REPERES - IREM. N° 103 - avril 2016

# LA GEOMETRIE DU COMPAS DE LORENZO MASCHERONI

Guillaume MOUSSARD
Irem des Pays de La Loire

*Résumé :* Cet article présente l'ouvrage de Lorenzo Mascheroni, la *Géométrie du compas* (1798) des points de vue mathématique et historique. Il restitue la démonstration que les tracés qui peuvent être réalisés à la règle et au compas peuvent être réalisés au compas seulement. Il montre, enfin, comment ce livre se situe à la rencontre de deux types d'ouvrage, en mêlant les préoccupations théoriques d'exactitude géométrique, et les préoccupations pratiques d'opérationnalité des constructions proposées.

Lorenzo Mascheroni est un géomètre italien né en 1750 à Bergame dans une famille de riches propriétaires. Ordonné prêtre à 17 ans conformément au projet familial, il enseigne les langues anciennes au collège de Bergame puis à Pavie. C'est là qu'il s'intéresse aux sciences mathématiques et physiques et qu'il les enseigne bientôt à l'université. Il décède en 1800 à Paris, où il avait été missionné par la jeune république Cisalpine pour participer aux travaux sur le nouveau système des poids et mesures.

L'ouvrage *Géométrie du compas* [1] est publié en 1797 à Pavie. Mascheroni y expose des solutions aux problèmes de construction de la géométrie élémentaire, comme par exemple les constructions de la bissectrice d'un angle, du milieu d'un segment, d'un polygone régulier etc., réalisées avec le seul compas, sans recourir à l'usage de la règle. Vanté à Paris par le général Bonaparte, qui a rencontré Mascheroni lors de la campagne d'Italie, l'ouvrage est traduit en français dès 1798. Un tel ouvrage portant sur les constructions de l'ancienne géométrie pourrait paraître à contre-courant, de l'avis même de son auteur, en un siècle où règne l'analyse. Bien au contraire, l'avenir proche montrera qu'il participe d'un regain d'intérêt pour les raisonnements et les méthodes géométriques qui se passent de l'emploi de l'algèbre : pensons par exemple aux ouvrages de Carnot et de Servois [2].

1 Mascheroni, Lorenzo, *Géométrie du compas*, trad. Carette, Paris, Duprat, 1798.
2 Carnot, Lazare, *Géométrie de position*, Paris, Duprat, 1803. Servois, François-Joseph, *Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie pratique*, Paris, Courcier, 1804.

La *Géométrie du compas* est une collection de problèmes élémentaires qui contient notamment toutes les propositions des *Eléments* de géométrie, par exemple ceux d'Euclide, qui sont des problèmes de construction. Ces constructions constituent ici un corpus à part entière, chose impensable dans l'ouvrage d'Euclide, où alternent théorèmes et problèmes de construction, pour la raison que les théorèmes y établissent les propriétés de figures construites en amont dans l'ouvrage, et que les constructions s'appuient pour leur démonstration sur des théorèmes démontrés en amont dans l'ouvrage.

Certes on trouve des corpus de problèmes de construction au XVIIIème siècle dans d'autres types d'ouvrages : dans certaines géométries pratiques qui traitent d'arpentage ou de construction, ou encore dans des récréations mathématiques. Ce qui distingue la *Géométrie du compas* de Mascheroni est qu'elle conjugue les approches théorique et pratique. Elle s'adresse aux artistes susceptibles d'employer ces constructions dans des situations où le compas procure une meilleure précision, et à la fois elle établit des résultats théoriques d'importance dans un style qui est à plus d'un titre celui d'un traité de géométrie. L'article met en évidence cette singularité de l'ouvrage à travers l'étude de quelques-unes de ses caractéristiques.

Comment Mascheroni organise-t-il les cent trente problèmes de construction dont il expose les solutions ? Mascheroni classe ces problèmes en douze livres. Chacun de ces livres aborde un thème spécifique, qui relève soit de la nature des figures qui y sont construites, soit des notions géométriques qui y sont mobilisées.

