son domaine. . . . . . , le ciel restera plus chaotique au Nord de la Loire . . . . . sur le quart Nord-est où quelques averses sont encore possibles en cours d'après-midi, ... le vent soufflera toujours en rafales en Manche, aux alentours de 70 km/h. Températures mini de 10 à 22 degrés, maxi de 18 à 30.

Jeudi 14 Août : Le défilé des perturbations se poursuivra dans une ambiance des plus automnales . . . . . l'on retrouvera la nouvelle à l'Ouest d'une ligne Le Havre -Pau avec un ciel chaotique et des pluies ou averses généralement modérées, parfois même accompagnées d'un coup de tonnerre, ... de menues trouées reviendront sur la pointe bretonne. La voûte céleste s'ennuagera du Nord au midi toulousain et il mouillera avant le soir. Plus à l'Est, les belles éclaircies de la matinée évolueront vers un temps lourd et des orages isolés . . . . . parfois violents, notamment sur les massifs. . . . . . , c'est encore une fois sur les rivages méditerranéens que le soleil résistera le mieux.

Bulletin météo national de Jérôme Cerisier,
Dernière mise à jour : Lundi 11 Août 2008, 19h11.

On reproche souvent aux exercices où la logique est présentée dans un cadre quotidien, avec un langage de « tous les jours », de ne pouvoir permettre une étude précise des connecteurs, car le contexte pose problème. Par exemple la phrase « *s'il pleut la cour est mouillée* » ne manque pas d'interroger : « *et s'il y a un préau ?* », « *et si la cour a été arrosée pour l'entretien ?* », etc. Par contre si le cadre de l'exercice est assez « rigide », comporte des éléments techniques ou historiques, les « échappements » comme rencontrés dans l'exemple ci-dessus se produisent beaucoup moins. *D'où l'idée de prendre des textes dans des documentations techniques, administratives, législatives et d'en faire des exercices construits sur le même principe...*

Donner de tels exercices nous semble important et la pluridisciplinarité prend ici, une nouvelle fois, toute son importance. Cela permet de rapprocher les mathématiques d'autres disciplines, de les dé-singulariser dans un premier temps, ce qui a pour effet de jouer contre la peur chronique qu'elles inspirent à certains élèves (… et parents). D'autre part cela permet de consolider les acquis antérieurs : savoir manipuler correctement un lien de conséquence même s'il n'est conçu que dans le cas où la prémisse est vraie, nous semble une étape fondamentale. Tout le but de notre enseignement sera d'envisager comment aller plus loin…

Voici un second exemple (encadré ci-contre) d'exercice donné cette fois en classe de collège inspiré d'un exercice de français où les éléments d'une narration sont placés dans le désordre, l'élève ayant à remettre le texte dans l'ordre naturel. Un type d'exercice motivant et enrichissant, qui peut être utilisé avec des étudiants de licence qui souvent ne voient pas l'intérêt des démonstrations !

Ces activités ont l'avantage de réunir autour de notions de logique d'autres disciplines que les mathématiques. *Certes les connecteurs y sont utilisés dans un sens restreint, mais s'ils ne sont pas acquis il y a peu de chance que l'élève puisse en maîtriser ensuite un sens mathématique*. Nous savons par expérience que nous rencontrons des situations dans lesquelles une connaissance plus fine de la logique s'avère nécessaire.

I. On souhaite démontrer que K est le milieu de [EC]. En utilisant les phrases ci-dessous dans l'ordre que vous souhaitez, écrire la démonstration en ajoutant des connecteurs logiques.

1. K est le milieu de [EC]
2. ABCD est un parallélogramme
3. Les droites (AB) et (AD) sont parallèles
4. E et D sont symétriques par rapport à A
5. A est le milieu de [ED]
6. Dans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un côté du triangle coupe le troisième côté en son milieu.

II. On souhaite démontrer que K est le milieu de [AB]. En utilisant les phrases ci-dessous dans l'ordre que vous souhaitez, écrire la démonstration en ajoutant des connecteurs logiques.

1. Les diagonales se coupent en leur milieu
2. K est le milieu de [EC]
3. AEBC est un parallélogramme
4. AE = BC et (AE) // (BC)
5. K est le milieu de [AB]

II. — Sensibiliser les élèves à une logique plus élaborée

Il s'agit alors d'aller plus loin, d'amener les élèves à appréhender le manque de précision du langage commun. Il nous semble intéressant de faire sentir le pas à franchir en faisant parler les élèves de ce qu'ils comprennent ou veulent dire lors de la lecture/écriture d'une proposition. La nécessité d'affiner le sens des connecteurs apparaîtra alors naturellement.

