
LA FORMULE DE L'AIRE DU TRIANGLE

Katia VIARD
Maître - formatrice,
Ecole Pasteur à Allonnes

Guillaume MOUSSARD
Formateur, ESPE de Nantes,
Laboratoire de Mathématiques
Jean Leray de Nantes

Résumé : La formule de l'aire du triangle est une nouveauté des programmes de l'enseignement primaire de 2008 par rapport aux précédents qui dataient de 2002. Après une rapide analyse de l'histoire de l'enseignement de cette notion en France et des enjeux d'apprentissage liés à son enseignement, cet article présente une modalité originale d'enseignement de cette formule et décrit sa mise en œuvre dans une classe de CM2.

1. — Tour d'horizon

1. 1. *La formule de l'aire du triangle dans les programmes*

Les programmes actuellement en vigueur, qui datent de 2008, ont restauré l'enseignement de la formule de l'aire du triangle dans les champs *Grandeurs et mesures*. Ils ont même installé largement l'emploi de ce mot de *formule*, qui avait complètement disparu des précédents programmes. C'est ce changement, notamment, qui nous a amenés à nous interroger sur les modalités possibles de l'enseignement de cette formule de l'aire du triangle à la fin du cycle 3. Dans les projets de programmes pour la rentrée 2016, il est préconisé de construire et utiliser cette formule en classe de 6ème.

Qu'en a-t-il été de l'enseignement de cette notion à l'école primaire depuis un siècle ? Avant

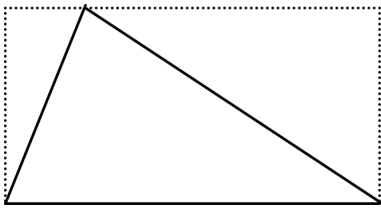
1945, les programmes prescrivent le « calcul de surfaces », en particulier celle du triangle. La notion d'aire apparaît dans les programmes de 1945, établissant une distinction entre l'objet géométrique, la surface, et sa grandeur, l'aire. Seule l'aire du triangle rectangle est alors à connaître, l'aire d'un triangle quelconque étant calculée à partir de celle-ci dans des cas particuliers. Le découpage et recollage comme activité de référence pour fonder la notion d'aire apparaît dans les programmes de 1980. Dès lors, la mesure de l'aire est d'abord effectuée avec une unité arbitraire, avant d'introduire les unités usuelles du système métrique. La formule ne doit pas être connue par cœur, et jusqu'en 2002, un for-

LA FORMULE DE
L'AIRE DU TRIANGLE

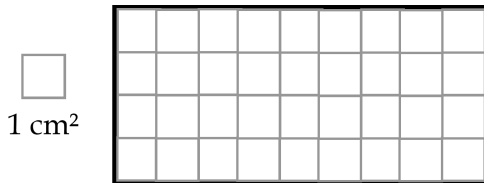
mulaire est mis à la disposition des élèves dans lequel se trouvent les formules dont il peut avoir besoin pour résoudre des problèmes et calculer des grandeurs [5].

1. 2. La formule de l'aire du triangle dans les manuels de CM2 aujourd'hui

Pour établir la formule de l'aire du triangle, tous les manuels que nous avons consultés présentent le triangle comme étant inscrit dans un plus grand rectangle :



La connaissance de la formule de l'aire du rectangle leur permet ensuite d'en déduire celle du triangle, comme en étant la moitié. Rappelons que la formule de l'aire du rectangle est obtenue par dénombrement des carreaux d'un quadrillage. En effet, lorsqu'un rectangle a des dimensions égales à des nombres entiers de centimètres (nous nous restreignons à cette situation dans cet article), son aire en cm^2 est égale au produit de ses dimensions.



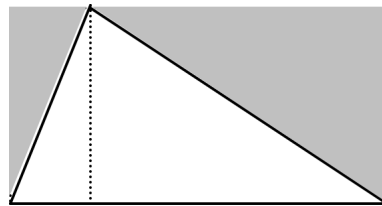
Aire du rectangle = $4 \times 9 = 36 \text{ cm}^2$.

La base et la hauteur de notre triangle sont alors interprétées comme la longueur et la largeur du rectangle circonscrit, d'où découle la formule :

Aire du triangle = base \times hauteur $\div 2$.

