MATHEMATIQUES ET CONNAISSANCE DU MONDE [1]

Rudolf BKOUCHE
Irem de Lille

«L'idée que les mathématiques pouvaient en quelque sorte s'adapter à des objets de notre expérience me semblait remarquable et passionnante.» [2*]

Heisenberg

«... historically, intellectually, and practically, mathematics is primarily man's finest creation for the investigation of nature» [3]

Morris Kline

Introduction

A la question classique : *«A quoi servent les mathématiques ?»* on a tendance à chercher des réponses que l'on croit convaincantes en s'appuyant sur l'utilité supposée des mathématiques. De telles réponses s'inscrivent dans la conception utilitariste qui domine aujourd'hui un enseignement réduit à la formation et oublie l'objectif premier de l'enseignement : instruire, c'est-à-dire apporter à chacun les connaissances qui lui permettent de comprendre le monde ; c'est ce point qu'il faut mettre en avant en répondant à la question posée ci-dessus : *«les mathématiques ça sert à comprendre le monde»*. On peut préciser qu'il ne s'agit pas de comprendre le monde dans sa totalité mais de comprendre la part du monde qui peut être soumise à la mathématisation, même si on ne sait pas définir *a priori* cette part du monde.

Cela nous conduit à revenir sur ce que le physicien Wigner a appelé dans un article célèbre la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature [4]. Nous proposons dans cet article de montrer, à travers quelques exemples, comment les mathématiques contribuent à la connaissance et à la compréhension du monde par l'homme.

Quelques faits épars

la forme de la terre

Revenant en avion des Etats-Unis vers Paris, j'ai survolé vers six heures du matin le Cotentin, ce que j'ai reconnu parce que ce que je voyais ressemblait à ce que j'avais vu sur des cartes géographiques. Pourtant ceux qui ont dessiné la carte du Cotentin n'ont jamais

1 Ce texte est issu d'une intervention au colloque *Regards sur la géométrie*, Lille-Maubeuge, mars 2010
* les notes sont réunies en fin d'article.

vu cette presqu'île dans sa globalité. Plus tard j'ai fait une expérience analogue lors d'un vol Paris-Rabat en survolant l'angle droit défini par les côtes françaises et espagnoles au fond du Golfe de Gascogne. On pourrait faire une remarque analogue en comparant les cartes géographiques et les photographies par satellites.

Ainsi on reconnaît d'avion un morceau de la Terre parce qu'on a déjà vu des cartes géographiques dessinées par des hommes qui n'ont jamais vu ce morceau de Terre mais qui savaient recoller les petits morceaux qu'ils avaient mesurés. On ne saurait mieux montrer l'apport des mathématiques à notre connaissance du monde. Ici ce sont les mathématiques qui ouvrent la voie, l'expérience venant plus tard pour montrer l'adéquation entre la représentation mathématique et le monde.

Nous venons de parler de la connaissance de la forme de la Terre *via* les cartes géographiques, connaissance confirmée plus tard par les vues aériennes ou les images par satellites. Il faudrait rappeler le rôle pratique de ces cartes puisqu'elles ont accompagné le développement de la navigation. On peut rappeler que Mercator a développé le procédé qui porte son nom au XVIème siècle à l'époque des grandes navigations et que, connaissant l'impossibilité de représenter la Terre sur un plan, il cherchait une représentation conservant les angles, laquelle permet de définir le cap, c'est-à-dire l'angle que fait la route suivie par un navire avec le méridien. La projection de Mercator, si elle donne une image déformée de la Terre, a l'avantage de conserver les angles ce qui permet de représenter les courbes à cap constant (les loxodromiques) par des droites, ce qui aide à la navigation. Notons que l'idée de représentation conservant les angles est ancienne puisqu'on attribue l'invention de la projection stéréographique à Ptolémée.

questions de mécanique

Au Musée des Sciences et des Techniques de Florence, on peut voir l'objet suivant :

Un planche de bois est posée verticalement ; sur le bord supérieur droit, une rainure part verticalement et fait un coude pour s'achever horizontalement. Après la rainure on peut voir quelques arceaux convenablement placés de sorte qu'une bille lâchée sans vitesse initiale au sommet de la rainure passe entre les arceaux pour toucher le bord horizontal inférieur de la planche à un endroit marqué. On notera que les arceaux ont été placés *a priori* compte tenu de la loi fondamentale de la mécanique et des conditions initiales, la vitesse de la bille au moment où elle quitte la rainure étant déterminée par la hauteur de la rainure. De façon précise, si h désigne la hauteur de la rainure et g l'accélération de la pesanteur, cette vitesse v satisfait à la relation

$$v^2 = 2gh$$

Notons que si on penche la planche, la bille parcours la même trajectoire sur la planche. Nous laissons la démonstration de ce fait au lecteur. On voit ici une belle illustration de la théorie de la chute des corps. Ici encore ce sont les mathématiques qui permettent de connaître *a priori*, c'est-à-dire avant toute expérience, la trajectoire de la bille.

Nous reviendrons ci-dessous sur ce qu'on peut appeler la mathématisation de la mécanique. On peut noter, parmi les grandes réussites de cette mathématisation, la découverte théorique de la planète Neptune par Le Verrier, découverte suivie par son observation effective, l'une des plus belles conséquences de la théorie newtonienne de la gravitation. On pourrait aussi rappeler l'arrivée de la sonde Voyager II près de Neptune au moment prévu.

Ainsi la mécanique devenue un chapitre des mathématiques nous informe sur le monde et nous donne les moyens d'agir sur le monde [5].

électromagnétisme

Après la mécanique, nous citerons un autre chapitre de la physique mathématique, l'électromagnétisme, dont on sait le rôle qu'il a joué et qu'il joue encore dans le développement de notre civilisation scientifique.

Le déplacement d'une aiguille aimantée en présence d'un courant électrique mis en évidence par Œrsted met en relation deux types de phénomènes physiques, les phénomènes électriques et les phénomènes magnétiques ; cela conduira Ampère à développer une première théorie de l'électromagnétisme [6]. L'étude des relations entre électricité et magnétisme conduira Faraday à inventer (découvrir !) la notion de champ électromagnétique. On présente souvent Faraday, physicien autodidacte, comme un remarquable expérimentateur, ce qu'il fut, oubliant le physicien théoricien qu'il était. On ne découvre pas la notion de champ électrique ou de champ magnétique en regardant les figures formées par de la limaille de fer sous l'action d'un aimant, la notion de champ relève d'une approche théorique et à ce titre on doit considérer Faraday comme un grand physicien théoricien [7]. Restait alors à déterminer les lois du champ électromagnétique ainsi découvert, ce qu'a fait Maxwell en écrivant les équations qui portent aujourd'hui son nom [8]. Certaines solutions de ces équations représentent des phénomènes ondulatoires posant ainsi la question de l'existence des ondes électromagnétiques, lesquelles furent découvertes ultérieurement par Hertz. Ainsi s'est ouvert un nouveau chapitre de la physique, l'étude des ondes électromagnétiques, chapitre qui conduira aux applications que l'on sait, depuis la TSF jusqu'à la communication par satellite. En outre, en comparant les vitesses de propagation dans le vide de ces ondes électromagnétiques et de la lumière, on a été amené à considérer les ondes lumineuses comme des ondes électromagnétiques et à redéfinir l'optique comme un chapitre de l'électromagnétisme.

La déraisonnable efficacité des mathématiques

En 1960 Wigner publiait un article intitulé «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences» [9]. Pour expliquer cette efficacité, Wigner renvoie à ce qu'il appelle la loi empirique de l'épistémologie, laquelle est constituée de deux «miracles» (c'est le terme employé par l'auteur)

1 — la nature est soumise à des lois.

2 — l'homme peut connaître ces lois.

Il faudrait ici ajouter un troisième miracle

3 — ces lois s'expriment en termes mathématiques.

ce que Galilée exprimait sous la forme

*«Le grand livre de la nature
est écrit en termes mathématiques»*

Mais cette phrase peut être lue de deux façons, une lecture réaliste qui dit que les mathématiques sont dans la nature, une lecture positiviste qui dit que l'homme, pour comprendre la nature, la réécrit en termes mathématiques. Nous n'avons pas ici à nous prononcer sur le mode de lecture de l'adage galiléen, ce qui nous intéresse c'est que cette lecture constitue un mode de connaissance et de compréhension du monde.

C'est ce troisième miracle qui assure la déraisonnable efficacité des mathématiques. En ce qui concerne les deux premiers, il faudrait parler plus généralement de la déraisonnable efficacité des sciences de la nature, qu'elles soient ou non mathématisées.

la géométrie élémentaire

Nous avons déjà parlé du miracle de la cartographie qui permet de connaître la forme de la Terre sans avoir besoin de la voir ou du miracle qui permet de déterminer *a priori* la trajectoire d'un mobile. Ces deux miracles s'appuient sur un miracle antérieur, celui de la géométrie que Paul Valéry décrit de la façon suivante :

«Songez à la subtilité et à la volonté qu'il leur a fallu (aux géomètres grecs) pour accomplir l'ajustement si délicat, si improbable, du langage commun au raisonnement précis ; songez aux analyses qu'ils ont faites d'opérations motrices et visuelles très composées ; et comme ils ont bien réussi dans la correspondance avec les propriétés linguistiques et grammaticales. Ils se sont fiés à la parole et à ses combinaisons pour les conduire sûrement dans l'espace» [10]

Ainsi les *Eléments* d'Euclide apparaissent comme un miracle langagier. Il ne s'agit pas seulement de nommer des objets issus de la connaissance empirique, il s'agit de connaître leurs propriétés à partir d'un petit nombre d'entre elles, les axiomes et les postulats, et cela par le seul usage d'un discours convenablement réglé, ce qu'on appelle une démonstration. C'est l'usage de la démonstration qui donne à la connaissance des *«faits de l'espace»*, pour reprendre une expression de Méray [11], son caractère scientifique, renvoyant à la définition de la science donnée par Aristote dans les *Seconds Analytiques* :

«…connaître scientifiquement c'est savoir par démonstration» [12]

Exemple de ce miracle langagier, on montre qu'il n'existe, à similitude près, que cinq polyèdres réguliers. On comprend qu'un tel fait, qui ne pouvait être connu que par le raisonnement, soit apparu comme l'apothéose de la géométrie, conduisant à une conception mystique du monde, comme on peut le lire dans le *Timée* de Platon ou plus tard dans les écrits de Kepler.

les nombres complexes et la représentation des phénomènes vibratoires

Les nombres complexes se sont introduits pas effraction dans les mathématiques. Pour résoudre une équation du troisième degré, les mathématiciens italiens Tartaglia et Cardan utilisent la racine carrée d'un nombre négatif, terme qui disparaît dans le résultat final [13]. Nombre absurde qui apparaît essentiellement comme un artifice de calcul que les mathématiciens s'efforceront de justifier, mais pendant longtemps ces nombres, appelées *«imaginaires»* par Descartes, garderont un caractère mystérieux même s'ils permettent d'effectuer de nombreux calculs.