Tout d'abord, nous décrirons une séance en classe où l'explicitation d'une notion logique vient en réponse à une question d'élève. C'est un dilemme bien connu pour l'enseignant : décider de prendre (ou pas) du temps pour répondre. Ici, en effet, ou bien on répond en deux minutes et on peut terminer la séance comme prévu, ou bien on « perd » du temps c'est-à-dire qu'on « profite » de l'occasion pour renforcer des connaissances logiques au risque bien évidemment de ne pas arriver au bout de la séance telle qu'on l'avait prévue et au risque aussi d'être dans une situation inconfortable. En effet, comme on le lira ci-dessous, on tâtonne, on ne trouve pas immédiatement la « bonne réponse » , autrement dit celle qui convainc. Mais c'est tout de même bien dans ce cas, qu'on gagne en efficacité : non seulement, pour toute la classe, la notion n'est pas « parachutée », mais en plus, la réponse permet à l'élève de dépasser l'obstacle qui l'empêchait de poursuivre la résolution de l'exercice.

Cependant, malgré les avantages décrits ci-dessus à utiliser les interrogations des élèves comme tremplin, il est difficile, voire impossible, de se laisser guider uniquement par les questions d'élèves. On peut aussi utiliser des productions écrites comme celle présentée dans le deuxième exemple. Tous les enseignants rencontrent ce type d'erreur où la propriété utilisée pour mener à bien le raisonnement n'est pas la propriété citée par les élèves, mais sa réciproque.

Enfin, on peut aussi provoquer des situations propices à l'enseignement de la logique, en anticipant, avec l'expérience, sur les éventuels obstacles logiques (ou autres d'ailleurs) des élèves. Mais on peut aussi faire émerger un débat: on demande aux élèves de se prononcer, de justifier leur choix (par exemple une proposition est-elle vraie ou fausse ?).

Dans toutes ces situations, on prendra soin de travailler sur des notions mathématiques déjà rencontrées par les élèves afin d'éviter que des incompréhensions sur ces notions ne « parasitent » l'accent porté sur la logique.

1. *Lors d'une séance en classe : en réponse à une incompréhension*

La séance vécue, relatée ci-dessous a eu lieu en classe de seconde, en classe entière et concerne la notion d'extremum. Cette notion avait déjà été travaillée en début d'année dans un chapitre consacré aux lectures graphiques. Puis, la définition a été affinée lors de l'étude algébrique de fonctions, comme les fonctions trinômes, par exemple. Les élèves sont donc censés connaître la notion d'extremum.

Dans cet exercice de facture classique, notre objectif initial est de mettre en évidence la nécessité des deux conditions présentes dans la définition du minimum d'une fonction (le nombre « candidat » est un minorant et est une image par la fonction). Mais nous verrons qu'avant de traiter l'exercice il faudra répondre à une incompréhension des élèves sur une proposition pourtant fréquemment utilisée. Nous avons été surpris de l'interrogation des élèves et avons eu recours à diverses réponses avant de finalement convaincre grâce à une définition rigoureuse du « OU ». Remarquons que même si cette situation n'était pas prévue initialement, elle pourra désormais être provoquée, anticipée. Voici le scénario raconté par l'enseignant :

Soit la fonction f définie sur **R** par :

$$f(x) = x^2 + 1.$$

1. 100 est-il le maximum de la fonction f sur **R** ? Justifier.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$x^2 + 1 \geq -5.$$

3. -5 est-il le minimum de la fonction f sur **R** ? Justifier.

Pour la question 1, les élèves réagissent vite et semblent convaincus.

Pour la question 2 : « blanc », « silence radio ». Un peu étonnée, vu leur réaction rapide à la question précédente, je leur demande : « Cela ne vous semble pas évident? »

Suite de l'échange (dans deux classes de secondes, les réactions ont été proches et provenaient d'élèves comprenant assez bien habituellement) :

Réponses des élèves : « Ce n'est pas possible » et « Ben, ce ne sera jamais atteint ».

Moi, très perplexe : « Qui ne sera jamais atteint ? »

Elève : « Ça ne pourra jamais être égal à – 5 »

Moi : « Pourquoi ? » (je commence à voir où il/elle veut en venir).

Elève : « Et bien, c'est positif et comme on ajoute 1, on obtient un nombre encore plus grand, il ne pourra pas être égal à – 5 » [2]

2 Remarquons la justesse de ce raisonnement !

C'est sur ces réactions d'élèves que nous souhaitons rebondir.

Après éclaircissement, il apparaît que pour les élèves qui se sont exprimés (et d'autres certainement), le fait d'utiliser une inégalité large dans cet énoncé, sous-entend que la valeur – 5 est atteinte au moins une fois. Pour l'élève, l'égalité étant envisagée, elle devrait être constatée au moins une fois ! Voilà une belle occasion de parler du OU !

Ce qui a été constaté :

Premièrement, quelques analogies avec des exemples de la vie quotidienne (du style « *j'aimerais avoir au moins 12 à mon prochain contrôle* » qui peut se traduire par « *j'aimerais que ma note soit supérieure ou égale à 12* » ou « *on peut aller voir ce film si on a au moins 16 ans* »), même si elles sont bien comprises par les élèves ne convainquent pas ici, peut-être est-on trop loin de la situation mathématique.

Deuxièmement, cette inégalité large cache un OU que tous les élèves ne voient pas. L'expliciter n'est pas une perte de temps !

