LA RUBRIQUE *POINT DE VUE*

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession. Elle accueille dans ce numéro une réflexion d'Agnès Rigny et Pierre López sur la notion de définition.*

Agnès Rigny, ancienne élève de l'ENS Saint-Cloud, agrégée de mathématiques, actuellement professeur en classe préparatoire BL au lycée Saint-Sernin à Toulouse. Pendant plus de 25 ans professeur dans les classes préparatoires commerciales et scientifiques au lycée Corneille à Rouen puis au lycée Fermat à Toulouse.

Pierre López, agrégé de mathématiques, actuellement professeur en classe préparatoire ATS (lycée Louis Rascol Albi). Ancien responsable du groupe « Sciences physiques et mathématiques au lycée » à l'Irem de Toulouse. Ancien formateur associé à l'IUFM de Toulouse. S'intéresse en particulier aux problèmes liés au rapport des mathématiques avec les autres disciplines.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages…

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

SI ON PARLAIT DEFINITION ?

Agnès RIGNY et Pierre LOPEZ
Irem de Toulouse

Avant-propos

Lors des journées nationales de l'APMEP à Toulouse en octobre 2014, nous présentions notre livre *Parlez-vous maths ?* (Éditions EdpSciences) qui venait de sortir.

Michèle Gandit nous a fait le plaisir de s'y intéresser et nous a proposé de rédiger un article pour ce numéro spécial consacré à la définition en mathématiques.

Le point de vue développé dans notre ouvrage a priori n'était pas connexe au sujet. Cependant, après réflexion, il nous a paru intéressant de relever le défi car cela devait nous permettre d'envisager un aspect de notre problématique que nous avions laissé de côté.

En effet, notre approche dans le livre était purement langagière. Nous cherchions à savoir en quoi un mot français employé en mathématiques peut faire obstacle à la compréhension de la notion enseignée, et ce sous l'aspect du rôle métaphorique du langage.

Par exemple, si l'on dit que deux matrices sont « semblables », ou qu'une fonction est « majorée », le français nous permet de « comprendre » ce qui est dit, même si cela peut déboucher sur une vision mathématique fausse.

De là, on en arrive à se poser la question des mots utilisés dans les définitions en mathématiques.

Dans ce qui suit, nous nous sommes limités à l'aspect pédagogique, notre volonté étant de résoudre certains problèmes rencontrés en classe.

Introduction

Dans la vie courante, le manque de définition claire est souvent une source de conflit entre deux personnes ; elles croient parler de la même chose alors que ce n'est pas le cas.

En mathématique, comme dans d'autres disciplines, savoir de quoi l'on parle est fondamental. Il y est, en tout cas, d'usage incontesté de définir les mots.

De plus, en mathématiques, quand une définition est donnée dans une théorie achevée [1], on ne la « discute » pas (même s'il peut y avoir plusieurs théories définissant le même mot comme par exemple le mot « limite »). Ce n'est pas le cas en philosophie. Considérons par exemple le mot « liberté », ou le mot « beauté ». Le travail philosophique va consister à « discuter » de la définition que l'on va en donner [2].

Dans cet article, nous aborderons la question de la façon dont est écrite une définition mathématique, pourquoi et en quoi, les choix faits peuvent poser problème aux élèves.

Nous montrerons d'abord qu'une des activités principales en cours de mathématiques, essentiellement implicite, est de passer du français aux mathématiques et réciproquement. Cette activité de traduction est rarement explicitée en cours, ce qui engendre toutes sortes de difficultés.

Nous nous interrogerons ensuite sur ce que les élèves peuvent faire avec une définition, et en quoi une définition peut être une ressource dans les situations de blocages.

Nous terminerons en étudiant les difficultés propres au langage français, soit parce qu'il n'est pas maîtrisé par les élèves, soit parce que les mots sont utilisés en mathématiques avec un sens différent de celui du français.

1. — Le français dans l'énonciation d'une définition en mathématiques

Ces dernières années, l'usage du français s'est développé dans l'enseignement des mathématiques … en France. Bien sûr, ceci ne s'est pas fait au détriment de l'anglais, mais au détriment d'un formalisme qui avait été considéré comme souhaitable jadis. Ce parti pris repose essentiellement sur la volonté de se faire *mieux* comprendre d'un *plus grand* nombre. Ce but est-il atteint ?

Envisageons le cas des définitions.

