DE LA NECESSITE DE DEFINIR LES NOTIONS DE LOGIQUE AU LYCEE

Denise GRENIER
Institut Fourier et
Irem de Grenoble

Résumé : Cet article propose une réflexion sur les conséquences d'une recommandation forte du programme actuel des trois années de Lycée : « Ne pas faire de cours de Logique », alors même que les objectifs sur ce thème sont ambitieux. Est-il raisonnable de vouloir enseigner des notions de Logique sans jamais (au minimum) les définir ? Les nombreux enseignants rencontrés dans nos stages de formation avouent ne pas pouvoir assurer correctement le programme dans ces conditions. Cette contrainte a aussi des conséquences visibles dans les manuels scolaires des trois années de Lycée : les « définitions » des notions à enseigner sont remplacées par des présentations écrites dans un langage naturel qui, pour beaucoup d'entre elles, ne permettent pas d'accéder aux notions de Logique qu'elles sont censées décrire. Dans cet article, nous ferons d'abord un point sur les différents types de raisonnement et les concepts de Logique au programme du Collège et du Lycée. Puis nous donnerons les résultats d'une étude de quelques manuels de Lycée, pour voir comment leurs auteurs ont interprété ce programme et ses contraintes, et ce qu'ils proposent en remplacement du cours de Logique interdit. Nous mettrons cela en relation avec les difficultés repérées depuis de nombreuses années chez des étudiants de Licence de mathématiques, dans la compréhension des concepts de Logique et de leur utilité pour faire des mathématiques. Enfin, nous argumenterons sur la nécessité d'aller au delà des recommandations officielles, pour donner une chance aux notions de Logique de se construire.

Introduction

Peut-on faire des mathématiques sans définir — à un moment donné de l'enseignement — les objets que l'on utilise ? Quels rôles, places et formes doit-on donner aux définitions pour qu'elles soient « lisibles », porteuses de sens et opérationnelles pour résoudre des problèmes ?

Ces questions concernent a priori tous les concepts enseignés dans le Secondaire. Pour ce qui est des notions de Logique, il s'agit de savoir lesquelles sont nécessaires pour – au moins – comprendre des énoncés, écrire des phrases qui ont du sens, raisonner correctement, avoir des critères pour valider ou invalider une affirmation. Il ne s'agit pas ici de Logique formelle, mais d'une « Logique des mathématiques », celle qui serait présente implicitement chez tous ceux qui « s'expriment et raisonnent correctement ».

Durand-Guerrier, dans sa note de synthèse (2005) présente les résultats d'une étude sur le rôle que joue le *formalisme logique* dans l'élaboration des connaissances mathématiques des étudiants. Elle analyse les questions soulevées par l'interprétation par les enseignants et les étudiants des énoncés mathématiques usuels dans les pratiques ordinaires de classe, en particulier pour les connecteurs logiques et la quantification. Cette étude montre la nécessité de se mettre d'accord sur les termes et expressions qui relèvent de la Logique utilisée en classe de mathématiques.

Ouvrier-Buffet (2004 et 2014) a étudié différents types de définitions, de la *zéro-définition* (celle de Lakatos (1984) en construction dans la résolution de problèmes) à la *définition formelle* du mathématicien. Elles se distinguent à la fois par leur origine, leurs caractéristiques syntaxiques et sémantiques et leur utilité. Ouvrier-Buffet montre que l'activité de définir est accessible aux élèves, dans des situations spécifiquement construites pour cet objectif et pour des concepts mathématiques bien choisis, car « plus favorables que d'autres pour engager une activité de définition » (p. 82) — ce sur quoi nous sommes d'accord.

Concernant les notions de Logique au programme du Lycée, on peut se demander lesquelles peuvent être introduites en résolution de problèmes et constructibles « au fil des chapitres », comme le demande le programme officiel. Ces notions ne se situent pas toutes au même niveau de compréhension et d'abstraction. Par exemple, dans le raisonnement déductif usuel, l'implication est utilisée dans un registre [1] proche de la logique naturelle : l'expression « $P \Rightarrow Q$ vraie » se comprend comme « Si P est vraie, alors Q est vraie », et cela peut suffire pour faire des preuves simples « directes ». Mais c'est insuffisant, par exemple, pour comprendre un raisonnement par l'absurde, qui consiste à prouver que $P \Rightarrow Q$ est vraie par un raisonnement (valide) basé sur une hypothèse (P ET NON Q) qui va se révéler fausse.