Troisièmement, ce n'est finalement qu'en « décortiquant » l'inégalité $4 \geq -5$ comme ci-dessous au tableau et en rappelant la signification du « OU » que les élèves sont convaincus.

$4 \geq -5$ signifie que $4 > -5$ OU $4 = -5$,

autrement dit la proposition $4 \geq -5$ est vraie lorsque l'une (au moins) des deux propositions $4 > -5$, $4 = -5$ est vraie.

Question aux élèves : « la proposition $4 > -5$ est-elle vraie? »

Réponse : « oui »

Conclusion : donc la proposition $4 \geq -5$ est vraie

(même si la proposition $4 = -5$ est fausse!)

Partant de ce cas particulier d'inégalité large, les élèves ont ensuite compris l'inégalité large de l'énoncé.

Comme on pourra s'en douter, la résolution de l'exercice a « débordé » sur l'heure suivante, mais l'enjeu était d'importance ! D'autres notions de logique à exploiter dans cet exercice sont reprises dans le paragraphe III. Revenons dans un premier temps sur le connecteur OU puis sur la pratique de l'enseignant.

Concernant le connecteur OU :

— Il est important, bien sûr d'avoir recours à la signification dans la vie de tous les jours de l'inégalité large. Cependant, ici, c'est la référence à la signification mathématique du OU qui permet d'expliquer et de convaincre, *la seule référence au langage quotidien ne suffit plus ici*. Ce travail de définition du connecteur pourrait se poursuivre par l'introduction d'une table de vérité qui peut être profitable à certains élèves. L'utilisation des tables de vérité ne figure pas au programme de Mathématiques du lycée cependant les élèves ont pu les rencontrer en cours de Technologie au collège.

— Un autre aspect du OU est souvent mis en évidence dans les manuels, dans les documents ressources, entre autres: la distinction avec le OU du langage quotidien généralement exclusif. Mais finalement, les élèves s'y plient volontiers, diagramme de Venn, travail en probabilités... y contribuent tandis que la difficulté de sens des inégalités larges perdure souvent comme nous l'ont d'ailleurs relaté des enseignants de terminale S et université lors des journées de l'APMEP en 2013.

Concernant la pratique de l'enseignant:

— Il nous arrive souvent d'avoir à faire face à des questions inattendues et c'est un des aspects motivants de notre métier d'utiliser les ressources, notre expérience, notre recul, bref notre professionnalisme pour arriver à répondre à nos élèves de façon satisfaisante.

Dans ce domaine de la logique, il s'agit pour nous de saisir toutes les occasions, *mais nous ne saurons les saisir que si nous sommes nous-mêmes très vigilants sur les aspects logiques présents dans tous les exercices*. Et bien sûr, rien ne nous empêche de provoquer ces situations !

— Pourquoi vouloir « saisir des occasions au vol » ? D'une part, comme nous l'avons dit plus haut, le recours à un langage « expert » est un outil parmi d'autres à notre disposition pour expliquer et ici, il permet de répondre aux élèves, de convaincre. On est toujours plus efficace lorsqu'on répond à une attente des élèves! D'autre part, les situations où la logique « s'invite » explicitement permettent aux élèves de se familiariser avec ces notions et de les relier à la pratique des mathématiques au lieu d'en faire « un être à part ».

2. *Production écrite d'élève : étude d'une erreur de raisonnement*

Après avoir décrit une séance en classe et « l'intrusion » de la logique dans cette séance, nous présentons ci-dessous l'exploitation que l'on peut mener à partir de productions d'élèves. Il s'agit d'un extrait (recopié) d'une argumentation très courte, mais représentative des contresens logiques dans les travaux écrits d'élèves. Ici, dans un devoir maison en 1°S, il est demandé de montrer que la représentation graphique de la fonction P définie ci-dessous passe par le point A (0 ; 2). (C'est une question très simple, en 1°S, dans le devoir, elle est suivie de beaucoup d'autres, bien sûr).

$$P \quad x \in \mathbf{R}, P(x) = \frac{1}{16} x^3 - \frac{3}{8} x^2 + 2$$

Réponses de quelques élèves consciencieux :

Si la représentation graphique de P passe par A (0 ; 2) alors $P(0) = 2$.

Calcul : $P(0) = \frac{1}{16} \times 0 - \frac{3}{8} \times 0 + 2 = 2$

$P(0) = 2$ *donc la représentation graphique de P passe bien par A* (0 ; 2).

Dans cette réponse, chacune des trois propositions est vraie et pourtant... l'enchaînement des trois propositions est faux puisqu'il fait apparaître un raisonnement faux. Une belle occasion de reparler de réciproque !

Il est d'autant plus profitable d'interpeler les élèves sur ce genre de travaux qu'ils font référence à des propriétés connues et acquises l'année précédente (normalement !).