Il nous semble que ce raisonnement pour établir la formule de l'aire du triangle est accessible à très peu d'élèves de CM2, et surtout qu'il masque le défi principal du problème posé, à savoir de paver un triangle avec des carrés.

Le raisonnement que nous venons d'effectuer pour établir l'aire du triangle s'opère en deux temps. Le premier temps ressort de la notion d'aire comme grandeur géométrique et demande de comprendre que le triangle inscrit a la même aire que la surface qui le complète dans le rectangle, surface grisée sur le dessin ci-dessous. Ceci est déduit du partage des deux petits rectangles, obtenus par le tracé de la hauteur, en deux parties égales par leurs diagonales :

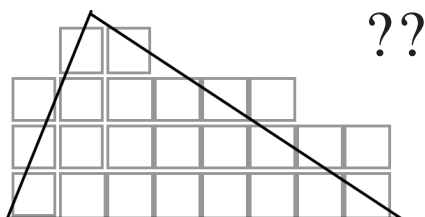


L'élève doit donc comprendre que la diagonale d'un rectangle le partage en deux parties d'aires égales, et que l'aire de la réunion de deux surfaces, les deux blanches ou les deux grises, est égale à la somme des aires des deux surfaces.

A ce stade est établie l'égalité des aires des parties blanche et grise. Le deuxième temps du raisonnement consiste à déduire de l'égalité de deux parties formant un tout que chacune vaut la moitié du tout.

L'ensemble de ce raisonnement suppose de la part des élèves un raisonnement complexe car constitué de plusieurs étapes, et une habileté à concevoir des relations entre diverses parties d'une figure géométrique.

D'autre part, on est surpris, alors même que l'on effectue une mesure, que cette démarche ne fasse à aucun moment apparaître l'unité dans laquelle l'aire est exprimée. Mesurer l'aire d'un triangle en cm^2 , c'est déterminer le nombre de carrés d'un centimètre de côté qui, pris ensemble, auront la même aire que le triangle. Or il est impossible de paver un triangle avec des carrés, comme le montre la figure ci-dessous :



Il nous semble essentiel de confronter les élèves à cette apparente impossibilité de mesurer l'aire du triangle en cm^2 . D'abord c'est la démarche qui aura été suivie pour déterminer la formule de l'aire du rectangle : il est donc naturel d'essayer de la reproduire dans le cas du triangle. Ensuite, un calcul d'aire donne le plus souvent un résultat sous forme d'un nombre de centimètres carrés, c'est-à-dire d'un nombre de carrés de 1 centimètre de côté, auquel il faut pouvoir donner un sens.

L'existence d'un tel nombre ne va d'ailleurs pas de soi dans le cas général. Le problème des grandeurs incommensurables formulé par les géomètres grecs de l'Antiquité aboutit à l'impossibilité d'exprimer l'aire d'un triangle quel-

conque par un nombre. Le premier livre des *Éléments* d'Euclide fournit alors un moyen de comparer les aires des polygones sans les mesurer par des nombres, par la construction, à la règle et au compas, d'un carré d'aire égale à celle d'un polygone quelconque donné.

1. 3. Cadres numérique et géométrique

Le paragraphe précédent met en évidence deux cadres que l'élève doit concilier dans son apprentissage de la notion d'aire d'une figure [2]. Un cadre géométrique d'abord dans lequel l'aire est une grandeur associée à la figure qui reste inchangée par découpage et recollement de celle-ci. Un cadre numérique ensuite dans lequel l'aire est mesurée par un nombre, le nombre d'unités qu'il faut reporter pour recouvrir entièrement la figure elle-même, ou toute autre figure d'aire égale.

Les productions des élèves reproduites dans la suite montrent le conflit engendré par ces deux conceptions numérique et géométrique de l'aire.