Dans une certaine mesure, la définition joue dans l'enseignement des mathématiques le rôle de fantasme. Si on prend l'article « fantasme-phantasme » du CNRTL [3] (Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales), on lit :

> *« Construction imaginaire, consciente ou inconsciente, permettant au sujet qui s'y met en scène, d'exprimer et de satisfaire un désir plus ou moins refoulé, de surmonter une angoisse. »*

Même si cette phrase se trouve au paragraphe « Psychanalyse », elle paraît adaptée à notre réalité de professeur de terrain.

Une définition est largement une « construction imaginaire ». D'abord, parce qu'elle est le fruit de l'imagination de quelques mathématiciens. Mais aussi parce qu'elle n'est souvent que dans l'imagination du professeur qui se sent bien seul en classe quand, voulant débloquer la recherche d'un problème, il invoque la définition de la notion en jeu.

---

1 Ce qui est le cas des mathématiques enseignées au lycée.

2 Citons comme auteurs ayant parlé du «beau» (et d'autres choses !) : Platon, Kant, Hegel, Bergson, ...

3 Sur internet à l'adresse : http://www.cnrtl.fr/definition/fantasme

Plus « essentiellement », une définition peut apparaître comme une « construction imaginaire » quand elle ne s'accorde pas directement à notre perception. Prenons l'exemple des limites. Une manière intuitive de traduire « u_n tend vers L quand n tend vers $+\infty$ » serait de dire : « quand je fais devenir n très grand, alors u_n sera très proche de L ».

Or ce n'est pas la définition donnée dans les classes du lycée ou de CPGE. Il faut donc que le professeur « fasse avec » cette « construction imaginaire » que constitue la définition du programme :

> *Pour exprimer que u_n tend vers L quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang ».*

On aura remarqué que dans cette définition on a « inversé » le point de vue. On regarde les termes u_n en leur imposant une contrainte et on cherche une condition suffisante sur n pour qu'elle soit satisfaite [4] . Mais si c'est d'une « redoutable efficacité », ceci n'est pas sans poser des difficultés.

Si on revient à la phrase du CNRTL, « *…, consciente ou inconsciente, ...* » rend bien compte du fait que tous les mots ne peuvent pas être définis. Par exemple le « consensus » sur le mot « réel » se fait « inconsciemment » jusqu'à un niveau élevé de la formation.

Pour la suite de la phrase, il nous faut enlever un « y », la phrase devenant :

> *« Construction imaginaire, consciente ou inconsciente, permettant au sujet qui se met en scène, d'exprimer et de satisfaire un désir plus ou moins refoulé, de surmonter une angoisse. »*

En effet, qui peut nier que le professeur se met en scène quand il fait cours ... Il a même le plus souvent ce « *désir plus ou moins refoulé* » de faire un enseignement « logique », reposant sur des bases solides, dont font partie les définitions, son ambition devant lui permettre de surmonter son « *angoisse* » que constitue l'incompréhension de ses élèves.

On a souvent vu la réforme des « maths-modernes » comme un moment de rationalisation idéal. Son échec (ou ce que l'on a voulu prendre pour tel) a conduit à son abandon [5].

La réforme des « maths-modernes » reposait sur le parti-pris d'autosuffisance des mathématiques. Pas besoin du monde extérieur, ou le moins possible. Les mathématiques étaient affirmées comme une science déductive et non comme une science expérimentale. En faisant appel à la « raison », on réduisait (voire, on essayait d'annihiler) la part de l'intuition. Plus besoin d'être doué pour faire des mathématiques. Tout le monde devait pouvoir réussir avec un peu d'application.

Les définitions, très rigoureuses, refusant de reposer sur les images venues du monde extérieur étaient donc souvent longues et alambiquées, laissant perplexes parents, élèves et parfois même les professeurs [6]. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre l'exemple de la définition d'une « droite affine » :

> *Par définition une droite affine D est un ensemble E muni d'une famille Φ de bijections de E sur* **R** *telles que :*
>
> - *pour tout f élément de Φ, et pour tout élément $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, l'application*

---

4 L'analyse « non-standard » permettrait d'éviter cette inversion de point de vue, mais on connaît les difficultés théoriques et pédagogiques qu'elle entraîne.

5 Cependant, dans la communauté des professeurs de mathématiques, le débat pour ou contre le formalisme à la Bourbaki continue.

6 Voir le film d'Olivier Peyon « Comment j'ai détesté les maths ».

définie par $g(M) = af(M) + b$ appartient aussi à Φ .

- *réciproquement si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de Φ, il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ tel que $f_2(M) = af_1(M) + b$.*

L'ensemble E est appelé le support de la droite affine D, un élément M de E est appelé un point de la droite affine D.