Nos propres travaux (Grenier 2006, 2008*a*, 2008*b*, Grenier et Payan 1998) sur les Situations de Recherche pour la Classe, dont l'objectif est l'apprentissage des différents types de raisonnement à tous les niveaux scolaires, nous permettent d'affirmer que les élèves sont capables de faire des conjectures et les étudier, de comprendre et de construire des contre-exemples, et de donner des éléments de preuve. À la condition que les notions mathématiques en jeu dans la résolution du problème de recherche soient à la portée des élèves (notions déjà connues) – les mathématiques discrètes sont bien adaptées pour ce type de situations. Ce que montrent aussi nos études, c'est que les raisonnements en acte dans la résolution du problème ne sont pas reconnus par les élèves, l'enseignant doit les désigner et les formaliser.

Pour les enseignants de Lycée, remplir le contrat du programme de Logique est difficile. D'une part, parce qu'il n'y a pas de « savoir de référence » (Mesnil 2014) [2] pour cet enseignement, sur lequel ils pourraient s'appuyer. D'autre part, parce qu'il semble assez difficile d'introduire ces notions seulement « au fil des chapitres »

1 Nous reprenons ici une représentation de l'implication en trois registres, utilisée dans la thèse de Deloustal-Jorrand (2004) : registre du raisonnement déductif, registre ensembliste et registre de la logique formelle.

2 Mesnil dans sa thèse (2014) fait une proposition de « Savoir de référence » pour l'enseignement de la Logique au Lycée.

— comme le préconise le programme : en effet, ce qui différencie les notions de Logique de notions proches mais relevant de la logique naturelle ne peut être mis en évidence par la seule résolution de problèmes.

Notre hypothèse est que ces choix du programme sont sous-tendus par une conception de l'apprentissage du raisonnement qui s'appuierait le plus longtemps possible sur le langage et la logique naturels, à laquelle s'ajouterait une perception erronée de la Logique et de son utilité pour « faire des mathématiques ». Du point de vue épistémologique, cela pose question. En effet, l'utilisation comme outil d'une notion qui n'est jamais définie, dont on ne donne aucune propriété, est forcément très limitée et sa validité ne peut être vérifiée. D'autre part, ces notions de Logique ne sont probablement pas constructibles, par des élèves de Lycée, dans une situation de définition (Ouvrier-Buffet, 2004, op. Cit.). Mais qu'en est-il à l'université ?

I. — Conceptions et difficultés d'étudiants avec les notions de Logique

Résultats généraux d'études didactiques sur les concepts de Logique

Ils proviennent de très nombreux tests, discussions et constats faits par nous depuis une dizaine d'années dans deux types de communautés, des étudiants de l'UJF [3] (L1 & L2 sciences, L3 maths, M1 maths, master didactique des sciences) et des enseignants inscrits aux stages du PAF « logique et raisonnements » assurés par l'Irem de Grenoble. Ils rejoignent les constats d'autres études didactiques (Deloustal-Jorrand 2004, Durand-Guerrier 2005, Fabert et Grenier 2011, CII-Lycée 2013).

Résumons-en les plus importantes, elles concernent surtout l'implication, un des connecteurs de base du raisonnement mathématique.

— Des confusions fréquentes entre « Condition Nécessaire » et « Condition Suffisante », entre « si » et « seulement si », entre « A implique B » et « A donc B », entre proposition, prédicat, énoncé contingent, phrase ouverte.

— Des connaissances absentes, telles la formalisation de la négation de ($A \Rightarrow B$), ou encore les représentations des relations entre l'inclusion ensembliste et l'implication.

— Des affirmations liées à la « logique naturelle », telle que « La phrase «$A \Rightarrow B$ » n'a pas d'intérêt (n'a pas de sens) lorsque A est fausse » ou encore « La phrase « $A \Rightarrow B$ » est fausse lorsque A est fausse ».