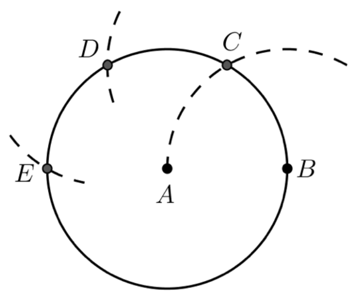
### *Motivations pratiques et théoriques de l'auteur*

Qu'est-ce qui amène Mascheroni à composer cet ouvrage qui a la double originalité de ne présenter que des problèmes et de n'employer que le compas ? L'auteur donne des éléments de réponse à cette question dans la préface. D'une part, il est aiguillonné, en lisant l'article *quart de cercle mural* de l'Encyclopédie, par la difficulté que rencontrent les astronomes à partager ce quart de cercle en parties égales avec le seul compas, instrument plus précis que la règle pour ce genre de fabrication. D'autre part, il se demande si « les problèmes élémentaires d'Euclide » ne pourraient pas être décomposés entre les constructions réalisables à la règle seule et les constructions réalisables au compas seul. Les motivations qu'affiche l'auteur dans sa préface sont donc de nature distincte : pratique d'une part pour la réalisation d'un instrument de mesure astronomique, théorique d'autre part en souhaitant compléter en quelque sorte les *Éléments* d'Euclide.

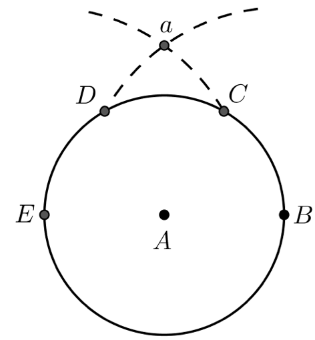
Le livre II traite entièrement de cette question du partage du cercle en parties égales. Mascheroni donne la construction au compas seul du partage de la circonférence en 240 parties égales, là où les *Éléments* de Legendre, par exemple, en donnent le partage en trois, quatre, cinq, six, dix et quinze parties égales uniquement. Quant au partage en 360 parties égales, courant pour la mesure des angles, rappelons qu'il n'est pas constructible à la règle et au compas. Voici, à titre d'exemple, comment Mascheroni obtient le partage du cercle en cinq parties égales avec le seul compas, construction qui revient à inscrire un pentagone régulier dans un cercle donné (encadré ci-contre).

### *Opérationnalité des constructions*

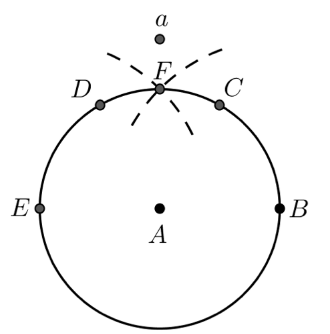
Les constructions de Mascheroni sont opérationnelles, c'est-à-dire que pour chaque problème, toutes les étapes de la construction avec



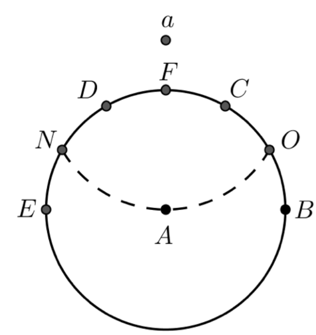

$AB = BC = CD = DE$



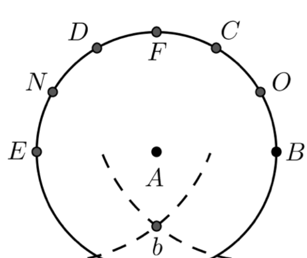

$BD = Ba = Ea$



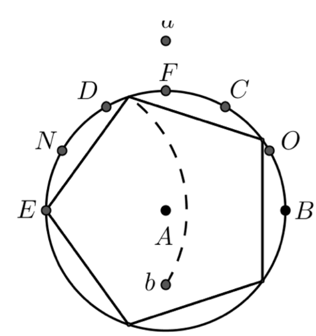

$aA = EF = BF$




$aA = aN = aO$




$aA = Nb = Ob$




*Eb* est le côté du pentagone cherché

le compas sont détaillées. C'est tout à fait différent de l'approche déductive des *Eléments* d'Euclide, où une construction ayant été démontrée, elle est ensuite convoquée dans les constructions ultérieures sans être à nouveau détaillée. Par exemple, la construction de la bissectrice d'un angle y est démontrée une fois pour toute, et les tracés nécessaire à sa réalisation ne sont plus jamais mentionnés par la suite.

Ce souci de l'opérationnalité des constructions influence fortement Mascheroni dans le choix des solutions qu'il expose. Par exemple, au paragraphe précédent, nous pouvons remarquer que la construction du partage d'un cercle en cinq parties égales s'appuie sur un premier partage du cercle en douze parties égales qui, conjugué avec le premier, permettrait de partager le cercle en soixante parties égales. L'emploi répété de la bissectrice d'un angle permettrait alors d'obtenir un partage en 240 parties égales. Toutefois, ce n'est pas la solution que donne Mascheroni à ce problème. Il expose une autre solution moins coûteuse en traits de construction.