Parmi les nombreuses formules dans lesquelles interviennent les nombres complexes, nous citerons les formules d'Euler qui relient la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques ; de façon précise si x est un nombre réel, alors

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

dont une conséquence est la célèbre formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

dont on a dit qu'elle reliait l'arithmétique (1), la géométrie (π), l'algèbre (i) et l'analyse (e).

Mais le miracle, comme le remarque Wigner, réside dans la relation entre l'exponentielle complexe et les mouvements vibratoires.

On peut représenter un mouvement vibratoire comme la projection orthogonale d'un mouvement circulaire uniforme sur un diamètre, ce qui explique le rôle des fonctions trigonométriques dans l'étude des mouvements vibratoires. Mais on reste ici dans le champ réel et les fonctions trigonométriques suffisent.

Plus intéressante est l'approche par les équations différentielles à coefficients constants [14], l'exemple type étant l'équation différentielle

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

dont les solutions décrivent des mouvements vibratoires de fréquence $\nu = \omega / 2\pi$.

La solution générale s'écrit

$$x = \mathrm{A}\cos \omega t + \mathrm{B}\sin \omega t$$

ou

$$x = \mathrm{P}e^{\,i\omega t} + \mathrm{Q}e^{\,-i\omega t}.$$

Si la première forme donne une représentation réelle des solutions qui semble plus adaptée à l'étude des phénomènes physiques, la seconde forme s'appuyant sur les propriétés de l'exponentielle complexe à l'avantage de donner des calculs plus simples comme on peut le voir aisément lorsque l'on compose des mouvements de même fréquence.

On sait aussi que les équations différentielles expliquent le phénomène de résonance.

Si on considère un système oscillant de fréquence $\nu = \omega / 2\pi$ soumis à une action extérieure périodique de fréquence $\nu' = \omega'/ 2\pi$, alors le mouvement du système est défini par une équation différentielle de la forme

$$x'' + \omega^2 x = f(t)$$

où f est une fonction périodique de fréquence ν'. Lorsque les fréquences ν et ν' sont distinctes, alors le mouvement est défini par une fonction de la forme

$$x = g(t) + \mathrm{P}e^{\,i\omega t} + \mathrm{Q}e^{\,-i\omega t}.$$

où $g(t)$ est une solution particulière de l'équation différentielle.

Mais si $\nu = \nu'$, alors le système explose comme le montre la résolution de l'équation différentielle. C'est le phénomène de résonance dont on sait qu'il faut l'éviter dans certains cas et qu'il faut au contraire l'utiliser dans d'autres cas.

Quant à l'équation des ondes, elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

et on sait que les solutions s'expriment soit en séries de fonctions trigonométriques soit en séries d'exponentielles complexes. Ici encore l'expression en séries d'exponentielles complexes simplifie les calculs.

Mais l'intervention des exponentielles complexes ne se réduit pas à la seule simplification des calculs, on plutôt, si les calculs se simplifient, c'est qu'il y a une raison ; c'est le caractère périodique de l'exponentielle complexe et la possibilité de développer toute fonction périodique en séries d'exponentielles complexes.

Ainsi se rencontrent les phénomènes vibratoires et les nombres complexes, rencontre qui participe de ce que Wigner appelle les connexions inattendues (*inexpected connections*) reliant ainsi deux phénomènes *a priori* différents [15].

Si ces miracles ont une explication rationnelle, reste qu'ils posent la question des relations entre le monde et cette invention humaine que constituent les mathématiques. Que le monde soit mathématique comme le veut la tradition platonicienne ou que les mathématiques soient l'instrument inventé par l'homme pour comprendre le monde, cette adéquation (cette idonéité dirait Gonseth [16]) garde un caractère mystérieux pour qui s'adonne à l'étude de cette relation spécifique entre le monde et les mathématiques. C'est ce caractère mystérieux que Wigner met en avant lorsqu'il parle de la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature. Il faudrait plus généralement parler de la déraisonnable efficacité de la pensée rationnelle comme le dit le poète Réverdy lorsqu'il écrit :

> *« Impasse de la raison, c'est qu'elle est elle-même inexplicable par la raison. »* [17]

Notre propos ici est moins de revenir sur le déraisonnable de la raison que de montrer comment se construit la réduction d'une partie de la connaissance du monde aux mathématiques, ce qu'on peut appeler la *mathématisation* de cette connaissance. Nous précisons ici que cette réduction porte sur la connaissance du monde et non sur le monde. Ce qui est déraisonnable, c'est-à-dire inexplicable par la raison, c'est que cette réduction, non seulement rend le monde intelligible pour l'homme, mais permet à ce dernier d'agir sur le monde.

A ce déraisonnable, on peut répondre, avec Carlo Bourlet, que l'intervention des mathématiques dans les sciences de la nature n'est qu'un juste retour si l'on sait que c'est dans la nature que les mathématiques ont trouvé leurs sources les plus fécondes [18], mais cette argument ne fait que repousser la question qui est moins celle des mathématiques en tant que telles que celle de la possibilité de substituer le discours démonstratif ou le calcul à la connaissance empirique. On revient ainsi au miracle signalé par Paul Valéry ci-dessus.

La mathématisation

Qu'est-ce que la mathématisation ? Disons d'abord ce qu'elle n'est pas, l'application des mathématiques à un domaine de la connaissance. On n'a jamais appliqué les mathématiques à la mécanique, celle-ci est devenue un chapitre des mathématiques avec Galilée et cette mathématisation de la mécanique s'est affinée au long des siècles comme nous le rappelons ci-dessous. Il s'agit moins d'appliquer des mathématiques déjà construites pour étudier un phénomène que de mettre en place une méthode hypothético-déductive, c'est-à-dire l'utilisation de la démonstration pour découvrir de nouvelles vérités à partir de vérités déjà connues.

Cette mathématisation peut alors apparaître sous deux formes, l'utilisation de mathématiques déjà élaborées ou la construction de nouvelles formes de mathématiques qui pourront prendre à leur tour leur autonomie par rapport aux problèmes qu'elles se proposaient de résoudre. Ainsi la perspective dont les peintres de la Renaissance ont cherché à légitimer les constructions en s'appuyant sur la géométrie euclidienne et qui a conduit à développer un nouveau chapitre de la géométrie, la géométrie projective [19].

la mathématisation de la mécanique

Pour illustrer la question de la mathématisation nous reviendrons sur la mathématisation de la mécanique. On peut considérer que cette mathématisation commence avec les deux textes d'Archimède sur la statique, «De l'équilibre des figures planes» [20] et «Des corps flottants» [21] dans la mesure ou ils usent de la méthode déductive et pour cela s'appuient sur la géométrie. La statique s'inscrit ainsi comme un chapitre des mathématiques.

Reste le problème du temps et du mouvement. Si pour les Grecs, le langage, en particulier le langage de la science, doit dire le monde, les paradoxes de Zénon montrent que l'on ne peut parler du mouvement sans rencontrer de contradictions. La science ne saurait donc parler que de l'Etre, c'est-à-dire de ce qui est immuable. Cela conduit à l'impossibilité de construire une science rationnelle du mouvement et on peut y voir la raison de l'élimination du mouvement dans la science grecque, même si le principe de l'égalité par superposition qui fonde la géométrie s'appuie sur le mouvement tout en permettant de s'en débarrasser [22].

La science rationnelle du mouvement commence avec ce que l'on peut appeler la *statification* du temps *via* les travaux de Galilée. Le temps de la mécanique rationnelle n'est plus le devenir des Grecs qui permet de traduire le mouvement au sens général que lui donne Aristote, savoir ce qui est changeant [23], le temps de la mécanique rationnelle devient une idéalité mathématique analogue aux objets géométriques, ce qui conduira Newton à la définition suivante :

«Absolute, true and mathematical time, of itself, and from on its own nature, flows equally without relation to anything external…» [24]

Quelques dizaines d'années plus tard D'Alembert expliquera :

«Le temps par sa nature coule uniformément, et la Mécanique suppose cette uniformité.» [25]

ajoutant

«Du reste, sans connoître le temps en lui-même, et sans avoir de mesure précise, nous ne pouvons représenter plus clairement le rapport de ses parties que pas celui des portions d'une droite indéfinie. On peut donc comparer le rapport des parties de l'espace parcouru, comme on compare en Géométrie les rapports des parties d'une ligne à celui des parties d'une autre ligne …»

Dans ce cadre le mouvement d'un corps mobile peut être défini comme une fonction qui associé à tout instant la position de ce corps à cet instant. Ainsi la mécanique rationnelle est liée à la notion de fonction dont le mouvement d'un corps peut être considéré comme un archétype. En contrepoint, la notion de fonction d'une variable peut être interprétée en terme cinématique au sens où on peut considérer que la variable dépendante dépend de la variable indépendante comme la position d'un corps mobile dépend du temps. Plus qu'une simple analogie, on peut parler d'une identification de la notion mathématisée de mouvement et de la notion de fonction d'une variable. C'est cela qui permet de relier la notion de vitesse instantanée d'un point mobile et la notion de dérivée d'une fonction.

les trois moments
de l'histoire de la mécanique

La mécanique rationnelle commence avec l'énoncé des trois lois de Newton que l'on trouve dans les *Principia* :

«I- Every body continues in the state of rest, or uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.
II- The change of motion is proportional to the motive force impressed and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.
III- To every action there is always opposed an equal reaction or, the mutual actions of two bodies upon each other are always equal and directed to contrary parts.» [26]

C'est Varignon qui donnera à la seconde loi sa formulation différentielle que nous écrivons aujourd'hui

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$$

où $\boldsymbol{f}$ est la force, m la masse et $\boldsymbol{a}$ l'accélération [27].