— Enfin, une propriété-en-acte [4] de causalité pour l'implication : « $A \Rightarrow B$ n'a de sens que lorsque A et B ont un lien de cause à effet entre elles » — renforcée par certaines expressions langagières associées à l'implication ; et une propriété-en-acte de temporalité : « Dans $A \Rightarrow B$, A est vérifiée avant B », ce qui fait obstacle à la vérifonctionnalité [5] de l'implication — la valeur de vérité d'une implication ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu — , mais aussi, dans le cadre du raisonnement déductif, à reconnaître que les formulations suivantes sont équivalentes :

($A \Rightarrow B$) $\Leftrightarrow$ (B est une Condition Nécessaire pour A) $\Leftrightarrow$ (A seulement si B).

3 Université Joseph Fourier – Grenoble

4 Une « propriété-en-acte » est une phrase qui tente d'expliquer des conceptions fausses fréquentes et répandues, sous une forme qui ressemble à une « propriété » mathématique ; elle est dite « en acte » car les élèves ne la formalisent pas forcément.

5 En Logique, l'implication $A \Rightarrow B$ est fausse *seulement si* A est vraie et B est fausse. Elle est vraie dans les trois autres cas. Et cela ne dépend pas du contenu de A et B, qui peuvent être des propositions « indépendantes ».

À la question « Écrire la négation de la phrase $A \Rightarrow B$ » une *majorité* des étudiants fait d'abord des tentatives (vaines) d'essais de toutes les implications possibles, avant de répondre finalement : « c'est Non ($A \Rightarrow B$)»!! Nous voyons deux causes principales à cet échec : d'une part, la négation d'une proposition conditionnelle n'est pas une proposition conditionnelle, il y a un changement donc de « statut » ; d'autre part, les éléments de logique nécessaires pour répondre à cette question ne sont pas opérationnels — à savoir : ($A \Rightarrow B$) $\Leftrightarrow$ (NON A OU B), *donc* (NON ($A \Rightarrow B$)) $\Leftrightarrow$ (A ET NON B).

Enfin, les étudiants rencontrent des difficultés sérieuses à comprendre, utiliser et formaliser les quantificateurs (quel que soit, il existe) et les contre-exemples, même après des années d'université.

Revenons au programme de Logique du Lycée. Quels sont les objectifs réels de ce programme ? Comment les manuels ont-ils interprété les contraintes officielles, et comment introduisent-ils et décrivent-ils les notions à enseigner ?

II. — Le statut des notions de Logique dans les programmes du Secondaire

Dans les textes de présentation du *programme actuel du Collège* (B.O. 2008) et le document « Ressources pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème « Raisonnement et démonstration » (2009), l'accent est mis sur l'apprentissage des raisonnements et la démarche de recherche, plus que sur l'acquisition d'un langage mathématique. Les textes insistent sur l'importance de la résolution de problèmes pour mettre en œuvre différents types de raisonnement : inductif, exhaustivité des cas, disjonction des cas, contre-exemple, absurde, …, le raisonnement inductif devant permettre l'élaboration de conjectures et être distingué du raisonnement déductif. Mais il n'est pas prévu au collège de définir (même dans un sens large) ces différents types de raisonnement, qui doivent être présentés et travaillés à l'occasion de la résolution de problèmes. Cependant, « penser mathématiquement » et « communiquer son raisonnement » sont aussi des objectifs au Collège ; et il est écrit par ailleurs que les mathématiques sont « une discipline d'expression qui participe à la maîtrise de la langue ».

On peut se demander jusqu'où le langage « naturel » et l'expression orale permettent de construire le raisonnement mathématique qui, pour être validé, doit s'appuyer sur des règles spécifiques … qui ne s'inventent pas. Une conjecture, une hypothèse, un théorème, sont des énoncés ayant des formes et des sens précis et une portée universelle ou existentielle (exprimées par des variables quantifiées).

Dans les textes des *programmes de Lycée* (B.O. 2008, 2009 et 2010), les notions de Logique sont données sous forme de liste dans un encadré identique pour les trois années de Lycée (cf. annexe 1). Cet encadré tient lieu à lui seul de programme. On y trouve des notions qui relèvent de registres et de niveaux d'abstraction différents (mais rien n'est dit sur ce sujet). Si on met à part ce qui concerne les « Notations mathématiques » [6], on peut les regrouper en deux sous-ensembles :

— les notions qui relèvent du registre de l'argumentation, du raisonnement et de la preuve : tous les différents types de raisonnement, condition nécessaire/condition suffisante, contre-exemple ;

6 Qui sont en fait des notions et notations ensemblistes. En présentant les notions ensemblistes en termes de « notations » et de « langage des ensembles », leur utilisation est de fait très restreinte. On ne peut donc pas dire que les éléments de base de la théorie des ensembles sont de retour ...