2. — Déroulement de la séquence et résultats

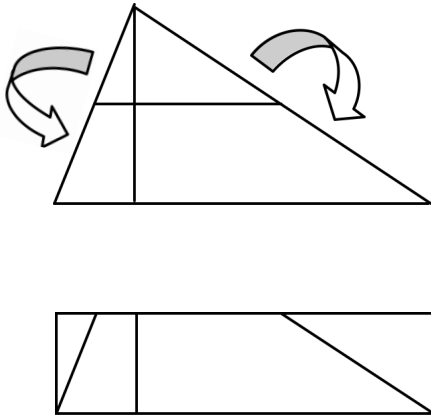
Notre proposition

Nous proposons quant à nous une démarche originale pour construire la formule de l'aire du triangle, inspirée par un dossier du groupe national de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en dispositifs relais [1]. Nous l'avons testée dans une classe de CM 2 située en zone d'éducation prioritaire et comptant 21 élèves.

Notre choix a été de partir d'un triangle quelconque et d'agir directement sur cette figure pour mesurer son aire, sans introduire de figure auxi-

LA FORMULE DE
L'AIRES DU TRIANGLE

liaire. Bien sûr, pour mesurer son aire en cm^2 , c'est-à-dire en première intuition pour la paver avec des carrés, il est idéal de se ramener à un rectangle. Or il est toujours possible de découper un triangle pour reformer un rectangle : on trace une hauteur, puis la perpendiculaire au milieu de cette hauteur, et enfin on réagence les quatre parties obtenues :



Ce découpage met en évidence que l'aire du triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur. Les pré requis mobilisés quant à la notion d'aire sont la conservation de celle-ci par découpage et recollement, et la formule de l'aire d'un rectangle.

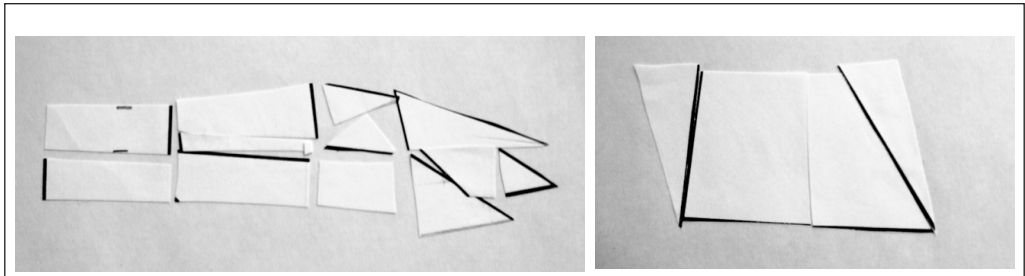
Etape 1 : *Faire un rectangle avec un triangle*

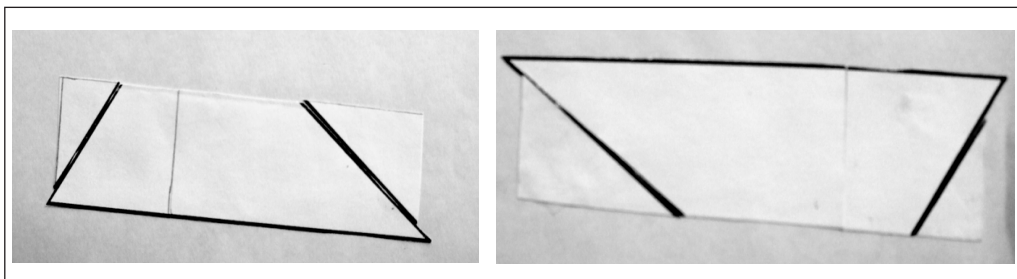
Chaque élève a donc reçu un exemplaire en papier du même triangle accompagné de la consigne : « Faites un rectangle avec votre triangle ». Cette consigne, volontairement d'apparence irréalisable, a impressionné durablement les élèves.

Les productions obtenues montrent la difficulté à concilier les deux contraintes principales, la conservation de l'aire et l'obtention d'une forme rectangulaire (voir deux exemples ci-dessous). Elles sont essentiellement de deux types. Certains élèves découpent le triangle en petits morceaux, éventuellement nombreux, et s'attellent à reconstituer avec tous ces morceaux une forme rectangulaire. Ces élèves laissent des trous dans leur production finale, et souvent les pièces se chevauchent entre elles.

D'autres élèves découpent le triangle en quelques morceaux et reconstituent un polygone en ajustant les côtés des morceaux entre eux. Aucun n'a cependant obtenu une production qui satisfasse toute la classe.