(Commentaires du programme de la classe de quatrième. Déc. 1971)

L'élève est en droit de se demander pourquoi on appelle cela une droite. Car, pour un élève, la droite « existe » avant cette définition.

Si de fait cette définition paraît « sur-réaliste », en « contre-point », il est intéressant de regarder un livre de seconde des années 70 (plus précisément le livre de Seconde A,C,T collection Cossart et Théron, Bordas (1969)). On trouve dès le début :

ENSEMBLES

1. *Définitions Chacun comprend ce qu'on entend par : ensemble des élèves de la classes, (…), ensemble des points d'un segment donné.*

A la suite il est précisé comment on peut définir un ensemble : « *en extension* » (c'est-à-dire « *par énumération des éléments qui le contiennent* ») ou« *en compréhension* » (c'est-à-dire « *par une propriété* »). Dans ce second cas, les auteurs précisent même comment il faut entendre cette situation :

« E contient tous les objets qui ont la propriété (p), et tous les objets qui composent E ont cette propriété. »

On voit le souci que les auteurs avaient de clarifier l'expression « en compréhension » qui est prise dans le langage courant. L'élève a ainsi une « méthode » pour utiliser la définition d'un ensemble.

Alors que nous ne faisons plus à proprement parler un enseignement sur la théorie des ensembles, cette préoccupation est encore d'actualité. Par exemple, quand on aborde l'algèbre linéaire (mais pas uniquement ! …), on est de suite amené à considérer des ensembles comme :

$$E = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbf{Z} \text{ et } b \in \mathbf{Z}\}$$

et

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\} .$$

On est alors obligé de bien faire comprendre aux étudiants que les définitions de ces deux ensembles ne sont pas de même nature et qu'on les manipule différemment (songez aux deux questions « montrer que l'addition des réels est une opération interne à E » et « montrer que G est une sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ »). Cela ne va pas de soi.

On peut remarquer que si on définit le même ensemble G par

$$G = \{(a, b, a + 3b) \mid a \in \mathbf{R} \text{ et } b \in \mathbf{R}\},$$

on n'a pas le même exercice avec pourtant la même question.

A l'heure actuelle, on peut dire que dans l'enseignement du lycée, le parti-pris est inverse (ou opposé ? ou réciproque ? ...) de celui des « maths-modernes ». Par exemple, on donne pour définition d'une fonction continue que « c'est une fonction dont on peut tracer la courbe représentative sans lever le crayon ».

Difficile de faire plus intuitif, la notion de continuité mathématique étant rattachée à l'idée naïve d'un trait continu. Difficile aussi de faire quelque chose avec cette définition. Comment, en effet, avec cette définition, montrer qu'une fonction est continue ? On ne peut pas et cela tombe bien (la plupart du temps), on ne le demande pas !

La notion prend alors un caractère nébuleux, ce qui débouche avec la dérivation sur des phrases du genre « la fonction est dérivable parce qu'elle est continue » (dont la fréquence prouve qu'elle ne saurait être analysée uniquement sous l'angle de l'erreur « classique » consistant à confondre une implication et sa réciproque)

Certes au lycée, on donne aussi des définitions plus rigoureuses, moins intuitives, comme la définition d'une suite croissante par exemple, mais sans s'astreindre pour autant à donner celle d'une suite tout court !

Les définitions données ont le plus souvent un caractère « opératoire », laissant de côté celle qui sont plutôt « existentielles ».

Dans l'enseignement supérieur, les choses changent. On multiplie les définitions formelles, en évitant de retomber dans le « bourbakisme »[7]. Aussi certains élèves, n'ayant pas pris l'habitude de manipuler des définitions pour trouver des méthodes de résolution, peuvent rester bloqués devant leur feuille.

Que faire de l'information « f est une fonction bornée », si on en reste aux aspects graphiques et si on ne se réfère pas à la définition rigoureuse, qui nous permet de poser un réel M (donc de le définir...) tel que, pour tout x , $|f(x)| \leq M$?

Les deux points de vue sont utiles. Avoir une idée intuitive de la définition, associée à une « image » (par exemple une fonction est bornée si son graphe se situe entre deux droites horizontales) peut permettre d'enclencher une démonstration qui, elle, passera par la « traduction mathématique » (à savoir, dans cet exemple, « il existe M tel que pour tout x, $|f(x)| \leq M$ », *ce qui permettra* d'écrire des inégalités à partir de cela).