Cette formule à l'apparence simple pose cependant un problème [28]. Si la notion d'accélération, la vitesse de la vitesse, peut être aisément définie *via* le calcul différentiel, il n'en est pas de même pour la masse définie par Newton comme la quantité de matière, notion floue que l'on peut considérer comme une définition de chose selon la terminologie des philosophes de Port-Royal [29] ; quant à la notion de force que l'on peut définir comme la cause du mouvement, elle reste une notion brumeuse qui sera critiquée par des mathématiciens comme D'Alembert qui écrit, pour éviter la question des causes du mouvement :

«J'envisage la Méchanique comme la Science des effets plutôt que celle des causes.» [30]

C'est ce point de vue qui l'amène à définir la force accélératrice comme *«la quantité à laquelle l'accroissement de la vitesse est proportionnelle»* [31], ce qui revient à définir la force comme une grandeur proportionnelle à l'accélération, la masse étant le coefficient de proportionnalité. Mais ce qui importe, bien plus que la définition de chacun des termes de la loi fondamentale, c'est la loi elle-même, c'est-à-dire la relation entre les trois termes. On peut considérer que c'est la loi qui, précise la signification des grandeurs qu'elle relie. La représentation d'une loi par une formule n'est pas une simple façon d'écrire, elle devient constitutive de la mécanique rationnelle.

La seconde loi de Newton, telle qu'elle a été énoncée par Varignon, permettra de réduire l'étude d'un mouvement à la résolution d'une équation différentielle du second ordre, ce qui permet de relier la mécanique et la théorie des équations différentielles ; d'une part l'étude du mouvement devient un chapitre de la théorie des équations différentielles, d'autre part tout équation différentielle du second ordre peut être considérée comme représentant un mouvement. En outre, c'est cette représentation du mouvement par des équations différentielles du second ordre qui fonde le déterminisme, le mouvement d'un corps étant déterminé par la position et la vitesse initiales.

A côté des trois lois de Newton, les mécaniciens mettront en évidence des quantités qui se conservent au cours du mouvement, ce qu'on appelle aujourd'hui les lois de conservation. Nous ne pouvons ici discuter d'icelle et nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage d'histoire de la mécanique de René Dugas [32].

Cette multiplicité de lois de la mécanique pose la question de l'organisation de la mécanique : réduire la mécanique à un petit nombre de principes à partir desquels on peut déduire les propriétés de la mécanique. Il s'agit donc, selon le modèle des *Eléments* d'Euclide, de construire une axiomatique. Le problème est posé par D'Alembert dans son *Traité de Dynamique* lorsqu'il rappelle que *«les principes en sont d'autant plus féconds qu'ils sont en petit nombre»* [33]. Il peut alors réduire la mécanique à trois principes, la force d'inertie, la composition des mouvements et l'équilibre.

Quelques années plus tard, Lagrange développera dans la *Mécanique Analytique* ce que l'on peut considérer comme une construction axiomatique de la mécanique. Pour cela il ira plus loin que la simple statification du temps mise en place au XVIIème siècle, réduisant la mécanique à un simple chapitre de l'analyse mathématique :

«On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demande ni constructions, ni raisonnement géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu le domaine.» [34]

On peut considérer, avec Lagrange, que l'analyse mathématique devient constitutive de la mécanique. Mais, contrairement à Euclide qui s'appuyait sur la connaissance intuitive, qu'elle soit empirique ou rationnelle, *via* les définitions, postulats, axiomes, Lagrange va poser un principe fondamental bien loin de toute approche intuitive, le principe des travaux virtuels, principe énoncé par D'Alembert dans son *Traité de Dynamique* [35] et que Lagrange reformule de la façon suivante :

«Si l'on imprime à plusieurs corps des mouvements qu'ils soient forcés de changer à cause de leur action mutuelle, il est clair qu'on peut regarder ces mouvements comme composés de ceux que les corps prendront réellement et d'autres mouvements qui seront détruits ; d'où il suit que ces derniers doivent être tels que les corps animés de ces seuls mouvements se fassent équilibres.» [36]

Ce principe, éloigné de toute intuition, permet à Lagrange de reconstruire la mécanique et d'établir les équations qui portent aujourd'hui son nom. A partir de ces équations, Lagrange, non seulement peut retrouver les lois newtoniennes du mouvement mais encore démontrer les lois de conservation qui deviennent ainsi des théorèmes.

La réduction analytique que propose Lagrange élimine tout recours à la géométrie. Pourtant, un siècle après Lagrange, Levi-Civita intègrera la mécanique analytique dans une nouvelle géométrie en s'appuyant sur la notion de variété mise en place par Riemann [37]. Définissant un système dynamique comme un point dans une variété, l'espace de configuration, il interprètera les équations de Lagrange comme l'analogue de la seconde loi de Newton [38]. Cette géométrisation de la mécanique analytique inaugurée par Levi-Civita s'enrichira au XX^{e} siècle avec le développement de la géométrie symplectique [39].

les images mécaniques dans les mathématiques

En contrepoint de la mathématisation de la mécanique, on peut noter l'intervention des images mécaniques dans le discours mathématique. Nous avons déjà noté l'interprétation cinématique de la notion de fonction d'une variable et l'interprétation mécanique des équations différentielles du second ordre. Nous citerons deux autres exemples, la notion de barycentre d'une part, la notion d'énergie d'autre part.

La notion de barycentre est issue des travaux d'Archimède sur l'équilibre des corps pesants [40]. C'est cette notion que reprend Möbius lorsqu'il définit les coordonnées barycentriques dans son ouvrage *Barycentrische Calcul* [41]. On peut définir le barycentre d'une famille de points massiques (A_i,m_i) comme le point massique (G,m) tel qu'un champ de forces constant agit sur la famille (A_i,m_i) comme il agit sur le point massique (G,m), ce qui se traduit par les relations

$$m = \sum m_i$$

$$\sum m_i \overrightarrow{GA_i} = 0$$

Cette définition suppose que la somme des masses ne soit pas nulle, ce qui est satisfait lorsque les coefficients m_i sont les masses de points matériels. On sait étendre la notion de barycentre au cas où $m = 0$, mais nous n'en parlerons pas ici.

La notion d'énergie est difficile et nous ne pouvons l'aborder ici, renvoyant aux ouvrages classiques de mécanique rationnelle. Nous rappellerons cependant le théorème de Lejeune-Dirichlet qui énonce qu'un corps plongé dans un champ de forces dérivant d'un potentiel est en équilibre stable (resp. instable) si son énergie potentielle est minimum (resp. maximum). Ce théorème relie la question de l'équilibre aux questions de maxima et de minima. En contrepoint, on peut interpréter la recherche d'un maximum ou d'un minimum comme un problème d'équilibre.

le point de Fermat

Soit ABC un triangle, pour tout point M du plan du triangle ABC, on note

$$\mathrm{V}(M) = MA + MB + MC$$

On appelle *point de Fermat* du triangle ABC le point M tel que la fonction V soit minimale.

Notons que la fonction V est continue et différentiable en tout point du plan sauf aux sommets du triangle. On a la relation

$$-\boldsymbol{grad}\,\mathrm{V}(M) = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}$$

On vérifie aisément que $\boldsymbol{grad}\,\mathrm{V}(M)$ s'annule si et seulement si les trois angles orientés de demi-droite (MA,MB), (MB,MC), (MC,MA) sont égaux. On oriente le plan de telle sorte que le triangle orienté soit positif ; dans ces conditions, si $\boldsymbol{grad}\,\mathrm{V}(M)$ s'annule, alors les angles orientés de demi-droite (MA,MB), (MB,MC), (MC,MA) sont égaux à $2\pi/3$. Pour que le point M existe, il faut que chacun des angles du triangle ABC soit inférieur à $2\pi/3$, auquel cas le point M est l'intersection des trois arcs capables d'où l'on voit respectivement les segments orientés sous l'angle $2\pi/3$, ce qui montre l'existence et l'unicité du point de Fermat. On montre aisément que si M est le point de Fermat, alors pour tout point N intérieur au triangle ABC, on a l'inégalité

$$\mathrm{V}(N) \geq \mathrm{V}(M)$$

l'égalité ayant lieu lorsque le point N coïncide avec le point M.

Mécaniquement, le problème revient à trouver la position d'équilibre d'un point M attiré par les trois points A, B, C, les forces d'attraction ayant des intensités égales. Si on note $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$, $\boldsymbol{F}_C$ ces forces, alors le point d'équilibre est atteint lorsque

$$\boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_C = 0$$

Les trois forces ayant des intensités égales, il s'ensuit que les angles orientés $(\boldsymbol{F}_A,\boldsymbol{F}_B)$, $(\mathbf{F}_B,\boldsymbol{F}_C)$ et $(\boldsymbol{F}_C,\boldsymbol{F}_A)$ sont égaux ce qui implique qu'ils valent chacun $2\pi/3$.

A titre d'exercice, nous proposons au lecteur de calculer les coordonnées barycentriques du point de Fermat par rapport aux sommets du triangle ABC. Lorsque l'un des angles du triangle est supérieur ou égal à $2\pi/3$, par exemple l'angle BAC, le raisonnement ci-dessus n'est plus valable et on peut montrer directement que le minimum de $\mathrm{V}(M)$ est atteint lorsque le point M coïncide avec le sommet A.

Sur le point de Fermat, appelé aussi point de Torricelli, on peut aussi lire l'article de Bernard Bettinelli cité en bibliographie.

équilibre du tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre, G l'isobarycentre des sommets, on considère les projections orthogonales respectives du point G sur les plans des faces du tétraèdre, alors l'une au moins de ces projections est à l'intérieur de la face correspondante.

On peut considérer le tétraèdre plein constitué d'une matière homogène, auquel cas le centre de gravité du tétraèdre plein coïncide avec le point G. Supposons le tétraèdre posé sur un plan horizontal, alors le tétraèdre est en équilibre si et seulement la projection du centre de gravité sur la face reposant sur le plan est à l'intérieur de cette face. L'énergie potentielle du tétraèdre est minimale lorsque la distance du centre de gravité au plan est minimal ; on en déduit que la tétraèdre est en équilibre lorsqu'il repose sur la face la plus proche de G et dans ce cas la projection de G sur le plan de la face est à l'intérieur de cette face.