— des termes qui désignent des objets propres à la Logique : les connecteurs ET, OU, NON, IMPLICATION, ÉQUIVALENCE et les QUANTIFICATEURS. Dans cet encadré, la notion de PROPOSITION est implicite, et la notion de VARIABLE est absente.

Le document *Ressources pour la classe de Seconde* intitulé « Notations et raisonnement mathématiques », publié dans le même temps, propose une répartition des différentes notions selon les chapitres classiques du programme officiel. Nous l'avons reproduite en annexe 2. On peut voir, par exemple, que l'implication et l'équivalence pourront être travaillées dans le cadre des fonctions, et aussi que les notions de Condition Nécessaire et Condition suffisante pourront être travaillées en géométrie. Aucune explication n'est donnée de ces choix, dont la pertinence n'est pas évidente — en géométrie, nombre de propriétés sont des équivalences, ce qui ne facilite pas la distinction Condition Nécessaire/Condition suffisante.

Enfin, le programme ne donne aucun élément pour comprendre ce que veut dire, et comment réaliser, l'objectif « utiliser à bon escient » qui apparaît deux fois dans cet encadré. Sans au minimum une formulation de ces notions, comment l'élève peut-il contrôler leur utilisation, et comment l'enseignant peut-il valider ou invalider ce que fait l'élève ? Plusieurs études didactiques (Durand-Guerrier 2005, Mesnil 2014, Hache 2015) ont pointé les difficultés soulevées par les nombreux implicites sur ces notions de Logique dans les pratiques de classe et les effets de leur « naturalisation » — comme si le sens commun des mots et expressions, et leur utilisation régulière en classe, suffisaient pour accéder aux définitions et propriétés des notions de Logique sous-jacentes. Le « si … alors » en est un exemple courant, le flou dans le langage courant sur le sens de cette expression entraîne durablement des confusions entre l'implication, sa réciproque, ou une équivalence.

Que faut-il expliciter ? De nombreux aspects distinguent les connecteurs logiques ET, OU et IMPLIQUE des conjonctions « et », « ou », et de l'expression « si … alors » de la langue naturelle. Ainsi, la conjonction de coordination « et » indique une liaison entre deux mots, deux éléments de phrases, et marque souvent une causalité ou une temporalité, ou un ajout, alors que le connecteur logique ET relie uniquement deux propositions (logiques), et sa valeur de vérité ne dépend que des valeurs de vérité de ces deux propositions. Il en est de même pour le connecteur OU, qui construit une proposition vraie ou fausse à partir de deux autres. De plus, ce OU ne vérifie pas le principe du maximum d'information usuel dans la communication sociale. Du coup, l'exemple classique qui consiste à faire différencier la conjonction « ou » et le connecteur logique OU à partir de l'exemple « fromage ou dessert » – exercice proposé dans le document « Ressources pour la classe de Seconde « notations et raisonnement mathématiques » (2009) et repris par de nombreux manuels – n'est pas vraiment pertinent, sauf si c'est pour dire qu'on ne peut pas écrire « fromage OU dessert », puisque « fromage » n'est pas une proposition. De notre point de vue, les connecteurs logiques ET et OU n'ont pas de raison d'être étudiés dans des phrases qui ne sont pas mathématiques.

Le connecteur IMPLIQUE a des caractéristiques qui ne prennent souvent pas sens dans la logique naturelle, en voici les plus marquantes :

— « $A \Rightarrow B$ est vraie lorsque A est fausse » — nécessaire pour comprendre la preuve par l'absurde et le principe de récurrence (dans sa forme classique) ;

— «($A \Rightarrow B$) $\Leftrightarrow$ (NON A OU B) » — permettant de valider la négation d'une proposition conditionnelle et l'absurde ;