L'activité première de l'élève face à un exercice de mathématiques, à ce niveau là, est de passer de la vision intuitive à l'écriture mathématique et de l'écriture mathématique à la vision intuitive. En effet, il faut également penser que si on a « pour tout x, $|f(x)| \leq M$ », *cela veut dire que f est bornée et que l'on peut donc utiliser les théorèmes utilisant cette hypothèse*.

De même si dans un énoncé on lit « on admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente[8] », il faut savoir traduire : « $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} e^{-t^2}\,dt$ existe et est finie » (ce qui peut permettre de démontrer par exemple que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{x^2} \int_0^{x} e^{-t^2}\,dt = +\infty$).

On ne peut pas non plus oublier que tout dépend des « standards[9] » de démonstration qu'on s'impose.

Reprenons l'exemple de la notion de « fonction bornée ». Considérons la question : « démontrer qu'une fonction T-périodique qui est bornée sur l'intervalle $[0, T]$ est bornée sur **R** ».

Un « standard » graphique est tout à fait recevable et fera faire des « maths » aux élèves : utilisation du fait que sur l'intervalle $[0, T]$ la

7 D'ailleurs le terme est devenu presque une «injure», à tout le moins une critique !

8 Voir sujet de mathématiques du concours ATS 2015.

9 On pourrait parler de « cadres ».

représentation graphique est comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses, et invariance de la représentation graphique par translation de vecteur $T\vec{i}$ ($\vec{i}$ étant un vecteur directeur de l'axe des abscisses).

Mais, bien sûr, on peut imposer un « standard » non graphique. Dans ce cas, si on reprend la même argumentation que précédemment, la mise en œuvre du raisonnement impose une « inversion » à la deuxième étape dans la mesure où il s'agit de prendre un nombre réel quelque et de le faire « rentrer » dans l'intervalle $[0, T]$. Il faut donc être conscient qu'on ne fait pas les mêmes « maths » selon que l'on permet tel ou tel « standard ».

Pour terminer on peut remarquer que dans l'exemple ci-dessus, il s'agit de montrer que l'on sait démontrer qu'une phrase est vraie en partant d'autres phrases vraies, alors que la première « démonstration », nous « montrait » un phénomène [10].

2. — La définition, outil de démonstration

Le premier travail pédagogique à faire avec une définition est de la faire « comprendre » à l'élève, c'est-à-dire de la lui faire accepter.

Certes une définition mathématique n'a pas à être justifiée [11]. Nous (les auteurs [12]) disons parfois, en caricaturant un peu, que « dans une définition, il n'y a rien à comprendre ». Certes ! Cependant, elle doit être expliquée, contextualisée, afin que les élèves se l'approprient. Au cours de cette phase, l'usage du français est tout à fait essentiel. Pour faire « passer » une notion, nous sommes tous obligés d'utiliser le langage avec toute sa richesse. Nous sollicitons des métaphores, nous essayons d'évoquer des images. En fait, nous jouons avec les mots.

Par exemple, après avoir donné une définition mathématique « rigoureuse » d'une famille génératrice d'un espace vectoriel, on peut doubler celle-ci en évoquant l'idée qu'une famille génératrice engendre tous les vecteurs de l'espace vectoriel, rattachant sémantiquement les mots « génératrice » et « engendrer ».

Il ne faut pas s'étonner alors, que, quand nous définissons une notion désignée par des mots du langage courant, les images suggérées par la richesse de la langue dans la tête des étudiants viennent doubler (cette fois au sens qu'une voiture en double une autre) la définition que nous avons donnée avec soin !

Dans la mesure, où nous-même nous avons *quelques fois* sollicité la compréhension par des méthodes langagières, les étudiants se croient « en droit » de faire *toujour***s** comme ça. D'où l'idée chez les élèves que la connaissance « parfaite » d'une définition n'est pas nécessaire. Il suffit d'avoir « compris » [13] ! Et souvent, c'est là que les difficultés commencent ...

Prenons par exemple la question consistant à montrer que $\vec{v_1} = (1, 1, 0)$, $\vec{v_2} = (1, 0, 1)$ et $\vec{v_3} = (0, 1, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.

L'étudiant qui a « compris » l'image d'une famille qui engendre tous les vecteurs ne peut

[10] Sans que ce soit exactement notre propos, on pourrait faire des rapprochements entre cette idée et les « changements de cadres ».

[11] Un exemple intéressant à développer serait le cas du mot «tangente» qui a deux définitions, selon que l'on considère un cercle ou une courbe «régulière».

[12] Nous croyons ne pas être les seuls !