Au-delà du nombre de traits de constructions, Mascheroni s'impose d'autres contraintes liées à l'opérationnalité des constructions. Il tâche ainsi d'utiliser le moins de points extérieurs à la figure possible et fait en sorte que les intersections de cercles se fassent le plus souvent possible à angle droit afin de déterminer le point avec un maximum de précision graphique.

Tout en respectant la rigueur euclidienne dans les démonstrations qu'il fait de ses constructions, nous voyons que Mascheroni se préoccupe de l'opérationnalité des constructions. Il propose d'ailleurs souvent plusieurs solutions à ses problèmes de construction, afin de répondre aux diverses situations concrètes susceptibles d'être rencontrées par les artisans qui les mettraient en œuvre.

### *Montrer avant de démontrer*

L'ouvrage de Mascheroni est une succession de constructions particulières qui se veut exhaustive. « Je ne vois plus d'après tout cela, écrit-il, quels autres éléments on pourrait désirer », c'est-à-dire quelles autres constructions le lecteur pourrait attendre, en comparaison de ce qu'il trouverait notamment dans des *Éléments* de géométrie. Il a voulu montrer à son lecteur les solutions à « un grand nombre des principaux » problèmes de géométrie élémentaire, en l'occurrence « les plus utiles, ou préférables à cause de leur élégance ». L'association des mots « utile » et « élégance » met ici encore en évidence la double préoccupation théorique et pratique de Mascheroni.

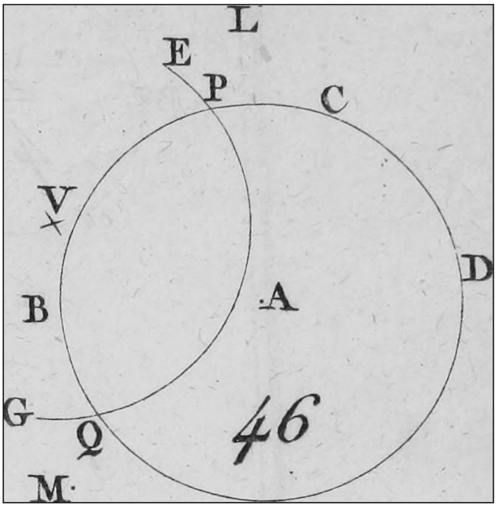
Cette succession de constructions particulières aboutit néanmoins au livre VII à un théorème d'importance, à savoir que tout point constructible à la règle et au compas peut l'être au compas seulement. C'est que l'auteur a voulu « montrer avant de démontrer ». Il assume le fait que des recherches particulières l'ont conduit à un résultat général, et il organise l'ouvrage en conséquence.

Mais dans le même temps, Mascheroni regrette de ne pas avoir découvert le « fil » qui relie entre elles ses constructions.

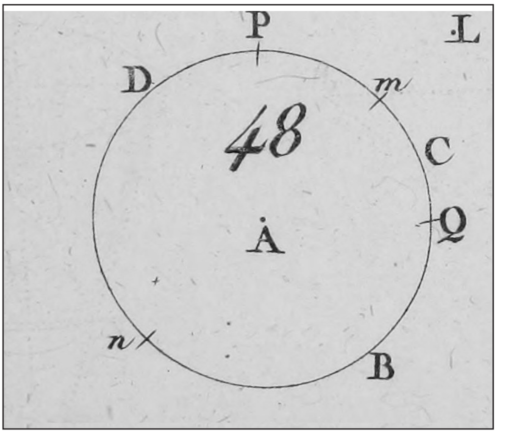
> *Voyant que je ne devais pas attendre beaucoup de l'application de l'Algèbre à la Géométrie, j'eus recours à d'autres moyens purement géométriques. Je ne les indique pas ici, parce que* [...] *je n'ai pas tenu toujours la même route, et que je dois beaucoup au hasard* [...] *Je laisse à d'autres le soin d'examiner la chaîne qui lie entre eux les problèmes de cette nouvelle théorie ; ils parviendront peut-être à suivre le fil qui conduit par ordre de l'un à l'autre.*

Ce souci de trouver un fil conducteur au sein de propositions diverses et sans lien apparent animera les géomètres du XIXème siècle à l'instar de Chasles. Voici comment Mascheroni démontre son théorème[3]. Les points peuvent être obtenus avec une règle et un compas par trois types d'intersection : celle de deux cercles, celle d'un cercle et d'une droite et celle de deux droites. La première relevant de l'usage du seul compas, il reste à établir que les deux autres sont réalisables avec le seul compas.