Il est très difficile de lutter contre « ces justifications à l'envers ». De plus, l'élève qui répond sans la première phrase, commence par le calcul puis conclut, produit ainsi une rédaction tout à fait correcte et acceptée au niveau d'une première (mais serait-il capable de donner la propriété utilisée ?). C'est pourquoi, en général, l'enseignant ne pénalise pas cette rédaction « consciencieuse » où l'élève s'est donné la peine de réciter la propriété qu'il pense avoir utilisée. Tout ceci ne pousse pas l'élève à se poser beaucoup de questions.

Reprendre avec les élèves ce genre de rédaction est un travail intéressant et peut être mis en pratique très simplement. Par exemple, demandons aux élèves si chacune des trois propositions est vraie. Les élèves sont vite intrigués : les propositions prises isolément sont vraies et pourtant le raisonnement est faux !! Ils sentent bien que « quelque chose ne va pas » et lorsqu'un élève parle de réciproque, cela permet de mettre en évidence que la première propriété est « écrite à l'envers ». Ensuite, on reformule le tout, en utilisant la réciproque :

Si $P(0) = 2$ *alors la représentation graphique de P passe par le point* A(0 ; 2),

Les élèves réalisent que l'enchaînement est alors correct. Ce qui ne les empêche pas de recommencer avec le même type d'erreur ! [3]

Il y a encore un pas à franchir entre la compréhension et une rédaction correcte, laquelle demande un certain recul de la part des élèves. Ce travail sur la rédaction est plus global et nous n'insisterons pas ici. Disons simplement que si les élèves prennent conscience de la nécessité d'utiliser un langage plus rigoureux, ils comprennent mieux nos exigences de rédaction c'est-à-dire que la rédaction n'est plus uniquement l'action de se calquer sur le moule attendu par l'enseignant !

3. *Une situation provoquée : pour faire réagir les élèves*

Nous avons décrit ci-dessus quelques situations où l'enseignant « profite » des réactions ou des écrits des élèves pour les alerter, les sensibiliser à la nécessité d'avoir recours à un langage plus rigoureux et d'utiliser sciemment des notions de logique. Mais nous pouvons bien sûr provoquer des situations propices à la mise en place de notions de logique! Nous présentons maintenant une situation qui a pour but de faire émerger la nécessité d'utiliser les quantificateurs.

---

3 Nous avons tenté d'après certaines réactions d'élèves d'interpréter cette erreur récurrente. Peut-être les élèves se disent-ils : « puisque la courbe doit passer par le point A, alors ses coordonnées doivent vérifier... » et ils écrivent ensuite cette phrase en positionnant SI et ALORS comme on le leur demande (ou plutôt comme ils pensent qu'on le leur demande !)... .sans valider la cohérence du raisonnement ainsi écrit.

Voici une question classique rencontrée par des élèves de classe de seconde (ou même première) :

La proposition suivante est-elle vraie :
si $x^2 = 4$ *alors* $x = 2$ *?*

Cette question peut se présenter sous plusieurs formes: par exemple on peut proposer trois réponses à cocher :

OUI NON ON NE SAIT PAS

ou bien insérée dans une une liste de propositions sur lesquelles on pose la même question.

Dans un premier temps, quelques élèves « tombent dans le piège » et répondent OUI, d'autres répondent ON NE SAIT PAS.

Même si la majorité répond correctement, un échange s'installe qui met en évidence assez naturellement le fait qu'en l'absence de « présentation » de la variable x, on ne sait pas ce qu'elle désigne. Bref on ne sait pas de quoi on parle ! L'élève a en effet beau jeu d' argumenter « on ne nous avait pas dit que x pouvait être négatif ! »

La nécessité de présenter la variable x apparaît ainsi (presque) naturellement. Le chemin est alors tracé pour introduire le quantificateur « pour tout » qui permettra de savoir « de quoi on parle » : x désigne-t-il un nombre entier, un nombre positif, un nombre réel... ? Nous reviendrons au paragraphe IV sur une approche progressive de la manipulation de ce quantificateur.

Nous avons relaté ci-dessus trois situations que nous avons jugées propices à l'introduction ou au renforcement de notions de logique et représentatives du cheminement à prévoir avec les élèves. Dans la première situation, c'est l'enseignant qui a besoin de la rigueur mathématique pour expliquer. Ce faisant, il partage cette rigueur avec les élèves et en montre le pouvoir. Dans la deuxième situation, revenir sur leur formulation permet d'expliquer pourquoi le raisonnement est faux. Dans la troisième situation qui, elle, est provoquée, on peut espérer que les élèves réalisent par eux-mêmes la nécessité de clarifier le discours et donc d'utiliser cet outil qu'est le quantificateur.

Il est évident que nous ne pouvons nous contenter de trois séances telles que décrites. En effet, nous avons dit plus haut que pour accompagner nos élèves dans l'acquisition des notions de logique, un travail sur le langage est nécessaire. Où et quand effectuer ce travail ? Fréquemment et sous des formes différentes.

Nous pensons, que d'une part, il est souhaitable que l'enseignant puisse être réactif sur les notions de logique rencontrées, exploiter des situations afin que *la logique ne soit pas déconnectée des mathématiques et soit mobilisable par les élèves pour l'apprentissage et la rédaction de raisonnements corrects*. D'autre part, l'enseignant a un large choix de situations dans lesquelles il peut interpeler directement les élèves avec des notions de logique.