[13] On peut remarquer que souvent dans la difficulté à réciter une définition, les étudiants évoquent l'idée qu'ils ne peuvent pas retenir quelque chose qui n'ont pas compris. A quoi, on est en droit de répondre qu'il est encore plus difficile de comprendre quelque chose que l'on ne connaît pas !

pas pour autant faire la démonstration, car dans la « vraie vie », on n'engendre pas en faisant des combinaisons linéaires ! Nous devons mettre en place tout une démarche de traduction qui débouche sur la nouvelle question :

pour $\vec{v} = (x, y, z)$ quelconque de $\mathbf{R}^3$ montrer que le système $\vec{v} = a\,\vec{v_1} + b\,\vec{v_2} + c\,\vec{v_3}$ d'inconnues a, b et c admet au moins un triplet solution.

Notre tâche pédagogique pourrait apparaître comme un « puits sans fond », si toutes les définitions n'étaient pas écrites avec un petit nombre de structures logiques : «quel que soit ... », « il existe … », « implique », « et » [14], … Nous sommes donc ramenés à développer des compétences « ré-utilisables ».

Par exemple, si au début d'une définition il y a un « quel que soit $\vec{v} \in E$ », pour la démonstration, on peut (on n'y est jamais obligé !) commencer par « prendre » un $\vec{v} \in E$ *quelconque (et bien comprendre ce que cela veut dire, ce n'est pas rien !) ; si on a une implication, on peut supposer que le premier membre est vraie et alors on essaie d'en déduire le second membre ...*

Il est important de faire comprendre qu'une définition donne une méthode. Mais les élèves n'ont pas l'habitude de considérer une définition comme une ressource. Peu s'y intéressent vraiment.

Or dans certains cas, elles sont un moyen de démonstration efficace. Pour montrer que la série $\sum_{n>0}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente, on peut utiliser la définition ce qui amène à considérer la suite des sommes partielles définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ qui est égal à $1 - \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 1. Donc, par définition, la série $\sum_{n>0}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge ; de plus on a la somme qui vaut donc 1.

Au-delà de la mise en forme d'une démonstration, il y a la phase « heuristique », et comme nous l'avons dit plus haut les différents aspects d'une notion peuvent être utiles.

Par exemple, pour montrer qu'une suite convergente est bornée à partir de la définition, on peut supposer que l'image qui consiste à voir un « tuyau » dans lequel rentre la suite à partir d'un certain rang permet de penser à poser $\varepsilon = 1$ (ou $\varepsilon = 2015$!), puis de dire qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - L| \leq 1$, donc $L - 1 \leq u_n \leq L + 1$, pour finalement conclure en remarquant que les termes restants forment un ensemble fini, donc nécessairement borné.

En résumé, nous devons convaincre nos étudiants que maints blocages seraient levés rien qu'en revenant aux définitions … à condition de les connaître !

3. — Quelques problèmes rencontrés avec les définitions

Tout d'abord, comme nous l'avons dit plus haut, les définitions posent un problème aux élèves parce qu'ils ne « comprennent » pas la définition (et ils le disent ...). Il est « logiquement » légitime de considérer qu'il n'y a rien à comprendre. Elle « est » ce qu'elle est, point.

14 Et leurs synonymes : « pour tout ... », « donc », ...

Nous pensons que souvent il y a incompréhension entre élèves et professeurs sur ce verbe « comprendre ».

Quand un élève dit qu'il ne comprend pas, la plupart des professeurs répétent la définition, décortiquent sa structure ; en fait, font de la paraphrase.

Tout ceci est insuffisant, parce que le plus souvent ce que l'élève ne « comprend » pas, c'est, d'une part, la nécessité de l'acte de définir (pourquoi définir une droite?), d'autre part, le sens ontologique de la définition donnée (pourquoi qualifier de « libre » une famille de vecteurs ?).

Nous devons passer du temps pour contextualiser une définition.

Pour cela, l'histoire des mathématiques (et des sciences en général) peut être précieuse, notamment, à travers les problèmes qui ont amené les mathématiciens à poser telle ou telle définition. Il est intéressant de montrer qu'une définition ne va pas de soi. Certaines définitions (comme celles des limites) n'ont été explicitées que tardivement dans l'histoire, bien après qu'on ait obtenu des résultats sur les notions concernées.

Il n'est pas inutile non plus de montrer en quoi une définition est nécessaire pour savoir si un résultat est vrai. Par exemple, la relation d'Euler $F - A + S = 2$ concernant le nombre de faces F, le nombre d'arêtes A et le nombre de sommets S d'un polyèdre n'est vraie que si l'on définit la notion de « polyèdres convexes ».