On peut donner une démonstration géométrique, mais l'idée de cette démonstration est donnée par le raisonnement mécanique. On montrer que la projection de l'isobarycentre sur le plan de la face la plus proche de G est à l'intérieur de cette face. Nous laissons au lecteur le plaisir de cette démonstration.

la mathématisation de la physique

D'autres formes de mathématisation se sont développées avec la théorie de Fourier et l'étude des phénomènes vibratoires, avec l'électromagnétisme, avec la thermodynamique et plus tard avec la théorie de la Relativité et la mécanique quantique. Cette mathématisation montre combien les concepts mathématiques et les concepts physiques sont liés. On remarque ainsi que le formalisme mathématique, loin d'être un ajout qui permet de représenter les phénomènes physiques, est constitutif de la physique. C'est cela qui conduit Wolfgang Pauli à expliquer, à propos de la théorie de la Relativité :

«The concept of the state of motion of the « luminiferous aether », as the hypothetical medium was called earlier, had to be given up, not only because it turned out be unobservable, but because it became superfluous as an element of a mathematical formalism, the group theorical properties of which would only be disturbed by it.» [42]

puis quelques lignes plus loin, à propos de la mécanique quantique :

«Again, these concepts (classical field, orbits of particles) are rejected, not only because the orbits are unobservable, but also because they became superfluous and would disturb the symmetry inherent in the general transformation group underlying the mathematical formalism of the theory.» [43]

Ainsi le formalisme mathématique, loin de n'être qu'une reformulation de la théorie physique, en est un des constituants. On ne peut dissocier le formalisme de sa signification physique au sens que c'est *via* ce formalisme que se définissent les concepts de la théorie. Notons qu'une telle position conduit à la question suivante : peut-on exprimer les résultats de la science en langage naturel ? On aimerait répondre *oui*, mais ce *oui* repose sur une croyance, celle que l'on peut exprimer les résultats de la science en langage naturel. On sait aujourd'hui la difficulté, voire l'impossibilité, d'exprimer les propriétés de la mécanique quantique en langage naturel comme le montrent, par exemple, les bien mal nommées *«relations d'incertitude»* de Heisenberg.

Dans une conférence donnée au Centre de Physique Théorique de Trieste, Heisenberg raconte un entretien avec Einstein sur la notion d'observable. Alors que Heisenberg expliquait à Einstein qu'il voulait construire une théorie physique à partir des seules quantités observables, renvoyant à l'exemple d'Einstein lui-même, ce dernier lui répondait qu'une telle conception de la physique était absurde et précisait :

> *«Qu'une chose soit observable ou non dépend de la théorie que vous utilisez. C'est la théorie qui décide de ce qui est observable.»* [44]

Les mathématiques sont ainsi une part essentielle de la connaissance du monde. Il y a ici deux positions à éviter, d'une part celle qui dit que toute science est mathématisable, voire que le scientifique s'identifie au mathématisable, autrement dit qu'une connaissance ne devient scientifique que lorsqu'elle est mathématisée, d'autre part celle qui fixe des limites *a priori* au mathématisable.

mathématisation et modélisation

Pour compléter cette partie sur la mathématisation, nous devons distinguer entre la mathématisation telle que nous l'avons définie et la modélisation. La modélisation consiste à utiliser des mathématiques déjà constituées pour étudier une situation qui ne relève pas des mathématiques. Il n'est pas question d'intégrer l'étude de cette situation dans un cadre mathématique mais d'user de mathématiques à des fins spécifiques ; en ce sens on peut parler d'application, ou d'utilisation des mathématiques. Se pose ici la question de la pertinence du modèle mathématique, question locale qui n'engage aucune conception globale de la relation entre les mathématiques utilisées et la situation étudiée. Nous n'en dirons pas plus sur la modélisation, renvoyant à l'ouvrage de Nicolas Bouleau cité en référence.

Mathématiques mixtes

L'intervention des mathématiques dans les sciences de la nature a conduit à distinguer les *mathématiques pures*, celles du nombre et de la figure, telles que les avaient développées les mathématiciens grecs, et ces nouvelles mathématiques qui étudient des grandeurs d'origine empirique, ce que l'on a appelé les *mathématiques mixtes*.

La distinction «mathématiques pures/mathématiques mixtes» a été introduite par Francis Bacon dans sa *Grande Restauration des Sciences* et reprise par D'Alembert dans la classification des sciences qu'il propose à la fin du *Discours préliminaire à l'Encyclopédie* [45].

Dans sa *Grande Restauration de Sciences*, Bacon écrit :

> *«Les mathématiques sont pures ou mixtes. Aux mathématiques pures se rapportent les sciences qui ont pour objet la quantité, abstraction faite de la matière et des axiomes physiques. Elles se divisent en deux espèces, savoir : la géométrie et l'arithmétique, dont l'une traite de la quantité continue, et l'autre de la quantité discrète. … Les mathématiques mixtes ont pour sujet les axiomes et une certaine fonction de la physique. Elles considèrent la quantité en tant qu'elle peut servir à éclaircir, à démontrer et à réaliser ce qu'elles empruntent de cette science; car il est dans la nature une infinité de choses qu'on ne peut comprendre parfaitement démontrer assez clairement ni appliquer avec assez de sûreté et de dextérité sans le secours et l'intervention des mathématiques.»* [46]

et l'auteur précise que les mathématiques mixtes comprennent *«la perspective, la musique, l'astronomie, la cosmographie, la science des machines et quelques autres»*. On peut y a jouter d'autres domaines qui sont apparus au fur et à mesure des progrès de la physique.

Nous lisons à l'article «Mathématiques» de l'*Encyclopédie* de D'Alembert et Diderot :

«Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première qu'on appelle Mathématiques pures considère la propriété de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est calculable ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second cas, par l'étendue ; dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie.
La seconde classe s'appelle Mathématiques mixtes ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'ele est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers.» [47]

D'Alembert qui est l'auteur de l'article «Mathématiques» précise ensuite :

«Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, etc.»

Dans l'article «Mathématiques» D'Alembert se contente de citer les grandes divisions des Mathématiques mixtes sans entrer plus avant dans leur définition et renvoie au *Discours Préliminaire* [48] pour plus de précision.

On peut alors poser la question de ce qui caractérise les mathématiques mixtes : en quoi sont-elles des mathématiques ? que signifie le terme *«mixtes»* opposé au terme *«pures»* ?

Le terme *«mixtes»* laisse entendre une part de connaissance empirique dans la définition des mathématiques mixtes ; on peut alors essaye d'expliciter l'opposition «pures/mixtes» *via* les termes «abstrait» et «concret» utilisé dans le texte de l'*Encyclopédie* : les mathématiques pures étudient la grandeur en tant qu'elle est considérée comme abstraite alors que les mathématiques mixtes s'intéressent aux grandeurs concrètes, ce qui ne fait que repousser la question. D'autant que D'Alembert écrit pour expliquer le rôle de l'abstraction dans la construction de la science :

«L'abstraction en effet n'est autre chose que l'opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière, sans faire attention aux autres.» [49]

L'abstraction s'inscrit dans ce que l'on peut appeler une problématisation, c'est-à-dire un ensemble de questions que l'on se pose lorsque l'on est confronté à des situations que l'on essaie de comprendre. L'abstraction (l'acte d'abstraire) est ainsi constitutive de toute connaissance scientifique.

Revenant à la part de connaissance empirique intervenant dans la définition de la grandeur concrète, on peut alors poser la question : pourquoi la géométrie est-elle classée parmi les mathématiques pures alors que la mécanique est classée parmi les mathématiques mixtes ?

Pour préciser cette question nous reviendrons aux articles «Géométrie» et «Mécanique» de l'*Encyclopédie*, articles tous deux écrits par D'Alembert.

«Géométrie est la science des propriétés de l'étendue en tant qu'on la considère comme étendue et figure» [50]

Dans les lignes qui suivent, D'Alembert rappelle l'étymologie du terme «géométrie» et par conséquent l'origine empirique du domaine de la connaissance définie par ce terme. La géométrie est ainsi définie comme provenant de l'abstraction de connaissances empiriques antérieures. Reste alors à expliciter le mode d'abstraction qui conduit de la géométrie empirique à la géométrie mathématique et le rôle joué par la méthode hypothético-déductive, point sur lequel nous reviendrons. La définition de la géométrie donnée par D'Alembert prend en charge ce processus d'abstraction, processus qui apparaît au XVIIIème siècle comme achevé. C'est en ce sens que D'Alembert peut considérer que la géométrie, définie comme l'étude des propriétés de cette entité abstraite qu'est l'étendue, participe des mathématiques pures.

«Méchanique, partie des mathématiques mixtes, qui considère le mouvement et les forces motrices, leur nature, leurs lois et leurs effets dans les machines.» [51]

La part d'empirisme est donnée ici par le mouvement ; c'est donc le mouvement qu'il faut mathématiser, ce qui permettra de réduire la mécanique à une théorie hypothético-déductive analogue à la géométrie rationnelle telle qu'elle est exposée dans les *Eléments* d'Euclide, lesquels resteront jusqu'au XIXème siècle l'exemple emblématique d'une théorie hypothético-déductive.

On peut comparer le point de vue de D'Alembert à celui de Newton développé dans les *Principia*. Dans la préface des *Principia*, Newton écrit :

«Geometry does not teach us to draw these lines (right lines and circles), but requires that the learner should first be taught to describe these accurately before he enters upon geometry, then it shows how by these operations problems may be solved. To describe right lines and circles are problems, but not geometrical problems. The solutions of these problems is required from mechanics, and by geometry the use of them, when so solved, is shown; and it is the glory of geometry that from those few principles, brought from without, it is able to produce so many things. Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but the part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring.» [52]

Ainsi la géométrie participe d'une mécanique universelle. Newton distingue alors la géométrie comme science de la grandeur *(magnitude)* et la mécanique comme science du mouvement des corps.

Mais si, selon Newton, ces deux sciences, la géométrie et la mécanique, s'appuient sur une connaissance empirique (la notion de corps) et dans la mesure où la première s'inscrit dans une mécanique universelle, en quoi participent-elles, selon D'Alembert, de mathématiques différentes.

Ces remarques nous montrent la difficulté de la distinction pures/mixtes. Faut-il y voir l'impact de la tradition. La géométrie rationnelle a suffisamment d'ancienneté et par conséquent de prestige pour apparaître, même aux yeux des mathématiciens empiristes du XVIIIème siècle, comme libérée de ses origines empiriques.

On pourrait alors penser que la géométrie a acquis le privilège de participer des mathématiques pures alors que la mécanique n'a pas encore atteint, au milieu du XVIIIème siècle, l'état de pureté. Une telle conception pourrait nous conduire à dire que cet état de pureté a été atteint avec Lagrange et que la *Mécanique Analytique* est un traité de mathématiques pures. Pourquoi pas ? il faut alors préciser que la mécanique devient un chapitre des mathématiques en se dé-géométrisant et en se dé-mécanisant [53]. Se pose alors une nouvelle question : comment se détermine le passage, s'il passage il y a, du statut de mathématiques mixtes à celui de mathématiques pures ? On voit ainsi que la distinction «mathématiques pures/mathématiques mixtes» est loin d'être simple, mais plus profondément c'est la distinction «abstrait/concret» qui est en question.