Dans tous les cas, on privilégiera les notions simples, déjà rencontrées auparavant ou acquises l'année précédente.

Remarquons que les activités présentées ici, sont volontairement hors des situations rencontrées dans les probabilités et en effet, il nous paraît important que les élèves n'associent pas les connecteurs, quantificateurs (pour ne citer qu'eux) uniquement à ce domaine et que ceux-ci soient rencontrés et mis en évidence au fil des chapitres du programme.

III. — La logique au fil de l'eau

Chaque exercice ou activité mathématique peut facilement être prétexte à s'entraîner à la logique. *Il n'est pas nécessaire de créer des activités dédiées à la logique pour travailler la logique*. Nous militons pour la pratique d'un entrainement à la logique qui se place naturellement dans le cadre des pratiques habituelles de la classe. Nous avons donc utilisé des situations classiques et choisi d'explorer tel ou tel aspect logique.

Il nous semble important que ces activités ne fassent pas appel à des notions trop récemment introduites, mais ne soient pas non plus déconnectées des contenus mathématiques habituels des élèves, elles doivent présenter un intérêt mathématique.

Cela peut sembler difficile, mais une progression spiralée qui permet de faire des allers retours dans les divers chapitres du programme peut être ainsi l'occasion de centrer une activité sur ses aspects logiques plutôt que notionnels. Notre idée est d'utiliser des exercices que l'enseignant connait bien et de se placer d'un point de vue logique. Cela ne s'improvise pas et mérite un travail de préparation. Prenons par exemple cet énoncé et essayons d'en exploiter son potentiel logique question par question.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ .}$$

1) Montrer que le minimum de la fonction f sur $\mathbf{R}$ est 1.

2a) Montrer que pour tout réel x, $f(x \geq 0$.

2b) 0 est-il le minimum de la fonction f ?

3a) 17 a-t-il des antécédents par la fonction f ?

3b) 17 est-il le maximum de la fonction f ?

Question 1 : Le nombre 1 pour être minimum doit vérifier deux conditions :

Condition 1 : « *Pour tout réel x, $f(x) \geq 1$.* »

Condition 2 : « *Il existe un réel x tel que $f(x) = 1$.* »

C'est l'occasion de travailler le connecteur ET dans un autre contexte que celui des probabilités.

Question 2a : Les élèves peuvent manipuler une implication :

« *Pour tout réel x, $f(x) \geq 1$ implique $f(x) \geq 0$.* »

Cette implication donne l'occasion d'exhiber une implication simple [4] dont la réciproque est fausse sans que la situation ne paraisse trop artificielle.

Question 2b : La négation d'une proposition peut être abordée,

— d'une part avec la négation d'une proposition contenant le connecteur ET :

la proposition

« *Il existe un réel x tel que $f(x) = 0$* ET *Pour tout réel x, $f(x) \geq 0$* »

est une proposition fausse qui équivaut à

« *Il existe un réel x tel que $f(x) = 0$ est fausse* OU *Pour tout réel x, $f(x) \geq 0$ est fausse* ».

— d'autre part, avec la négation d'une proposition contenant un quantificateur existentiel :

on nie la proposition

« *Il existe x réel tel que $f(x) = 0$* »

par la proposition

« P*our tout réel x, $f(x) \neq 0$* ».

4 « Trop simple » ? Cette implication pose en réalité problème à un certain nombre d'élèves.

Question 3a : Le quantificateur existentiel apparaît naturellement :

> « *Il existe des nombres réels qui ont pour image* 17 *par* f. »

Question 3b : La négation du quantificateur universel apparaît à nouveau :

> La proposition « *Pour tout réel x,* $f(x) \geq 17$ » est fausse car « *il existe un réel x tel que* $f(x) > 17$ ».

Dans tout l'exercice, on peut d'ailleurs exiger des élèves une rigueur dans l'usage des quantificateurs qui se révèle indispensable pour répondre aux questions posées.

Quelle richesse apparaît dans cet exercice ! Et, il en est de même pour les exercices que tout enseignant propose habituellement à ses élèves... Les différentes notions de logiques que recèle cet exercice ne sont pas toutes de la même difficulté. C'est ce qui est intéressant. Le but n'est pas de travailler toutes les notions de logique d'un exercice avec les élèves, mais, après s'être approprié ces voies possibles, de choisir celle(s) sur la(les)quelles nous voulons travailler avec nos élèves.

Nos réflexions nous ont amenés à penser qu'appréhender avec nos élèves de lycée des éléments de logique indépendamment de l'activité mathématique quotidienne peut être contre-productif. En effet, certains élèves (les plus nécessiteux en la matière) préféreront contourner la difficulté et se contenter d'apprendre des techniques mathématiques [5]. De même, leur faire pratiquer des mathématiques sans faire de référence aux notions logiques n'est pas satisfaisant non plus puisque apprendre et faire des mathématiques ne se limite pas à la technique. Les exercices ou activités que nous avons tous dans notre « valise pédagogique » se prêtent à la manipulation des notions logiques. Finalement, c'est à l'enseignant de réinterpréter les situations habituelles pour servir son propos sur la logique, libre à lui de se saisir d'un exercice pour travailler une notion de logique ou pas.