Cette première étape est donc l'occasion, précieuse, de rappeler les règles du découpage recollement : ne laisser ni trou ni chevauchement. Ces règles garantissent la conservation de l'aire entre la figure initiale, le triangle, et la figure finale.





Etape 2 : *reproduire*
la construction de l'enseignante

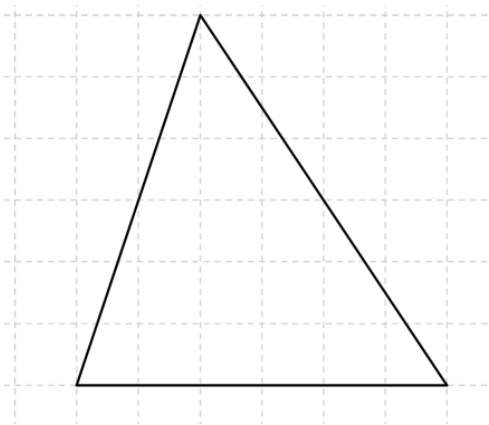
Aucun élève n'ayant trouvé une procédure entièrement satisfaisante, l'enseignante a exposé la sienne (voir plus haut) sur un grand triangle découpé au tableau, et demandé aux élèves de la reproduire. Elle explique qu'elle a tracé la hauteur issue du sommet, déterminé son milieu et tracé la parallèle à la base passant par ce milieu. Elle montre plusieurs fois le mouvement des parties supérieures du triangle vers les extrémités pour reformer un rectangle.

Lors de cette deuxième étape, les élèves montrent des difficultés à concevoir et reproduire le mouvement des parties supérieures de la figure, capacité essentielle pour élaborer des raisonnements géométriques. Ils finissent toutefois par réaliser la construction, dont la précision dépend (voir exemple ci-dessus) de la compréhension que la première ligne est perpendiculaire à la base du triangle, et que la deuxième ligne est tracée perpendiculairement à la première en son milieu.

Etape 3 : *mesurer l'aire du triangle*

L'étape suivante consiste à utiliser le travail sur la figure réalisé jusque-là, pour mesurer l'aire d'un triangle. Les élèves reçoivent pour

cela un triangle quadrillé tous les centimètres avec comme consigne de mesurer l'aire de ce triangle.



En fait, les élèves ne recourent pas en premier lieu aux constructions précédentes (à notre grande déception !), et dénombrent pour la plupart les carreaux présents sur le triangle. Les carreaux incomplets sont traités de diverses manières. Ils sont selon les élèves soit ignorés, soit regroupés. Dans ce deuxième cas, les carreaux sont le plus souvent regroupés par deux dans l'intention de former un carreau considéré entier, alors que ce n'est généralement pas exactement le cas. Les élèves aboutissent par ces procédés à des résultats numériques variés.

LA FORMULE DE
L'AIRE DU TRIANGLE

Nous présentons les réponses de trois élèves interrogés sur leur procédure.

Amora est la seule à avoir reproduit les constructions exposées précédemment, mais elle ne les utilise pas pour mesurer l'aire. « J'ai tracé au milieu ; j'ai fait l'issue du sommet ; après j'ai coupé la moitié comme elle avait expliqué, donc j'ai fait une perpendiculaire ; et puis après j'ai compté mes carreaux et j'en ai obtenu 17 ; et bah après on verra si c'est bon ».

Tristan compte les carrés entiers et regroupe mentalement les morceaux de carrés restant : « J'ai compté tous mes carrés et ceux qui étaient coupés j'ai essayé de mettre tout le carré en entier [c'est-à-dire vraisemblablement de reconstituer un carré entier] ».

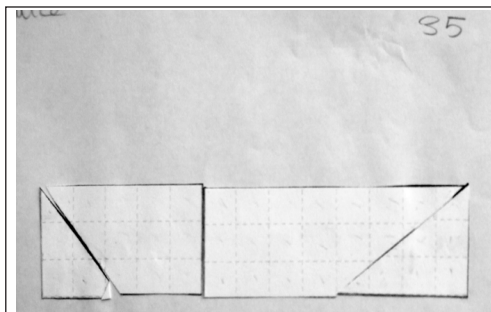
Margaux, quant à elle, applique la formule de l'aire du rectangle au triangle. « J'ai mesuré ça [montre la base du triangle] donc ça fait six ; et six fois ça [montre un deuxième côté du triangle] ça fait tout ça [désigne l'ensemble du triangle] ; ça fait beaucoup trop de carrés [elle trouve 42 cm²] ». Signalons que sans la présence sur le dessin de l'unité de mesure, cette élève n'aurait jamais remarqué l'in vraisemblance de son résultat.