Les choses se compliquent lorsqu'on rappelle que, à côté des mathématiques mixtes, D'Alembert place, dans sa classification des sciences, la physique qu'il divise en deux parties, d'une part la vulgaire ou palpable qui résulte de l'observation et d'autre part l'occulte, celle qui ne se restreint pas *«à écouter la nature, mais qu'elle l'interroge ou la presse»* [54] (nous parlerions aujourd'hui d'expérimentation) ; mais si la physique occulte devenue physique expérimentale prend sa source dans l'expérience, elle ne peut se développer que par sa théorisation et sa mathématisation.

> *«Le premier objet réel de la Physique expérimentale est l'examen des propriétés générale des corps que l'observation nous fait connoître pour ainsi dire en gros, mais dont l'expérience seule peut mesurer et déterminer les effets ; tels sont, par exemple, les phénomènes de la pesanteur. Aucune théorie n'aurait pu nous faire trouver la loi que les corps pesans suivent dans leur chute verticale ; mais cette loi une fois connue par l'expérience, tout ce qui appartient au mouvement des corps pesans, soit rectiligne, soit curviligne, soit incliné, soit vertical, n'est plus que du ressort de la théorie …»* [55]

Pourtant quelques lignes plus haut, D'Alembert expliquait que *«la Physique expérimentale n'est nullement nécessaire pour déterminer les lois du mouvement et de l'équilibre»* [56] et précisait que *« un véritable Physicien n'a pas plus besoin du secours de l'expérience pour démontrer les lois de la Mécanique et de la Statique, qu'un Géomètre n'a besoin de la règle et du compas pour s'assurer qu'il a résolu un problème difficile»*.

Par delà l'inductivisme propre aux empiristes du XVIIIème siècle, on peut lire ici l'importance de la part théorique dans la connaissance de la nature ; c'est cette part théorique qui a conduit à penser les mathématiques mixtes en même temps qu'elle marque l'impossibilité de préciser la frontière entre mathématiques pures et mathématiques mixtes.

La mathématisation comme reconstruction rationnelle du monde

Dans *Le Nouvel Esprit Scientifique*, Bachelard écrit :

> *«Après avoir formé, dans les premiers efforts de l'esprit scientifique, une raison à l'image du monde, l'activité spirituelle de la science moderne s'attache à construire un monde à l'image de la raison. L'activité scientifique réalise, dans toute les force du terme, des ensembles rationnels.»* [57]

Mais contrairement au discours bachelardien qui place cette transformation de la raison scientifique dans la science du XXème siècle, on peut considérer que cette transformation a commencé avec la géométrie grecque. Si la physique aristotélicienne, en se voulant au plus proche de la connaissance intuitive, participe de la construction d'une raison à l'image du monde, la géométrie grecque, telle qu'elle a été codifiée par Euclide, participe de la rationalisation du monde, la découverte des cinq polyèdres réguliers en étant l'une des marques les plus profondes [58]. En ce qui concerne la mécanique, cette transformation aura lieu avec la géométrisation du temps telle qu'elle apparaît avec la Révolution Scientifique du XVIIème siècle. La mathématisation croissante des sciences de la nature et la naissance des méthodes formalistes au début du XXème siècle renforceront cette emprise du rationnel dans la connaissance du monde, renforcement qui apparaît comme un renouvellement de la pensée scientifique. Mais ce *nouvel esprit scientifique*, pour reprendre l'expression de Bachelard, s'inscrit dans une histoire de la mathématisation des sciences de la nature telle que nous l'avons racontée ci-dessus.

de l'idéal scientifique

Dans son ouvrage sur l'histoire de la mécanique, Ernst Mach écrit :

> *«Toute science se propose de remplacer et d'épargner les expériences à l'aide de la copie et de la figuration des faits dans la pensée»* [59]

C'est cette copie que l'on appelle une expérience de pensée, c'est-à-dire une expérience imaginée qui décrit ce que serait l'expérience réellement effectuée. On trouve de nombreux exemples dans la littérature physique moderne [60], mais on peut la retrouver bien plus avant, l'un des premiers exemples étant la démonstration de la proposition 4 du Livre I des *Eléments* d'Euclide [61]. Un autre exemple est donné par les démonstrations de la formule d'Euler pour les polyèdres convexes données successivement par Cauchy [62] et par Jordan [63].

On peut considérer l'expérience de pensée comme l'une des premières formes de la démonstration possédant les trois caractères de discursivité, de nécessité, d'universalité.

C'est cette notion d'expérience de pensée qui conduit Mach à écrire quelques pages plus loin :

> *«Toute science a donc, selon nous, la mission de remplacer l'expérience»* [64]

Dans ce cadre l'expérience conserve sa place, en amont si on considère que nos idées sont issues de notre expérience du monde, en aval dans la mesure où, devenue expérimentation, l'expérience a pour objet de vérifier l'adéquation (l'idonéité dirait Gonseth [65]) des résultats théoriques avec le monde.

Dans un article ancien, Hermann Laurent définissait les trois phases de l'activité scientifique qui sont, dans cet ordre, l'observation, le raisonnement, l'expérimentation [66]. On peut alors remarquer que si la troisième s'appuie sur la phase de raisonnement, la première, l'observation, s'appuie sur des idées *a priori* sans lesquelles on ne saurait observer. S'entremêlent ainsi dans l'observation le sensible et les idées sans que l'on puisse faire la part entre ce qui relève du sensible et ce qui relève des idées. On peut ici renvoyer aux trois aspects de la connaissance tel que les présente Gonseth, l'aspect intuitif, l'aspect théorique, l'aspect expérimental, la question étant moins de faire la part entre ces trois aspects que de comprendre comment ils s'articulent [67].

de la connaissance discursive

Que ce soit l'expérience de pensée ou des modes de démonstration plus sophistiqués, on peut parler de connaissance discursive ce qui renvoie à la définition aristotélicienne de la science comme nous l'avons déjà remarqué. Cela implique de définir les conditions de ce mode de connaissance. Nous rappellerons ici ses trois caractères essentiels.

— La connaissance discursive permet une connaissance a *priori*, c'est-à-dire indépendante de toute expérience. A partir de connaissances connues, on obtient de nouvelles connaissances par le seul effet d'un discours convenablement réglé.
— La connaissance discursive est une connaissance nécessaire. Ce qui est obtenu par démonstration non seulement est vrai mais ne peut pas ne pas être vrai.
— La connaissance discursive est une connaissance universelle. Elle ne s'applique pas aux

objets singuliers mais à une classe d'objets définie par des propriétés explicites.

Ainsi la connaissance discursive montre ce que l'on peut appeler les raisons du vrai. C'est en ce sens que l'on peut dire que *«la démonstration, ça sert à comprendre»*, et c'est cet aspect de la démonstration qui doit apparaître dans l'enseignement autant dans les mathématiques que dans toutes les sciences mathématisées, telle la physique. La codification nécessaire des règles du discours démonstratif vient en second sauf à réduire le discours démonstratif à un règlement relevant plus de l'ordre juridique que de l'ordre scientifique, réduction qui conduit à considérer la démonstration comme un exercice de style propre à la corporation des mathématiciens.

l'axiomatique comme organisation du discours démonstratif

On peut considérer l'axiomatique comme l'organisation du discours démonstratif. On peut alors distinguer deux grands types d'axiomatiques, l'axiomatique euclidienne et l'axiomatique hilbertienne.

Pour Euclide, la géométrie étudie certains objets qu'il définit au début des *Eléments*. Ces définitions ne sont pas sans poser problème, ce qui a conduit les philosophes de Port Royal à distinguer deux types de définitions, les définitions de choses et les définitions de noms [68]. Une fois les définitions énoncées, Euclide peut alors énoncer les axiomes [69] à partir desquelles on peut démontrer les théorèmes.

Au début de ses *Eléments de Géométrie*, Legendre rappelle ce que sont les axiomes et les théorèmes :

> *«**Axiome** est une propriété évidente par elle-même.*
>
> ***Théorème** est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé **démonstration**.»* [70]

Les axiomes apparaissent alors comme des vérités premières à partir desquelles on peut démontrer d'autres vérités. Ces vérités portent sur des objets, les idéalités mathématiques, que l'on peut considérer comme des abstractions, au sens de D'Alembert (cf. ci-dessus). Ce sont ces abstractions qui permettent de dépasser la connaissance empirique.

Pourtant cette conception euclidienne de l'axiomatique rencontre ses limites avec la difficulté posée par la définition des objets premiers comme l'ont rappelé les philosophes de Port-Royal (cf. ci-dessus). Pour comprendre cette difficulté, nous citerons encore une fois D'Alembert qui écrit, à propos de la difficulté de la démonstration du postulat des parallèles :

> *«On parviendrait plus facilement à la trouver* (la démonstration du postulat des parallèles)*, si on avait une bonne définition de la ligne droite…»* [71]

Les méthodes formalistes inventées pour répondre aux problèmes posés par les géométries non-euclidiennes et par la théorie des ensembles permettront de répondre au problème posé par la définition des objets premiers. Dans ce cadre les objets se réduisent à des mots, les termes primitifs, sans signification extérieure pour reprendre une expression de Gonseth [72], et les axiomes ne sont que les règles d'usage de ces termes primitifs. Une fois les termes primitifs et les axiomes énoncés, on peut alors dérouler le discours démonstratif. C'est une telle construction que l'on trouve dans l'ouvrage de Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* [73]. Mais une axiomatique formaliste ne se réduit pas à cette construction, elle renvoie à des significations extérieures au sens où ce sont ces significations extérieures au discours qui guident la construction formelle ; ainsi la construction hilbertienne de la géométrie apparaît comme une reconstruction formelle de la géométrie euclidienne, reconstruction formelle qui permet d'assurer la rigueur du raisonnement. On voit ainsi apparaître une dualité entre le discours formel qui assure la rigueur et la cohérence du discours et les significations auxquelles le discours renvoie. C'est cette dualité que rappelle Hilbert dans la préface de *Geometry and Imagination* :

> *«In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward* ***abstraction*** *seeks to crystallise the* ***logical*** *relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward* ***intuitive understanding*** *fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live* ***rapport*** *with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations.»* [74]

C'est cette conception hilbertienne qui a conduit aux diverses constructions axiomatiques qui ont accompagné le développement de la physique contemporaine. On y retrouve la dualité hilbertienne, d'une part un discours formel construit à partir d'objets primitifs et d'axiomes, d'autre part des significations extérieures qui renvoient aux concepts étudiés. Exemple de cette dualité, la reconstruction de la géométrie élémentaire *via* l'algèbre linéaire [75]. C'est encore cette dualité que l'on retrouve dans la représentation géométrique de la théorie de la Relativité Restreinte par Minkowski, représentation géométrique qui peut être développée indépendamment de toute signification physique mais qui, parce qu'elle explicite la structure de la théorie, lui assure une plus grande efficacité. Il faudrait ensuite citer les diverses constructions axiomatiques des théories quantiques dont le plus bel exemple est l'exposé de Dirac cité en bibliographie.