IV. — De l'usage modéré des quantificateurs

On le voit, dans les paragraphes II et III ci-dessus, le travail autour du quantificateur « pour tout » [6] est incontournable. Comment réaliser la présentation des variables ? Comment rédiger ? Cette question se pose tout d'abord pour la rédaction des énoncés. En effet, une des contraintes est, pour l'enseignant de présenter ses exercices avec suffisamment de rigueur, au moins autant qu'il en attend de la part de ses élèves ! Et l'objectif est bien sûr que les élèves s'approprient progressivement ces formulations à la fois dans la phase de lecture des énoncés et dans la phase d'écriture, lors de la rédaction de leurs réponses.

1. *Vers une rédaction des énoncés rigoureuse et accessible*

Etant donné que l'usage par les élèves des quantificateurs est délicat, qu'ils les ont peu rencontrés au collège, la tentation serait grande de les supprimer partout ou de les écrire uniquement dans les situations où l'expert (l'enseignant ou le mathématicien) sait (lui) qu'il en aura besoin . Cependant, outre que les programmes actuels exigent cette manipulation, ces quantificateurs sont nécessaires, pour la négation notamment et, plus généralement, pour la rigueur et la compréhension par les

5 Le programme de Mathématiques du lycée précise « Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques...» pour le cycle terminal de la série économique et sociale et de la série littéraire comme pour la classe terminale de la série scientifique ; BO spécial n°8, du 13 octobre 2011.

6 Le quantificateur « il existe » , à notre avis, pose moins de problème : il est moins utilisé et il est clairement explicité dans la majorité des énoncés où il est présent.

élèves. Et attendre de faire découvrir aux élèves les quantificateurs dans des situations où ils sont incontournables (un raisonnement par récurrence ou une négation) les met devant une double difficulté (nouveau vocabulaire et nouvelle notion). De plus, ne pas écrire les quantificateurs ne fait pas disparaître la difficulté de la quantification. Au contraire, débusquer les quantificateurs implicites dans une proposition mathématique augmente la difficulté de lecture. Voir le paragraphe II.3 ci-dessus. Mais alors faut-il les faire apparaître absolument partout ? Nous nous sommes beaucoup interrogés au sein de notre groupe sur différentes rédactions afin de ne pas rebuter les élèves devant des formulations qu'ils pourraient juger trop lourdes ou arbitraires tout en les amenant cependant vers une utilisation experte.

Nous avons fait le choix dans un premier temps, de nous appuyer sur ce que les élèves ont déjà rencontré. En particulier, nous privilégierons l'utilisation du « soit » dans les énoncés. Les élèves ont déjà rencontré cette expression au collège, elle permet d'alléger les énoncés.

Bien sûr, dans un deuxième temps, il sera nécessaire d'élaborer une démarche pour que les élèves s'approprient progressivement la manipulation du quantificateur « pour tout ». Le paragraphe suivant reviendra sur un chemin à suivre.

Voici quelques exemples qui ont guidé nos choix :

Regardons les deux formulations ci-dessous :

pour tout $x \in \mathbf{R}$, *si* $x^2 = 4$ *alors* $x = 2$

soit $x \in \mathbf{R}$, *si* $x^2 = 4$ *alors* $x = 2$

La première formulation nous est vite apparue très lourde et sans doute trop artificielle pour les élèves.

Essayons maintenant avec la réciproque de la proposition ci-dessus :

pour tout $x \in \mathbf{R}$, *si* $x = 2$ *alors* $x^2 = 4$

soit $x \in \mathbf{R}$, *si* $x = 2$ *alors* $x^2 = 4$

La première formulation est très étrange pour les élèves. Pourquoi préciser pour « tout x » alors que x ne prend qu'une valeur !?

Enfin, essayons en géométrie avec la proposition suivante :

pour tout triangle ABC, *si* ABC *est rectangle en* A, *alors* $BC^2 = AB^2 + AC^2$

soit ABC *un triangle, si* ABC *est rectangle en* A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

En fait, avant la classe de seconde, la deuxième formulation est beaucoup plus familière pour les élèves, en particulier dans le cas des propriétés en géométrie.

Un dernier exemple avec un exercice du manuel *Transmaths* Première S, édition 2011 :

La phrase :

si $f(x) = x^2 + 10$ *alors* $f'(x) = 2x$

est une implication

a) Enoncez l'implication réciproque

b) A l'aide d'un contrexemple, prouvez que cette implication est fausse.