Enfin, nous devons montrer « à quoi ça sert ». Au mieux, dans la « vie réelle », mais c'est rare ! Plus communément, à l'intérieur des mathématiques même. C'est ce que suggèrent les programmes quand ils parlent de la résolution des problèmes comme étant l'activité principale d'un cours de mathématiques.

Pour pouvoir utiliser une définition, il est nécessaire qu'elle soit donnée sous une forme utile, c'est à dire, mathématique.

En effet, savoir que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ veut dire que $f(x)$ devient très grand quand x devient très grand, ne sert à rien pour démontrer que e^x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.(*D'ailleurs, qu'est ce que cela veut dire « très grand » ?*)

De même, dire qu'une fonction continue est une fonction dont on peut tracer le graphe sans lever le crayon, n'est pas très pratique ! D'autant que pour tracer le graphe, on prend une calculatrice, ou alors on fait un tableau de variation, c'est-à-dire qu'on suppose qu'elle est continue.... On voit que cet univers « absurde » n'est pas forcément très rassurant, ni même intéressant [15].

L'idée que l'enseignement des mathématiques, pour être compris des élèves, doit se faire avec l'usage de la langue française paraît maintenant généralisée. Néanmoins, il faudrait d'abord être sûr que les élèves maîtrisent correctement la langue. Toutes les conjonctions (mais, ou, et, donc, or, ni, car), les termes « il faut » et « il suffit », ainsi que les « tics » propres aux mathématiques, comme « soient deux réels a et b, tels que, ... » peuvent induire des incompréhensions.

Si on reprend la définition de la limite d'une suite sous la forme : *« tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang »*, on peut faire

15 On peut s'interroger sur les liens qui existent entre la « désaffection » des études des mathématiques chez les étudiants et « l'intérêt » suscité par les dernières évolutions de l'enseignement.

de « vraies » démonstrations avec, mais les compétences langagières ne seront pas les mêmes que si on prend la forme (plus ou moins formalisée) : « *quel que soit* $\varepsilon > 0$ *, il existe* $N \in \mathbf{N}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *avec* $n \geq N$*, on a :* $|u_n - L| \leq \varepsilon$ ».

Au-delà de la maîtrise de la langue, les notions de « cause » et « conséquence » ne sont pas forcément claires, aussi que peut-on espérer pour la compréhension d'un énoncé avec « si...alors… » ?

Si on prend deux phrases commençant respectivement par « pour tout x , il existe α, ... » et « il existe α, pour tout x , ... », doit-on considérer, parce qu'elles sont en « français », qu'elles seront comprises et que nous n'avons pas à les travailler ?

Notre propre pratique peut ne pas inciter les élèves à revenir aux définitions. En effet souvent un cours commence par une (ou des) définition(s) suivie(s) de théorèmes qui font que rapidement, dans les exercices, la définition est court-circuitée.

Prenons l'exemple des développements limités. Peut-on s'indigner qu'un étudiant après de multiples exercices « calculatoires », ne sache pas trouver le d.l. d'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = x^4 \sin(\frac{1}{x})$ (prolongée par continuité en 0) ? Question à laquelle on répond immédiatement par un retour à la définition.

La définition peut aussi apparaître aux étudiants comme relevant de « l'ontologie ». Cela relève du transcendantal … Il faut vite l'oublier !

Dans notre ouvrage *Parlez-vous maths ? (Editions EdpSciences),* nous avons développé l'idée que certaines difficultés étaient induites par l'ambivalence du sens des mots entre l'usage français et l'usage mathématique, et par les images que les mots français utilisés en mathématiques véhiculent avec eux, en parasitant le sens, et ce en particulier lors des définitions.

Nous allons proposer quelques exemples de « conflits de langage » étudiés dans notre livre.

Commençons par la notion de « famille de vecteurs libres ». Si on a une famille de vecteurs qui n'a pas cette propriété, au lieu de dire que cette famille n'est pas une famille de vecteurs libres, on dira que l'on a une « famille de vecteurs liés », sollicitant, au cœur même du cours, la force d'évocation du langage. On a même dans ce cas-là une polysémie « à l'envers », puisqu'il n'est pas rare que les vecteurs d'une famille de vecteurs libres soient qualifiés d'indépendants. Et il serait hasardeux de prétendre que les deux mots « libre » et « indépendant » recouvrent en français le même sens. Dans le contexte de l'évolution de la notion de famille dans notre société, comment oublier que ce terme peut avoir une résonance affective très forte, qui peut perturber le raisonnement de l'élève, en tout cas sa compréhension ? Qu'est-ce que cela lui renvoie sur sa propre famille ? Une famille, suivant le vécu de chaque élève, peut être nombreuse, restreinte, liée, éclatée, libre... Quelle position a-t-on dans la famille ? Est-on indépendant ? De plus, comment imaginer que dans une famille de vecteurs, il peut y avoir plusieurs fois le même vecteur ? Que l'ordre des vecteurs « ne compte pas » ?