Pour terminer ces remarques sur l'axiomatisation, nous rappellerons la conférence de Hilbert au Congrès International des Mathématiques de Paris en 1902 qui expose vingt trois problèmes qui se posent aux mathématiciens. Parmi ces problème le sixième porte sur le traitement mathématique des axiomes de la physique renvoyant à l'exemple de la géométrie. C'est ainsi qu'il propose de *«traiter sur ce modèle les branches de la Physique où les Mathématiques jouent un rôle prépondérant ; ces branches de la Science sont, avant tout, le Calcul des Probabilités et la Mécanique»* [76].

géométrie et géométrisation

Nous avons expliqué ci-dessus comment la mathématisation de la mécanique s'est construite sur une représentation géométrique du temps. On peut considérer que cette géométrisation du temps marque le début de ce que nous avons appelé la géométrisation de nombreux domaines de la science [77]. C'est cette géométrisation qui conduit Bourbaki à écrire dans ses *Eléments d'Histoire des Mathématiques* :

> *«Dépassée en tant que science autonome et vivante, la géométrie classique s'est ainsi transfigurée en un langage universel de la mathématique contemporaine, d'une souplesse et d'une commodité incomparables.»* [78]

Mais bien plus qu'un langage, la géométrisation a conduit à la mise en place de nouvelles formes d'intuition, ce que Dieudonné appelait des transferts d'intuition [79], lesquelles jouent un rôle important dans la pensée mathématique contemporaine. La géométrisation apparaît ainsi comme une reformulation en termes géométriques de nombreux chapitres des mathématiques et de la physique.

Une première forme de géométrisation est liée à la représentation «algèbre linéaire» de la géométrie ; en contrepoint, cette linéarisation de la géométrie élémentaire permet de géométriser les domaines des mathématiques et de la physique où intervient le linéaire. Avant que de parler de l'algèbre linéaire, il faudrait parler du calcul linéaire, calcul lié à l'étude des équations linéaires, que ce soit les équations algébriques ou que ce soit les équations différentielles. Les équations linéaires algébriques apparaissent dans la géométrie analytique et c'est l'une des raisons de l'importance du calcul linéaire dans le développement de la géométrie. Les équations différentielles apparaissent dans la mécanique et jouent un rôle important dans l'étude des phénomènes vibratoires, lesquels sont régis par des équations linéaires.

A côté du calcul linéaire se développera au XIXème siècle le calcul vectoriel né de la volonté de construire un calcul purement géométrique ne s'appuyant pas sur l'utilisation des coordonnées comme l'exige la géométrie analytique. Sur l'histoire du calcul vectoriel, nous renvoyons à l'ouvrage de Crowe [80]. Notons que le calcul vectoriel intéressera bien plus les physiciens qui y trouveront un mode de représentation des grandeurs orientés [81]. C'est à la fin du siècle que Peano, dans un cours intitulé *Calcolo Geometrico* [82], introduira la notion d'espace linéaire, les espaces vectoriels d'aujourd'hui, explicitant ainsi la relation entre le calcul vectoriel et le calcul linéaire. Cette relation peut alors être lue dans un double sens, soit la représentation linéaire du calcul vectoriel, soit la représentation géométrique du linéaire ce qui conduira à l'appellation devenue classique des espaces vectoriels. Mais comme nous l'avons dit, cette appellation va plus loin que le seul langage, elle permet une lecture géométrique du calcul linéaire et par cela même des divers domaines où intervient ce calcul, en particulier l'étude des espaces de fonctions dont il faut noter la force intuitive du terme «espace». Notons que ces espaces jouent un rôle important dans le développement de la physique.

Mais la géométrisation ne se réduit pas au seul domaine du linéaire.

Parmi les exemples de cette géométrisation nous citerons la mécanique dont on peut considérer que la géométrisation se déroule en deux temps. La première géométrisation, celle de Galilée et Newton se borne à ajouter à la géométrie élémentaire développée pas les Grecs la géométrisation du temps. Plus intéressante, la seconde géométrisation est liée à la reformulation de la mécanique analytique par Levi-Civita s'appuyant sur la notion de variété introduit par Riemann. Un système mécanique est représenté par un point mobile dans une variété riemannienne dont la métrique représente l'énergie cinétique ; cette représentation permet d'interpréter la partie cinétique des équations de Lagrange comme l'accélération du point mobile, les équations de Lagrange s'interprétant ainsi comme une généralisation de la seconde loi de Newton. Cette géométrisation s'enrichira avec la représentation géométrique de la théorie de Hamilton-Jacobi *via* la géométrie symplectique. Ainsi la mécanique devient un chapitre de la géométrie.

De l'intuition

Nous avons rappelé ci-dessus la notion de transfert d'intuition dont l'un des plus importants est donné par le terme «espace». Appeler «espace» un certain ensemble c'est donner de cet ensemble une vision géométrique, ces éléments devenant des points que l'on peut considérer comme des points de l'espace usuel. Comme nous l'avons déjà dit, il s'agit moins d'un simple effet de langage que d'une représentation imagée des objets que l'on étudie, une façon de les «voir». Ainsi, au delà de la définition formelle qui sous-tend les diverses occurrences du terme «espace», il faut noter la valeur intuitive du terme.

Pour préciser la place de l'intuition dans la connaissance, nous citerons Felix Klein qui écrit :

«Il ne faut pas toutefois se départir de cette prescription qu'une question mathématique ne doit pas être considérée comme complètement épuisée alors qu'elle n'est pas encore devenue intuitivement évidente ; découvrir au moyen de l'Analyse, c'est bien faire un pas très important, mais ce n'est faire que le premier pas.» [83]

On pourrait même aller plus loin en disant qu'il n'y a de connaissance qu'intuitive. Il faut alors préciser que la connaissance intuitive ne se réduit pas à ce qu'on appelle l'intuition première, la connaissance intuitive se transforme au fur et à mesure qu'on acquiert de nouvelles connaissances, cette acquisition s'effectuant de diverses façons. L'une des plus importante est ce que Jacqueline de Romilly [84] appelait le détour rationnel, c'est-à-dire l'usage de la pensée rationnelle pour acquérir de nouvelles connaissances. Les mathématiques sont l'une des formes de ce détour rationnel [85] et la mathématisation peut être l'une des façons d'accomplir ce détour. Ce que nous rappelle Klein, c'est que la connaissance n'est acquise que lorsqu'elle est devenue intuitivement évidente. Ce rapprochement entre évidence et intuition nous renvoie à la définition d'un théorème selon Legendre, définition citée ci-dessus et que nous rappelons :

*«**Théorème** est une vérité qui devient évidente à la suite d'une raisonnement appelé démonstration»*,

En guise de conclusion

A l'époque ou ce qu'on appelle l'interdisciplinarité relève plus d'une idéologie que de la rencontre des disciplines autour de problèmes communs, il nous semble utile de rappeler que, si rencontre des disciplines il doit y avoir dans l'enseignement, cette rencontre ne peut se faire que dans un cadre structuré analogue à celui des cours disciplinaires. Il s'agit moins de demander aux élèves d'élaborer des projets s'appuyant sur plusieurs disciplines, ce qui ne peut qu'être superficiel si les élèves ne maîtrisent pas les disciplines en question, que de construire un cours autour d'une question mettant en jeu divers domaines de la connaissance. Pour revenir à la relation mathématiques - sciences physiques, on peut imaginer un enseignement sur un thème comme celui des mouvements vibratoires pour reprendre l'un des miracles signalés pas Wigner, cela permettrait de faire se rencontrer, par exemple dans un enseignement de terminale scientifique, les équations différentielles du second ordre, le calcul complexe, et divers phénomènes mécaniques, acoustiques ou électromagnétiques, de comprendre ce que signifie le phénomène de résonance et pourquoi il faut, selon les cas, l'éviter ou le provoquer [86]. On pourrait citer aussi l'optique géométrique ou les relations entre statique et calcul vectoriel, ce qui permettrait de comprendre l'apport du calcul vectoriel dont il ne faut pas oublier qu'à ses débuts il a intéressé bien plus les mécaniciens et les physiciens que les mathématiciens [87]. Autre point intéressant dont nous n'avons pas parlé dans cet article, le rôle de la loi des homogènes dans le calcul littéral, loi des homogènes introduite par Viète dans son *Introduction à l'Art Analytique*, loi des homogènes qui est l'un des ingrédients fondamentaux de l'analyse dimensionnelle [88]. Il est clair que si on veut éviter le risque de la multiplication des disciplines [89], ces enseignements interdisciplinaires doivent s'intégrer dans l'enseignement des disciplines classiques, ce qui pose une question d'organisation des programmes et de répartition des enseignements. Peut-on rappeler que cela n'a rien de très nouveau et s'est pratiqué bien avant que l'on invente l'interdisciplinarité dans l'enseignement. C'est ainsi qu'à l'époque ou l'enseignement des sciences physiques commençait en seconde, les élèves rencontraient la chimie dans le cours de sciences naturelles, que ce soit en géologie en quatrième ou que ce soit en physiologie humaine en troisième. Rappelons aussi que le cours de mathématiques de la classe de Mathématiques Elémentaires comprenait un chapitre de Mécanique et un chapitre de Cosmographie, et que certains ouvrages de Géométrie de cette classe comprenait un chapitre sur la topographie et l'arpentage [90].