On pourrait refuser d'emblée cet exercice car jugé trop difficile en classe de Première, mais l'idée est intéressante et peut être aussi reprise en Terminale pour l'introduction des primitives. Aucun quantificateur n'est donné explicitement, ce qui rend difficile la formulation de la négation de l'implication ! Comment alors rédiger ? Faut-il rétablir tous les quantificateurs et donc être amené à écrire l'implication sous cette forme :

Pour toute fonction f, si pour tout réel x, $f(x) = x^2 + 10$ *alors* $f'(x) = 2x$

Encore une fois, cette formulation rigoureuse est trop alambiquée pour la plupart des élèves. Difficile d'utiliser un tel énoncé. Voici ce que nous proposons :

Soit f une fonction dérivable sur **R**   *Si f est définie par* $f(x) = x^2 + 10$ *alors f' est la fonction définie sur* **R** *par* $f'(x) = 2x$

Cet énoncé est « plus digeste » à condition, bien sûr d'éclaircir l'expression « définie par » et le rôle du « soit », éclaircissement qui a pu être travaillé, de préférence, auparavant sur d'autres exercices et qui est indispensable pour pourvoir répondre aux questions

Remarquons d'ailleurs que dans les énoncés du baccalauréat, tous les quantificateurs ne sont pas écrits. En effet, une fonction est souvent présentée comme ceci :

Soit une fonction f définie sur **R** *par* $f(x) = \ldots$

Autrement dit, l'énoncé n'utilise pas « pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \ldots$ », mais l'énoncé reste rigoureux grâce à « définie sur **R** ». Nous avons décidé de nous conformer à ce modèle dans nos propres énoncés.

Nous illustrons ainsi, par ces choix sur le quantificateur « pour tout », l'une de nos hypothèses de travail : accompagner les élèves vers un langage expert, mais « pas trop ». Nous nous tenons à une ligne de conduite « médiane » : faire apparaître les quantificateurs (ou éventuellement une expression plus accessible aux élèves dans un premier temps), tout en évitant d'alourdir la rédaction et de la rendre artificielle pour les élèves.

2. *Vers un langage expert*

Cependant, nous savons bien que dans certains cas le quantificateur « Pour tout » . ….. se révèle nécessaire. Par exemple, nier la proposition « *Soit x un réel,* $x^3 > 0$ » est plus délicat que nier la proposition « *Pour tout réel x,* $x^3 > 0$ ». *Les expressions « Soit .. » et « pour tout… » ne sont pas interchangeables, l'appréhender mérite un travail de la part des élèves avec un accompagnement de l'enseignant.*

De plus, « TOUT » n'a pas la même signification dans toutes les situations qu'un élève rencontre, ce qui mérite d'être évoqué avec l'élève : les phrases « Tous les enfants aiment le chocolat » (une très grande majorité des enfants aiment le chocolat à quelques exceptions près) et « Tous les entiers naturels sont positifs ou nuls » (absolument tous les entiers naturels sans exceptions sont positifs ou nuls) en sont un exemple.

En seconde, réserver le quantificateur « *Pour tout* » à des égalités est un palier intéressant. L'enseignant peut aborder la négation de propositions simples (égalité ou inégalité quantifiée de manière universelle ou existentielle) et justifier ainsi la différenciation de « *Pour tout* » et « *Soit* ». Le quantificateur « *Pour tout* » pourra progressivement, en première et terminale S notamment être utilisé dans le cadre plus large des implications ou des variables non numériques (fonction).

Une première approche des quantificateurs peut être faite dans le cadre de calculs algébriques. Ici, nous proposons un énoncé très simple[7] :

> Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par
> $$f(x) = x^2 + 2$$
> On veut savoir si $f(x) = 2x + 2$
>
> a) Tester l'égalité avec $x = 0$ et avec $x = 2$
>
> b) A-t-on $f(x) = 2x + 2$?

Les quantificateurs ne sont pas présents dans l'énoncé (comme dans de nombreux énoncés de manuels), un objectif de l'exercice est d'*expliciter ces quantificateurs absents*. Certains élèves devinent ces quantificateurs sans les voir, mais pas tous, un débat peut donc s'engager dans la classe. Il permet de justifier la mise en place d'une rigueur dans l'utilisation des quantificateurs.

Ainsi, la première phrase doit se comprendre : « *Pour tout réel x,* $f(x) = 2x + 2$ ». De même, on pourra faire remarquer que la question « Savoir si $f(x) = 2x + 2$ » doit se lire « Savoir si pour tout réel x, $f(x) = 2x + 2$ ».

La conclusion peut être obtenue sous une forme rigoureuse : « *Il existe des réels x tels que* $f(x) = 2x + 2$ » et la proposition « *Pour tout réel x,* $f(x) = 2x + 2$ » est fausse puisque « *Il existe x tel que* $f(x) \neq 2x + 2$ ».

L'enseignant peut aussi aborder un niveau de langue plus élevé, même si beaucoup d'élèves ne sont pas prêts à percevoir les subtilités de ce discours. Il s'agit en quelque sorte de préparer le terrain pour les années à venir.

Voici un énoncé qui permet de préciser l'usage du « Soit » et du « Pour tout ».

7 L'enseignant peut adapter en fonction du niveau de sa classe les expressions algébriques en jeu pour que les réponses soient moins évidentes.

> Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :
> $$f(x) = (x + 2)^2 - 16 \ .$$
> 1) Montrer que pour tout réel x,
> $$f(x) = (x + 6)(x - 2).$$
> 2) Montrer que pour tout réel x,
> $$f(x) = x^2 + 4x - 12 \ .$$
> 3) Utiliser l'expression algébrique la plus adaptée pour répondre aux questions :
>
> a) Calculer $f(0)$; ……… b) $f(-6)$; ……… c) $f(-2)$; ……… .
>
> d) Déterminer les antécédents éventuels de 0
>
> e) les antécédents éventuels de -12

Ici, nous avons à nouveau un exercice classique (changement d'écriture d'une expression algébrique, factorisation, développement, résolution d'équation).

L'enseignant peut, si il le souhaite, présenter une démonstration rigoureuse d'une égalité à montrer « *Pour tout x* » : La correction de la question 2 peut se rédiger par exemple :

On doit montrer que pour tout x réel,
$$f(x) = x^2 + 4x - 12 \ .$$
Soit x un réel,
$$f(x) = (x + 2)^2 - 16 = x^2 + 4x + 4 - 12$$
en développant l'identité remarquable.

Puis, $f(x) = x^2 + 4x - 12$ *en réduisant.*

> *On a montré que, quel que soit x,*
> $$f(x) = x^2 + 4x - 12 \ .$$
> *Ce qu'on peut exprimer : Pour tout réel x,*
> $$f(x) = x^2 + 4x - 12 \ .$$

On détaille ici l'usage du « *Soit* » qui sert à désigner un élément générique pour montrer une proposition quantifiée par un « *Pour tout* ».

Ce type de rédaction est certes rigoureuse, mais difficile pour les élèves. On atteint un niveau de langue qui paraît hermétique à certains élèves. Elèves qui seront peut être, par ailleurs, noyés par les soucis techniques des calculs algébriques. Néanmoins ces manipulations de quantificateurs sont exigibles.[8]

Nous sommes conscients de la difficulté à obtenir ce niveau d'expertise des élèves. Il n'est, de plus, pas aisé de motiver les élèves à ce type d'exigence qui leur semble aussi nécessaire que peut l'être (pour eux) une démonstration. Nous pensons que la sensibilisation régulière[9] des élèves à ces situations de logique est indispensable pour donner un sens à cet effort d'utilisation des connecteurs.

Conclusion

L'apprentissage de toute langue se réalise sur plusieurs plans différents. D'une part, par le mimétisme et l'immersion dans un monde où cette langue est utilisée, d'autre part par la prise de conscience des règles qui régissent la grammaire, la prononciation, etc. Ce second effort doit évidemment être aidé par l'enseignant qui constamment doit corriger les mauvaises habitudes qui prennent racine dans la pratique quotidienne.

Nous avons voulu montrer qu'apprendre la logique mathématique n'en va pas différemment. Elle ne joue que sur quelques connecteurs, connecteurs profondément ancrés dès le plus jeune âge, mais utilisés au quotidien de manière inadaptée aux mathématiques. D'où un effort important à fournir pour en compléter ou rectifier l'usage.

Cet effort se doit d'être progressif, mais aussi réalisé de manière suivie et vivante pour porter ses fruits. Nous espérons avoir convaincu le lecteur que ce n'est pas impossible, mais nécessite une attention soutenue face à l'emploi que font les élèves des connecteurs. Cela peut se faire de manière transversale, interactive, en faisant réfléchir chacun sur ce qu'il veut dire. Un effort long, quotidien, mais payant en fin de compte. Une pratique à mettre en place à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques.

8 En filière scientifique

9 Voir les situations des paragraphes précédents

BIBLIOGRAPHIE

- BO du 12 juillet 2009. Mathématiques. Classe de Seconde.
- BO spécial n°8, du 13 octobre 2011. Mathématiques. Programmes Cycles Terminaux.
- Ressources pour la classe de Seconde (2009). Notations et raisonnement mathématiques. Dgesco. http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf
- Durand-Guerrier, V. (1996). Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.
- Durand-Guerrier, V. (2005). Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonne- ment mathématique dans une perspective didactique. Note de synthèse, Université Claude Bernard Lyon 1.
- Duval R. (1995). Sémiosis et Pensée humaine, Bern, Peter Lang.
- Grenier, D. (2009). « Changer le rapport aux élèves en intégrant l'activité de recherche dans les classes ». In L. Coulange & C. Hache (Eds.), Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, ARDM et IREM de Paris, p. 161–178.
- Grenier, D. (2015). « De la nécessité de définir les notions de logique au lycée ». Repères-IREM, 100, p. 65-80.
- Groupe IREM de Brest (2014). La logique au fil de l'eau. IREM de Brest.
- Hache, C. (2013). « Langage mathématique à la transition primaire/collège ». In Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève, Actes du 39 ème colloque de la Copirelem, IREM de Brest, p. 452–463.
- Mesnil, Z. (2014). La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.