La disparité des résultats proposés par les élèves fournit l'occasion d'une réflexion col-

lective, orientée par l'enseignante vers le recours à la construction vue lors des étapes antérieures, susceptible de fournir un résultat exact et indiscutable. En mettant en œuvre cette construction sur un nouveau triangle, les élèves obtiennent un rectangle dont les côtés sont volontairement des nombres entiers de carreaux, en l'occurrence 13 carreaux en longueur et 3 en largeur (exemple ci-dessous).

Nous fûmes surpris à ce stade qu'aucun élève ne mobilise la multiplication pour dénombrer ces carreaux, et qu'un seul élève emploie l'addition itérée $13 + 13 + 13$. Tous les autres comptent les carreaux un par un. Est-ce que la multiplication n'est pas disponible pour dénombrer les carreaux d'un quadrillage ? Est-ce que la figure obtenue comme adjonction de plusieurs morceaux n'est pas reconnue comme un véritable rectangle auquel s'appliquerait la formule connue de l'aire du rectangle ? Quoi qu'il en soit, la synthèse de l'enseignante permet à ce stade d'institutionnaliser le fait que l'aire du triangle est donnée par le produit de sa base par la moitié de sa hauteur, ce qui est bien une « formule de l'aire du triangle ». La question de l'écriture de cette formule mériterait de faire l'objet d'une réflexion complémentaire. Nous avons retenu l'écriture suivante :

$$\text{Aire du triangle} = \text{base} \times \frac{1}{2} \text{ hauteur}$$

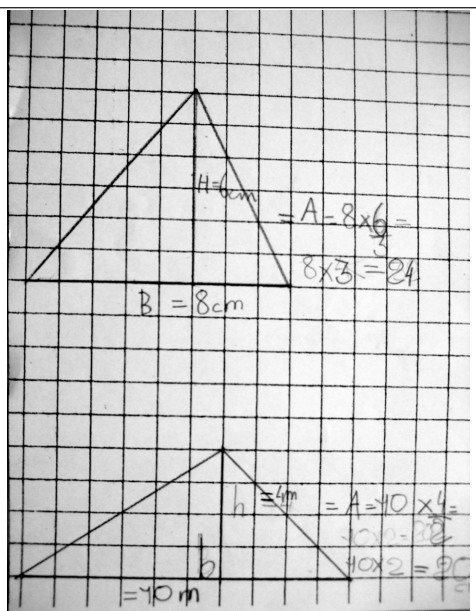
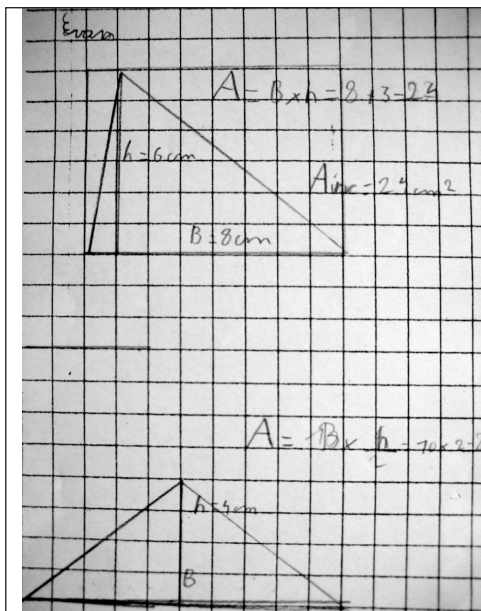