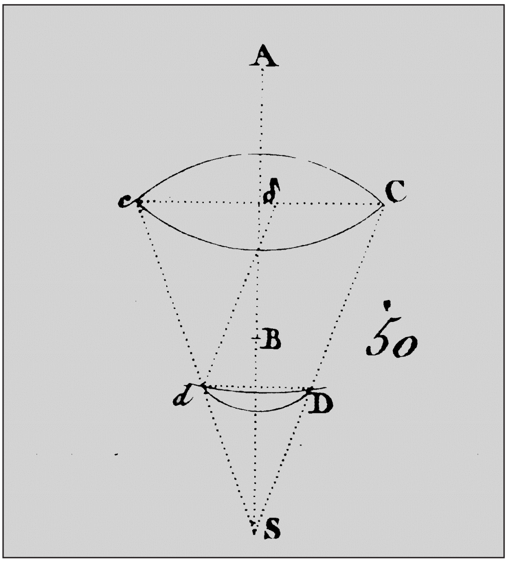
Commençons par l'intersection d'une droite (*LM*) et d'un cercle de centre *A* passant par *B* (*fig. 46*). Dans le premier cas où le centre du cercle n'appartient pas à la droite, on trace les cercles de centres *L* et *M* passant par *A* : ils se recoupent en *V*. Les cercles de centres *A* et *V* et de rayon *AB* se coupent en *P* et *Q*, points d'intersection de la droite (*LM*) avec le cercle donné.




Dans le deuxième (*fig. 48*) cas où *M* est au centre *A* du cercle, on trace un cercle de centre *L* et de rayon quelconque qui recoupe le cercle




donné aux points *P* et *Q*. On partage les deux arcs du cercle donné en deux également aux points *m* et *n*, points d'intersection de la droite (*LA*) avec le cercle donné.




Poursuivons (*fig. 50*) avec l'intersection *S* d'une droite (*AB*) avec une droite (*CD*). On trace

3 Mascheroni, *op. cit.*, p. 93 à 98.

les cercles de centres $B$ et $A$ passant par $C$ et $D$. Les cercles passant par $C$ (resp. $D$) se recoupent en $c$ (resp. $d$).

Soit $\delta$ le quatrième sommet du parallélogramme $CDd\delta$, simple à construire avec un compas seulement. Les triangles $c\delta d$ et $cCS$ étant semblables, on déduit que $CS$ (ou $cS$) est la quatrième proportionnelle aux trois lignes $c\delta$, $CD$, $Cc$.

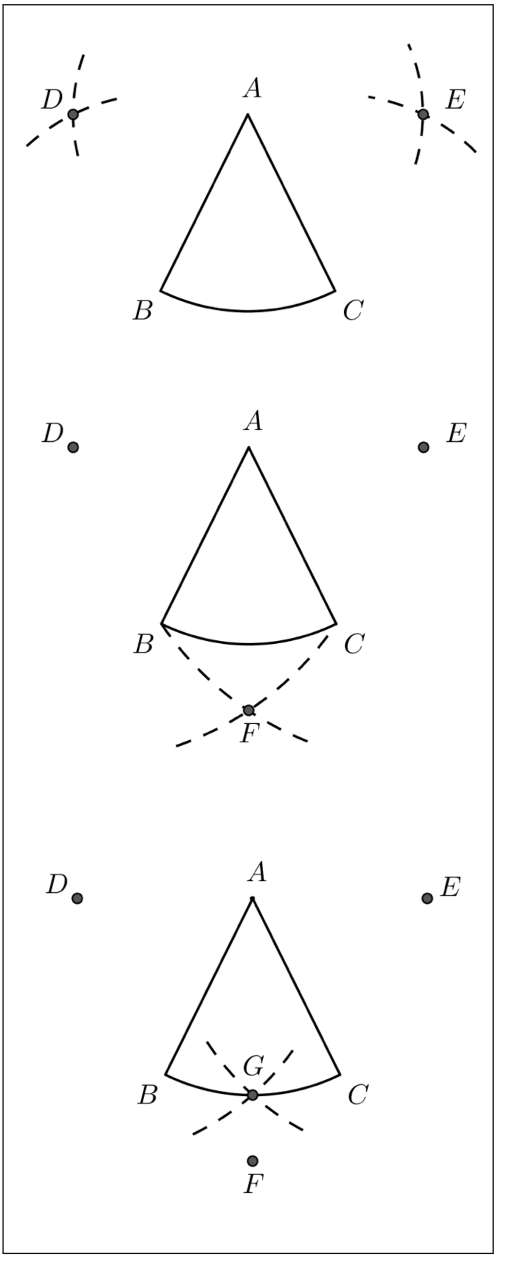
Dès lors, tout point construit avec une règle et un compas peut l'être avec le seul compas en remplaçant les usages de la règle par les constructions ci-dessus. Il faut noter toutefois que Mascheroni ne procède jamais de la sorte dans ses constructions où il propose des solutions plus simples. Cela apparaît dans les deux constructions suivantes, utilisées dans la démonstration ci-dessus, du partage d'un arc donné en deux parties égales, et d'une quatrième proportionnelle à trois lignes données.