La complexité de notre monde actuel est souvent invoquée pour justifier que l'on ne peut pas trouver de solutions à des problèmes importants de notre quotidien. Rien d'étonnant alors que le titre du chapitre, « Nombres complexes », d'entrée de jeu, ancre dans la tête de l'élève que « ça va être complexe » et « donc » compliqué, que l'on ne saura pas trouver de solutions aux problèmes posés. De fait, c'est un des chapitres les moins aimés des élèves, et il n'est pas rare que des professeurs d'autres disciplines (comme l'électronique) nous renvoie l'incompréhension des élèves devant des notions comme « argument » et « module » que nous croyons avoir parfaitement définies. On peut noter à ce propos qu'il n'y a pas vraiment d'argument pour justifier le terme « argument d'un nombre complexe » !

Dans le langage courant, « majorer » est associé à « augmenter » : quand on majore les salaires, on a des salaires qui sont plus importants. Quand on a majoré les impôts, on paye davantage d'impôts ... En mathématiques, on peut dire que c'est (à peu près) le contraire !

Majorer une fonction, cela veut dire trouver un nombre plus grand que toutes les valeurs des images de la fonction. Si on majore la fonction donnant les salaires dans une entreprise, on n'a pas augmenté les salaires, on a seulement trouvé un nombre qui est plus grand que tous les salaires de l'entreprise. Donc, le majorant (qu'on peut entendre comme le participe présent du verbe majorer) n'accorde aucune augmentation !

On apprend dès la classe de seconde qu'une fonction est croissante lorsque, quand on l'applique à deux nombres quelconques a et b, avec $a \leq b$ on obtient $f(a) \leq f(b)$. Souvent on illustre le propos en montrant une fonction qui « monte ». C'est simple et efficace !

Cependant, il y a quand même un risque de conflit avec le langage courant !

Reprenons l'exemple des salaires : après une augmentation, on a appliqué une « fonction » f à la grandeur « salaire » x de telle sorte que $x < f(x)$. De plus, le choix des mots « croissante » et « décroissante » qui connote l'un comme la négation de l'autre, peut faire croire qu'une fonction qui n'est pas croissante, est décroissante (c'est souvent la croyance des élèves sortant du lycée.)

Ce n'est pas fini, il y a encore un autre « conflit de langage » ! Tout le monde a entendu parler de lune croissante et de lune montante (respectivement de lune décroissante et de lune descendante). Nous avons longtemps cru que les deux expressions étaient synonymes «puisque» une fonction croissante était associée à une représentation graphique montante. Or, on peut avoir une lune croissante qui est descendante et une lune décroissante qui est montante ...

Une autre particularité de l'usage du langage en mathématiques est ce qu'on peut appeler la « pratique extrême » [16].

Prenons l'exemple du mot « partie ». Dans le langage courant n'est pas utilisé « à l'extrême », comme en mathématiques, où la partie vide et l'ensemble lui-même sont des parties comme les autres. En effet, dans le langage courant, la partie n'est pas égale au tout, encore moins à rien du tout ! Si vous dites vouloir utiliser une partie de vos économies pour acheter une voiture, votre entourage sera surpris si vous en dépensez la totalité ! A moins que votre entourage ne soit composé que de mathématiciens ... Cette incompréhension nous a valu plus d'un quart d'heure de dialogue de sourds avec un élève qui ne comprenait pas comment utiliser la définition de la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble E pour déterminer la fonction caractéristique de E ou de $\varnothing$. Au final, cet exemple est emblématique de notre propos : la compréhension de la définition de l'élève était entravée par son idée « reçue » de ce qu'est une partie.

---

16 Ou « principe du maximum d'information » à la suite d'Oswald Ducrot

Une situation récurrente est la confusion entre « zéro » et « vide ». Une élève est restée bloquée devant l'équation $2x = 0$, parce que pour elle, « 0» ne pouvait pas être une solution, parce que cela voulait dire qu'il n'y a pas de solution …

En classes préparatoires, sur les copies, on rencontre souvent « $Ker(f) = \varnothing$ » en lieu et place de $Ker(f) = \{0_E\}$. Si ceci peut être une erreur « pure et simple », une hypothèse vraisemblable est que cela traduit une difficulté à distinguer l'ensemble qui contient zéro élément et l'ensemble qui ne contient que 0.