NOTES

2 Werner Heisenberg, *La nature dans la physique contemporaine*, p. 66

3 *«… d'un point de vue historique, intellectuel et pratique, les mathématiques sont d'abord l'une des pus belle invention de l'homme pour l'étude de la nature»* (traduction Bkouche), Morris Kline, *Mathematics and the Physical World*, p. vii

4 E.P. Wigner, *«The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences»*, Comm. Pure and Applied Math. 13, 1960, p. 1-14

5 D'une façon proche de la citation de Heisenberg donnée en exergue, je pourrais rappeler que j'ai compris le lien entre l'enseignement de mécanique du cours de Mathématiques de la classe de Mathématiques Elémentaires et la gymnastique lorsque le professeur de gymnastique nous a expliqué que, au saut en longueur, pour sauter loin il ne faut pas sauter haut.

6 André-Marie Ampère, *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*(1990).

7 Françoise Balibar, «Geometrie und Erfahrung», Olivier Darrigol, *Les équations de Maxwell de Mac Cullogh à Lorentz*.

8 Sur les équations de Maxwell nous renvoyons à l'ouvrage de Darrigol cité ci-dessus.

9 E.P. Wigner, *«The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences»*, Comm. Pure and Applied Math. 13, 1960, p. 1-14

10 Paul Valéry, «La crise de l'esprit» in Variétés 1 et 2, p. 48-49.

11 Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie* (1903), p. vi-vii

12 Aristote, *Les Seconds Analytiques,* p. 66

13 Georges Flament, *Histoire des nombres complexes* , p. 15-22

14 Pour l'étude des mouvements vibratoires, nous renvoyons aux ouvrages classiques de mécanique rationnelle, parmi lesquels nous pouvons citer le cours de *Mécanique* de Georges Bruhat et le *Cours de Physique* de Feynaman (*Mécanique* tome 1) (cf. bibliographie)

15 Dans le même ordre d'idée, on pourrait rappeler la présence du nombre π dans diverses formules de calcul intégral, en particulier dans les calculs probabilistes ou statistiques comme le rappelle Wigner au début de son article. Que vient faire le rapport de la longueur du cercle à son diamètre dans le calcul des probabilités ? Cela renvoie encore à la formule miraculeuse d'Euler et on sait aujourd'hui définir le nombre π comme la demi-période de la fonction $\exp z$ comme on peut le voir dans les traités d'analyse complexe.

16 La notion d'idonéité parcourt l'œuvre de Gonseth, elle explique comment les divers modes de connaissance (l'intuitive, la rationnelle et l'expérimentale) s'articulent entre elles et avec la réalité qu'elles prétendent représenter. Cf. Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité*.

17 Pierre Réverdy, *Le Livre de mon Bord*, p. 151.

18 Carlo Bourlet, «La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire». Carlo Bourlet est l'un des artisans de la réforme de l'enseignement scientifique de 1902.

19 Rudolf Bkouche, «La naissance du projectif»

20 Archimède, *Œuvres*, tome II, p. 76-126

21 Archimède, *Œuvres*, tome III, p. 1-66

22 Jules Houël, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, p. 59-60. Rudolf Bkouche, «Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles».

23 Aristote, *Physique*, Livre III, p.159-171

24 *«Le temps absolu, vrai et mathématique, par sa propre nature, s'écoule uniformément sans relation avec l'extérieur»* (traduction Bkouche). Isaac Newton, *Principia*, p. 5

25 D'Alembert, *Traité de Dynamique*, p. vii.

26 Isaac Newton, *Principia*, p. 12

27 Jean-Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique*, p. 180-221

28 «*1-Tout corps continue dans son état de repos ou de mouvement uniforme, à moins qu'il ne soit forcé à changer sous l'action des forces exercées sur lui. 2- Le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice exercée et dans la direction de cette force. 3- A chaque action s'oppose toujours une réaction égale, autrement dit, les actions mutuelles de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et opposées.»* (traduction Bkouche) Isaac Newton, *Principia*, p. 1

29 Antoine Arnauld et Pierre Nicole, *La Logique ou l'Art de Penser*, p. 215-218

30 D'Alembert, *Traité de Dynamique*, p. xxxi

31 *ibid*. p. 25

32 René Dugas, *Histoire de la mécanique*.

33 D'Alembert, *Traité de Dynamique*, p. iii

34 J.L. Lagrange, *Mécanique Analytique,* tome I, p. i-ii

35 D'Alembert, *Traité de Dynamique*, p. 72/75.

36 J.L. Lagrange, *Mécanique Analytique,* tome I, p. 223.

37 Bernhardt Riemann, «Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie».

38 Tullio Levi-Civita, «Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche».

39 Pour une présentation de la géométrie symplectique et de sa relation avec la mécanique, nous renvoyons aux ouvrages de Souriau et d'Arnold cités dans la bibliographie.

40 Archimède, *Œuvres*, tome II, p. 76-126

41 Julian L. Coolidge, *A History of Geometrical Method*, p. 148-150

42 *«Le concept d'état de mouvement de « l'éther qui porte la lumière » comme le milieu hypothétique dont nous avons déjà parlé, est supprimé, non seulement parce qu'il est inobservable mais parce que c'est un élément superflu du formalisme mathématique, concept qui ne peut que troubler l'ensemble des propriétés théoriques»* (traduction Bkouche). Wolfgang Pauli, *The Theory of Relativity*, p. vi

43 «*Ces concepts (champ classique, orbites des particules) sont rejetés, non seulement parce que les orbites sont inobservables mais aussi parce qu'ils deviennent superflus et perturberaient la symétrie définie par le groupe de transformation général qui soustend le formalisme mathématique»* (traduction Bkouche). *ibid*.

44 Werner Heisenberg, «La théorie physique : un point de vue critique», in Abdus Salam, W. Heisenberg, P. A. M. Dirac, *La Grande Unification*, p. 89

45 D'Alembert, *Discours préliminaire à l'Encyclopédie*, p. 171-175.

46 Francis Bacon, *Grande Restauration des Sciences* in *Œuvres Philosophiques, Morales et Politique de Francis Bacon*, p. 103

47 *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, tome second, p. 366.

48 D'Alembert, *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie*, p. 163-164 et 181.

49 D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie*, p. 29.

50 *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, tome second, p. 128.

51 *ibid*. p. 370.

52 *«La géométrie ne nous enseigne pas à tracer ces lignes (lignes droites et cercles), mais demande que l'étudiant doit d'abord apprendre à tracer ces lignes de façon précise avant d'entrer dans la géométrie, ces opérations montrant comment les problèmes peuvent être résolus. Tracer des lignes droites et des cercles sont des problèmes, mais pas des problèmes de géométrie. La solution de ces problèmes relève de la mécanique et la géométrie montre comment on se sert de ces problèmes une fois résolus. C'est la gloire de la géométrie que, d'un petit nombre de principes, venus d'ailleurs, elle soit capable de produire tant de choses. Ainsi la géométrie se fonde sur une pratique mécanique et n'est rien d'autre qu'une partie de la mécanique universelle qui propose et démontre de façon précise l'art du mesurage.»* (traduction Bkouche). Isaac Newton, *Principia*, volume one, p. xvii.

53 On peut considérer qu'avec Lagrange les mathématiques commencent à se libérer de l'emprise de la géométrie qui caractérise les mathématiques grecques.

54 D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie*, p. 173.

55 *ibid*. p. 181.

56 *ibid*. p. 180.

57 Gaston Bachelard, *Le Nouvel Esprit Scientifique*, p. 16

58 Rudolf Bkouche, «La géométrie élémentaire, une science physique ?».

59 Ernst Mach, *La Mécanique*, p. 449.

60 Albert Einstein, Leopold Infelfd, *L'évolution des idées en physique*

61 Euclide, *Les Œuvres d'Euclide*, p. 5-6.

62 Cauchy, «Recherches sur les polyèdres, première et seconde parties»

63 Camille Jordan, *Recherches sur les polyèdres*, p. 15-19

64 Ernst Mach, *La Mécanique*, p. 457.

65 Cf. note 16.

66 Hermann Laurent, «Les principes fondamentaux des connaissances humaines».

67 Ferdinand Gonseth, *Les mathématiques et la Réalité*. Sur la philosophie de Gonseth, nous renvoyons à notre article «Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)»

68 Antoine Arnauld et Pierre Nicole, *La Logique ou l'Art de Penser*, p. 120-124

69 Dans les *Eléments*, Euclide distingue les axiomes et les postulats, mais cette distinction va s'estomper au cours du temps et on emploie aujourd'hui le seul terme «axiome».

70 Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, p. 4

71 Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie*, p. 317. Sur les diverses définitions de la ligne droite nous renvoyons à notre article «Qu'est-ce qu'une ligne droite» cité en bibliographie.

72Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité*.

73 David Hilbert, *Les fondements de la géométrie*.

74 *«En mathématiques, comme dans toute recherche scientifique, on rencontre deux tendances. D'une part, la tendance vers l'**abstraction** cherche à cristalliser les relations **logiques** dans le dédale du matériau étudié et à réorganiser ce matériau d'une façon systématique et ordonnée. D'autre part, la tendance vers la **compréhension intuitive** permet une saisie immé-*

diate des objets que l'on étudie, un ***rapport*** *vivant avec eux qui, pour ainsi dire, force la signification concrète de ces relations.»* (traduction Bkouche) David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, p. iii

75 Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*.

76 David Hilbert, *Sur les Problèmes Futurs des Mathématiques*, p. 24

77 Rudolf Bkouche, «Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie».

78 Nicolas Bourbaki, *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, p. 174

79 Jean Dieudonné, *Domination universelle de la géométrie*.

80 Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis*(1967).

81 On peut rappeler que les premiers grands traités de calcul vectoriel ont été écrits par des physiciens, ainsi ceux de Gibbs et de Heaviside cités dans la bibliographie. On peut noter aussi l'ouvrage de Burali-Forti et Marcolongo qui donne une place importante à la mécanique et à la physique mathématique.

82 Giuseppe Peano, *Calcolo Geometrico* (1888). Ce cours a pour objectif d'exposer les travaux de Grassmann.

83 Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen*, p. 38

84 Jacqueline de Romilly (1913-2010) est une helléniste qui a étudié la littérateur et la pensée de la Grèce antique. Elle a a publié en 1994 un ouvrage sur la dégradation de l'enseignement, *L'Enseignement en détresse*.