Pour diviser un arc $BAC$ en deux parties égales[4], soient $D$ et $E$ les points d'intersection du cercle de centre $A$ et de rayon $BC$ respectivement avec les cercles de centres $B$ et $C$ passant par $A$.

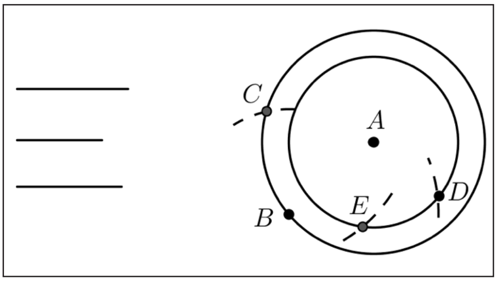
On place ensuite le point $F$ à l'intersection des cercles de centres $E$ et $D$ et passant respectivement par $B$ et $C$.

Enfin, les cercles de centres $D$ et $E$ et de rayon $AF$ se coupent en $G$, situé au milieu de l'arc $BC$.

Pour construire une quatrième proportionnelle[5] à trois longueurs données, on trace deux cercles de même centre $A$ dont les rayons




4 *Op. cit.*, p. 34.
5 *Op. cit.*, p. 68.




sont les deux premières longueurs données. Le cercle de centre un point *B* du premier cercle et de rayon la troisième longueur donnée recoupe ce même cercle en *C*. Prenant un écartement quelconque comme rayon, les cercles de centres *B* et *C* recoupent le deuxième cercle respectivement en *E* et *D*. La ligne *DE* est alors la quatrième proportionnelle cherchée.

La démonstration de cette construction utilise les triangles semblables *ABC* et *AED*. Nous voyons que cette construction, comme la précédente, n'est pas obtenue en partant d'une construction à la règle et au compas qui serait transformée en une construction au compas seul en remplaçant les usages de la règle par des constructions au compas, comme cela est rendu possible par la démonstration du théorème. Au contraire, la construction d'une quatrième proportionnelle est particulièrement rapide à effectuer au compas seul.

### *Précision graphique et exactitude géométrique*

Le douzième et dernier livre de l'ouvrage est consacré aux « problèmes résolus par approximation ». Il contient des problèmes qui ne peuvent pas être résolus avec la règle et le compas. Certains d'entre eux peuvent être résolus en employant d'autres courbes que la droite et le cercle, comme la cycloïde, la conchoïde, et la cissoïde.

Mais quoique « d'une invention très ingénieuse et d'un prompt et élégant usage dans la pratique », les instruments faits pour décrire ces courbes « laissent toujours quelques soupçons de petites erreurs qu'on ne peut pas quelquefois bien calculer ». Dès lors, « il vaudra mieux, dans beaucoup de cas, préférer à l'exactitude théorique de ces méthodes l'approximation pratique suffisante d'une construction faite avec la règle et le compas ». En l'occurrence, Mascheroni utilise à la fois les relations trigonométriques et les tables de trigonométrie pour proposer des constructions approchées au compas seul, dont il fournit par le calcul une estimation de l'erreur.

Il est préoccupé par la précision graphique des tracés, et dans le même temps il fournit une démonstration du degré de précision de chaque construction.

### *Conclusion*

L'ouvrage de Mascheroni se situe à la rencontre de deux types d'ouvrages, les *Éléments* de géométrie et les ouvrages de géométrie pratique. Les constructions sont organisées en livres et exposées dans le style euclidien en respectant le triptyque que forment l'énoncé, la construction, et la démonstration synthétique. Et dans le même temps l'opérationnalité de ces constructions est une préoccupation essentielle, qui impose des contraintes fortes aux constructions exposées. Mascheroni mêle les considérations d'ordre technique et les spéculations géométriques.

Parti d'un problème de fabrication d'un instrument de mesure, il déploie les solutions avec le seul compas de toutes les constructions contenues dans les *Éléments* de géométrie, et plus encore, aboutit à un résultat théorique d'importance. Finalement, le dernier livre éclaire la distinction entre la précision graphique des tracés et l'exactitude géométrique des solutions.