Pour confirmer cette hypothèse donnons l'exemple suivant tiré d'une expérience récente avec un élève de terminale S qui dit : « La partie réelle de $1 + i$ est différente de 0 donc elle existe. ». Lui demandant de préciser sa pensée, il rajoute : « En effet, i n'a pas de partie réelle, la partie réelle de i n'existe pas. »

Pourtant « zéro » ce n'est pas rien ! Sauf que dans le langage courant, quand on a zéro euro, on n'a rien dans son porte-monnaie. Si une équation a zéro solution, l'ensemble de ses solutions est vide. *(Mais si elle a « zéro » comme solution alors son ensemble de solution n'est plus vide)*. Reprenons : zéro, c'est rien, l'ensemble vide c'est rien, donc l'ensemble vide c'est zéro. C'est sûrement le raisonnement fait (inconsciemment ?) par les élèves. On ne peut pas dire qu'il soit totalement stupide. En tout cas, pour un professeur de mathématiques, c'est difficile de comprendre pourquoi ses élèves font cette erreur, si on ne tient pas compte de la confusion faite communément entre « zéro », « vide » et « rien ». *(Bien sûr, il n'y a qu'à considérer, par exemple dans le magnifique livre de Godement* Cours d'algèbre, *Éditions Hermann), la construction de l'ensemble des nombres entiers, à partir de ∅, pour pouvoir vraiment dire que l'ensemble vide, ce n'est pas rien*[17].)

Pour finir avec un dernier exemple, considérons le terme « moins » qui a déjà au moins (…) trois sens en mathématiques (« 3 moins 2 », « moins deux », et « moins x »). Sans compter que ce terme est très souvent utilisé en français plutôt comme comparatif (« il fait moins froid qu'hier »). La difficulté des élèves d'accepter que $|x| = -x$ si x est négatif vient du fait de la polysémie du signe moins. Comment $-x$ peut-il être positif, si on se réfère à l'utilisation de « moins » pour définir les nombres négatifs ?

La chronologie des trois définitions est déterminante dans cette confusion. Il est important à chaque fois que l'on donne une définition à « moins » de la rattacher à la précédente pour plus facilement détacher les sens.

Conclusion

La manière de donner une définition a varié dans l'histoire et variera sûrement encore. Cependant, on peut penser qu'il existe un consensus sur l'utilisation des mots français, avec la nécessité de les « traduire » en mathématique à un moment ou un autre (en général pour pouvoir résoudre un exercice). Il est important pour qu'un professeur soit compris de ses élèves qu'il ait conscience des difficultés induites par l'usage de la langue. Cependant, même si des incompréhensions peuvent surgir, celle-ci est un moyen de communication performant dont on ne saurait se priver.

A l'inverse, ce sont parfois les mathématiques qui sont utilisées pour se faire comprendre en français. Prenons la fameuse promesse : « nous allons inverser la courbe du chômage ». L'utilisation des mots « inverser » et « courbe » marque bien l'appel aux mathématiques. L'idée

17 On pourrait aussi citer Raymond Devos et son sketch sur rien.

est de créer du sens à l'aide de ces notions alors même que le sens mathématique n'est pas respecté. « Inverser une courbe », si tant est que cela ait un sens, ne correspond pas à l'idée qui veut être suggérée, puisque l'inverse d'une fonction (ou fonction réciproque) a les mêmes variations que la fonction d'origine. Si la fonction donnant le chômage était croissante, alors, une fois qu'on l'aura « inversée », elle continuera à croître !

Pourquoi ne pas avoir dit : « le chômage augmente, nous allons le faire baisser » ?

Peut-être parce que cet engagement était trop contraignant, alors même que c'est celui-ci que les français ont cru entendre. On peut penser que l'engagement ne portait que sur le fait d'un « ralentissement de l'augmentation ». En d'autres termes, on passait d'une fonction croissante convexe à une fonction croissante concave. Et là, il faut reconnaître que si on inverse (mathématiquement) une fonction croissante convexe, elle devient concave, mais reste toujours croissante !

Reconnaissons que tout ça est reconstruit a posteriori. En fait, les politiques ont utilisé un langage (pseudo-)mathématique pour créer une perte de sens.

D'où l'importance de bien gérer en classe les rapports entre vocabulaire français et notions mathématiques afin de donner au plus grand nombre les moyens d'exercer leur sens critique.