85 Il y a d'autres formes de pensée rationnelle que les mathématiques mais nous n'aborderons pas cette question ici.

86 Nous pouvons renvoyer aux chapitres 21 à 25 du premier tome de mécanique du *Cours de Physique* de Feynman.

87 On peut citer parmi les premiers traités de calcul vectoriel le traité de Gibbs et le traité de Heaviside dans lequel l'auteur utilise le calcul vectoriel pour étudier l'électromagnétisme de Marseille. On pourrait citer aussi les *Eléments de Calcul Vectoriel* de Burali-Forti et Marcolongo qui donne une place importante à la physique mathématique. On peut rappeler aussi que Paul Appel introduit son *Traité de Mécanique Rationnelle* par un chapitre consacré au calcul vectoriel.

88 Un tel travail montrerait l'importance du calcul littéral en physique.

89 Il ne faut pas oublier que la rencontre des disciplines a conduit à inventer de nouvelles disciplines, ainsi la chimie physique ou la biochimie.

90 Ainsi les *Leçons de Géométrie Elémentaire* de Hadamard, tome 2, p. 283-313.

Bibliographie

Abdus Salam, W. Heisenberg, P. A. M. Dirac, *La Grande Unification* (vers une théorie des forces fondamentales), traduit de l'anglais par Jean Kaplan et Alain Laverne, «Science ouverte», Editions du Seuil, Paris 1991

Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de Dynamique* (1758), Gabay, Paris 1990

Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), «Corpus des Œuvres de Philosophie en Langue Française», Fayard, Paris 1986.

André-Marie Ampère, *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience* (1827), Gabay, Paris 1990.

Paul Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle* (cinq tomes), Gauthier-Villars, Paris, plusieurs éditions entre 1893 et 1946.

Archimède, *Œuvres* (4 tomes), texte établi et traduit pas Charles Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1970-1972.

Aristote, *Physique*, traduction et présentation par Pierre Pellegrin, GF Flammarion, Paris 2000.

Aristote, *Seconds Analytiques, Organon IV*, introduction, traduction, notes, biographie et index par Pierre Pellegrin, GF Flammarion, Paris 2005.

Antoine Arnauld et Pierre Nicole, *La Logique ou l'Art de Penser* (1662, cinquième édition 1683), Introduction de Louis Marin, «Champs», Flammarion, Paris 1970.

Vladimir Arnold, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique* (1974), traduit du russe par Djilali Embarek, Editions Mir, Moscou 1976.

Gaston Bachelard, *Le Nouvel Esprit Scientifique*, «Nouvelle Encyclopédie Scientifique», PUF, Paris 1934/1973.

Francis Bacon, «Grande Restauration des Sciences» in *Œuvres Philosophiques, Morales et Politiques de Francis Bacon*, avec notices biographiques par J.A.C. Buchon, Bureau du Panthéon Littéraire, Pars 1854.

Françoise Balibar, «Geometrie und Erfahrung», in Boi, Flament, Salanskis, 1830-1930 : A century of Geometry (Epistemology, History and Mathematics), Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin 1992, p. 91-97

Bernard Bettinelli, Le point de Torricelli d'un triangle, Repères-IREM; n° 29, 1997, p. 5-14

Rudolf Bkouche, «Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)» in *La Démonstration mathématique dans l'Histoire* (Colloque Inter-IREM Epistémologie, Besançon 1989), Editions IREM Besançon-Lyon 1990.

Rudolf Bkouche, «La naissance du projectif» in *Mathématiques et Philosophie de l'Antiquité à l'Age Classique*, Editions CNRS, Paris 1991, p. 239-285

Rudolf Bkouche, Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie, *Repères-IREM* n°26, janvier 1997, p. 49-71

Rudolf Bkouche, «Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles», *Bulletin de l'APMEP* n°430, septembre-octobre 2000, p. 613-629

Rudolf Bkouche, «La géométrie élémentaire, une science physique,- ?» in *Enseigner la Géométrie dans le secondaire*, Commission Inter-IREM Géométrie (Liège 2013), IREM de Reims 2004.

Rudol Bkouche, «Du caractère expérimental des mathématiques çà propos des laboratoires des mathématiques)», *Repères IREM*, n°70, janvier 2005, p. 33-76.

Rudolf Bkouche, «Qu'est-ce qu'une ligne droite» in *Histoire du Calcul, De la Géométrie à l'Algèbre*, sous la direction de Luc Sinègre, Vuibert, Pairs 2009, p. 173-186

Jean-Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique*, préface de Jacques Merleau-Ponty, «Bibliothèque d' Histoire des Sciences», PUF, Paris 1992.

Nicolas Boileau, *Philosophies des Mathématiques et de la Modélisation* (du chercheur à l'ingénieur), L'Harmattan, Paris 1999

Nicolas Bourbaki, *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, nouvelle édition, Hermann, Paris 1974

Carlo Bourlet, «La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire» (conférence à la réunion de la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques), *L'Enseignement Mathématique*, volume 12, 1910, p. 372-387.

Georges Bruhat, *Cours de Physique générale : Mécanique*, quatrième édition revue, Masson, Paris 1948

C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Eléments de Calcul Vectoriel* (avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique), traduit de l'italien par S. Lattès, Hermann, Paris 1910

Augustin Louis Cauchy, «Recherches sur les polyèdres, première et seconde parties», *Journal de l'Ecole Polytechnique*, volume 9, 1813, p. 68-86

Julian L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1940), Dover Publications, Inc., New York 1963

Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis*(1967), Dover Publications, Inc., New York 1985

Olivier Darrigol, *Les équations de Maxwell de Mac Cullagh à Lorentz*, «sciences», Belin, Paris 2005.

René Descartes; «La Géométrie» in *Discours de la Méthode plus la Dioptrique, Les Météores et la Géométrie* (1637), «Corpus des Œuvres de Philosophie en Langue Française», Fayard, Paris 1986.

Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, «Enseignement des sciences», Hermann, Paris 1964

Jean Dieudonné, *Domination universelle de la géométrie*, IREM-Paris Nors, 1982

Paul A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (1930), third edition, Clarendon Press, Oxford 1947

René Dugas, *Histoire de la mécanique* (1950), préface de Louis de Broglie, réédition Jacques Gabay, Paris 1996

Albert Einstein, Leopold Infelfd, *L'évolution des idées en physique* (des premiers concepts aux théories de la relativité et des quanta), petite bibliothèque payot, Paris 1978

Euclide, *Les Œuvres d'Euclide*, traduites littéralement par F. Peyrard, Nouveau tirage augmenté d'une important introduction par Jean Itard, Blanchard, äris, 1993

Georges Flament, *Histoire des nombres complexes* (entre algèbre et géométrie), CNRS Editions, Paris 2003.

Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité* (Essai sur la méthode axiomatique) (1936), Blanchard, Paris 1974

Hermann Grassmann, *La Science de la Grandeur Extensive*, traduction et préface de Dominique Flament et Bernd Bekemeier, traduction revue par E. Knobloch, Blanchard, Paris 1944

Richard Feynman, *Mécanique* (deux volumes) in *Le cours de physique de Feyman*, version française de Goery Delacôte, coordination de M. Bloch, InterEditions, Paris 1970

Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie Elémentaire II, Géométrie dans l'espace*, Armand Colin, Paris 1949

Oliver Heaviside, *Electromagnetic Theory*, London 1894, reprint Dover, New York 1950

Werner Heisenberg, *La nature dans la physique contemporaine*, traduit de l'allemand par Ugne Karvelis et A. E. Leroy; «idées/nrf», Gallimard, Paris 1962.

Jules Houël, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris 1867

David Hilbert, *Les fondements de la géométrie* (1899), édition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier, Dunod, Paris 1971

David Hilbert, *Sur les Problèmes Futurs des Mathématiques* (23 problèmes) (1900), traduit parM.L. Laugel, Editions Jacques Gabay, Paris 1990

David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, translated by P. Nemenyi, Chelsea, New York 1952

Christian Houzel, «Géométrie et Physique» in *Universalia* 1991, supplément annuel à *Encyclopædia Universalis*

Camille Jordan, *Recherches sur les polyèdres*, Gauthier-Villars, Paris 1866

Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen* (1872) (traduction Padé), Gauthier-Villars, Paris 1974

Morris Kline, *Mathematics and the Physical World*, Apollo Editions, New York 1969

J. L. Lagrange, *Mécanique Analytique*, édition complète réunissant les notes de la troisième édition, corrigée et annotée pat Joseph Bertrand, et de la quatrième édition, publiée sous la direction de Gaston Darboux (2 tomes), Blanchard, Paris 1965.

Hermann Laurent, «Les principes fondamentaux des connaissances humaines», *L'Enseignement Mathématique*, tome 1, 1899, p. 381-419.

Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823

Tullio Levi-Civita, «Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche», *Annali di matemetica pura ed applicata*, Serie II, Tomo XXIV, 1896, p. 255- 300

Ernst Mach, *La Mécanique* (exposé historique et critique de son développement), ouvrage traduit sur la quatrième édition allemande par Emile Bertrand, Hermann, Paris 1904, réédition Gabay, Paris 1987.

Isaac Newton, *Principia*, Motte's translation revised by Cajori (2 volumes), University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London 1934/1962.

Paul Painlevé, *Les Axiomes de la Mécanique* (examen critique), Collection «Les Maîtres de la Pensée Scientifique», Gauthier-Villars, Paris 1922

Wolfgang Pauli, *The Theory of Relativity*, translated from the German by G. Field, Dover Publications Inc., New York 1958.

Platon, *Timée, Critias*, présentation et traduction de Luc Brisson, GF Flammarion, Paris2001

Pierre Reverdy, *Le Livre de mon Bord*, Mercure de France, Paris 1948

Bernhart Riemann, «Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie», traduction Jules Houël, in *Œuvres Mathématiques*, Blanchard, Paris 1968, réédition Gabay, Paris 1990

Jacqueline de Romilly, *L'enseignement en détresse*, Julliard, Paris 1994

Jean-Marie Souriau, *Structures de systèmes dynamiques*, «Collection Dunod Université», Dunod, Paris 1970.

Paul Valéry, «La crise de l'esprit» (1919) in *Variété 1 et 2*, rééd. idées/Gallimard, Paris 1978

E. P. Wigner, «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences», *Comm. Pure and Applied Math.* 13, 1960

Edwin Bidwell Wilson, *Vector analysis : A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs, Ph.D. LL.D*, New Haven, Yale University Press,□1902, reprint Dover, New York 1960

Encyclopédie Méthodique, Mathématiques (3 tomes), par MM. D'Alembert, l'Abbé Bossut, De La Lande, le Marquis de Condorcet &c, Panckoucke (Paris) & Plomteux (Liège), 1784, réédition ACL-Editions, Paris 1987