Etape 4 : faire fonctionner la formule

Jusque-là nous avons justifié la validité de la formule de l'aire du triangle. Mais afin que cette formule devienne un outil conceptuel pour l'élève, il importe que celui-ci la mobilise dans des situations de résolution de problèmes. Une première façon de la mobiliser, immédiate, est de calculer l'aire d'un triangle sans reproduire à chaque fois les découpages exposés plus haut. Nous avons mis en œuvre cette situation en demandant aux élèves de déterminer l'aire d'un triangle découpé dans du papier uni sans quadrillage. Certains ont reproduit le quadrillage ; certains, éventuellement les mêmes, ont découpé le triangle pour reconstituer un rectangle ; d'autre enfin, moins nombreux, ont seulement mesuré la base et la demi-hauteur du triangle pour les multiplier. La confrontation de ces productions permet de convaincre peu à peu l'ensemble des élèves qu'il n'est désormais plus nécessaire de compter des carreaux ou de

découper le triangle pour calculer son aire. La formule traduit la conviction que, si l'on peut tout à fait reprendre entièrement le processus avec n'importe quel autre triangle, on sait maintenant d'avance le résultat que l'on obtiendra.

Une autre façon de mobiliser la formule de l'aire du triangle, et plus précisément de mobiliser les propriétés arithmétiques de celle-ci, est de demander aux élèves de construire un triangle d'aire donnée. Il s'agit alors de trouver deux nombres dont le produit égale cette aire donnée, et qui mesureront l'un la base et l'autre la demi-hauteur du triangle. Cette étape permet d'ancrer l'idée, d'abord peu disponible chez les élèves, que l'aire est obtenue comme un produit de deux nombres. L'enjeu ici est l'articulation entre les conceptions de l'aire comme grandeur et comme nombre. Les productions des élèves, nécessairement variées, procurent une nouvelle occasion de remarquer que des figures de même aire peuvent avoir néanmoins des formes différentes.



3. — Conclusion

Ce travail nous a amenés à repérer trois obstacles majeurs à la compréhension de la formule de l'aire du triangle telle qu'elle est enseignée dans tous les manuels :

— la multiplication pour calculer l'aire d'un rectangle n'est pas aussi disponible qu'on pourrait l'espérer dans une classe qui a traité ce chapitre, alors même que la méthode employée dans tous les manuels s'appuie sur la formule de l'aire du rectangle ;

— le travail sur les formes géométriques pour concevoir leur déplacement ou leur superposition pose des difficultés aux élèves qui ne doivent pas être sous-estimées ;

— la mesure de l'aire du rectangle au moyen d'une unité carrée provoque des réactions différentes chez les élèves, diversité qui appelle des explications, sujet complètement évincé par les manuels.

Notre conclusion est donc que la formule de l'aire du triangle, plutôt qu'un objet d'apprentissage en soi, fournit un terrain privilégié pour poursuivre la construction de la notion d'aire au CM2, en articulant les notions de forme, de grandeur et de nombre qu'elle fait intervenir. Les étapes successives proposées dans cette séquence permettent aux élèves de construire progressivement cette articulation, et de disposer mentalement de situations de référence qui rendent opérationnelle la notion d'aire du triangle et lui donnent du sens.

La formulation des programmes actuels pose la question du statut de la formule en mathématiques comme objet d'apprentissage en soi. Avec pour conséquence l'exemple de ce professeur qui, interrogé par un stagiaire s'étonnant qu'il donne la formule de l'aire du triangle aux élèves sans justification de sa validité, répondit qu'il aimerait vraiment la justifier, si seulement il savait pourquoi elle est vraie !

Bibliographie

[1] AIRE ET PÉRIMÈTRE, Dossier d'activités pédagogiques réalisé par le groupe national de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en dispositifs relais, disponible à l'adresse :

<http://eduscol.education.fr/cid47903/aire-et-perimetre.html>, dernière consultation le 21/08/2015.

[2] DOUADY & PERRIN-GLORIAN, Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational studies in mathematics*, **20**, n° 4, Springer, 1989.

[3] DOUADY & PERRIN-GLORIAN, « Aires de surfaces planes », *Petit x*, n° 6, p. 5-33, 1984 et n° 8, p. 5 à 30, 1985.

[4] ROUCHE, Nicolas, *Le sens de la mesure*, Bruxelles : Didier Hatier, 1992.

[5] MOREIRA BALTAR, Paula, « A propos de l'apprentissage du concept d'aire », *Petit x*, n° 43, p. 43-68, 1996.

[6] CHAMONTIN, Françoise, « Des aires sans mesure à la mesure des aires », *Repères IREM*, n° 44, p. 33-62.