— la vérifonctionnalité de l'implication : « la valeur de vérité de A $\Rightarrow$ B ne dépend que des valeurs de vérité de A et de B » ; cette propriété va à l'encontre d'une conception temporelle et causale de l'implication : dans « Si … Alors … », A est avant B et A est la cause de B ; de même, B vient après A et B est la conséquence de A ; cette conception causale/temporelle (Deloustal-Jorrand 2004) est stable et fréquente car le raisonnement déductif — base de la construction des théorèmes et de leurs démonstrations[7] — occupe une grande partie de l'activité mathématique

La négation d'une proposition est un objet logique (NON A) dont la formalisation est complexe dès que la proposition A fait intervenir des quantificateurs, ce qui est fréquent en mathématique. Or les quantificateurs sont souvent absents des énoncés « naturels ». Bien sûr, les termes « tous » et « un », « aucun » sont usuels, mais on sait bien que leur sens est plus large : « l'exception confirme la règle », « tous » peut vouloir dire « presque tous » et le terme « un » désigne aussi bien le chiffre, le nombre, un article, ou un pronom indéfini, etc.

Il y a donc une nécessité à décrire précisément — donc à « définir » d'une manière ou d'une autre — tous ces termes en tant qu'objets de la logique en décrivant en quoi ils diffèrent de ceux des mots du langage courant. On en revient donc à l'écriture d'un « savoir de référence » sur lequel les enseignants pourraient s'appuyer. Mesnil, dans sa thèse déjà citée (2014), montre la nécessité d'aborder la logique en commençant par l'étude des notions de PROPOSITION et VARIABLE (muette ou parlante), avant d'aborder les connecteurs et les quantificateurs qui permettent, à partir de propositions élémentaires, de construire de nouvelles propositions.

III. — Expressions langagières et « définitions » des notions de logique dans les manuels de Lycée

Pour étudier la place et le rôle des définitions des notions de Logique dans les manuels, j'ai choisi des critères me permettant de reconnaître des définitions ou caractérisations qui seraient « cachées » :

— les lieux : les tables de matières donnant le plan de l'ouvrage, les index (quand il y en a) et, bien sûr, les pages ou paragraphes intitulés « Logique » et qui ressemblent à des « cours »), même si pour le thème logique, on ne trouve jamais cet intitulé ;[8]

— les notions : lesquelles sont nommées ou décrites, et sous quelles formes : exemplifiée ou décontextualisée, dans une formulation « naturelle » ou plus spécifique du langage mathématique.

J'ai considéré toute phrase ou texte qui puissent tenir lieu de « définition » d'une notion, dans un sens très large : un énoncé donnant son « nom » ou lui associant un symbole, un texte présentant une propriété de la notion, un discours « méta » sur la notion, etc. Cette étude n'est pas du tout exhaustive[9], elle a été faite sur les manuels de Lycée de trois collections (Déclic, Math'*x* et Repères), et pour les trois niveaux (Seconde, Première S, Terminale S). Son objectif est d'analyser, en s'appuyant sur ces exem-

7 Pour établir que A $\Rightarrow$ B est vraie, on va supposer que A est vraie et en *déduire* que B est vraie. Il y a donc une relation de cause à effet entre A et B. De plus, on va partir de A, donc A est considérée *avant* B.

8 Dans ces manuels, les définitions dans les chapitres sont toujours dans les pages de cours.

9 Dans sa thèse (en ligne), Mesnil a mené une étude exhaustive des manuels scolaires de Lycée.

ples, les conséquences de l'absence de « savoir de référence » et de l'interdiction de « faire un cours de Logique » sur les interprétations du savoir à enseigner et de son écriture.

Un premier constat est que, dans ces manuels, les définitions ont un vrai statut dans tous les chapitres des thèmes Fonctions, Géométrie, Statistiques et Probabilités, elles sont même parfois assez « formelles » et complexes dans ce dernier thème. Elles sont intitulées comme telles et présentes, parfois nombreuses dans un même chapitre, suivies de propriétés et de théorèmes. Ce qui semble indiquer que leur rôle et leur intérêt sont reconnus par les auteurs.

On ne trouve rien de ce genre pour les notions de Logique. Les manuels qui donnent quelques « définitions » se sont interdits de les désigner ainsi, et certains d'entre eux proposent des énoncés flous, incomplets, voire incorrects. Les auteurs de manuels ont donc interprété l'interdiction ministérielle de faire un cours de logique de manière très stricte. D'autre part, l'absence d'énoncés intitulés « définition »[10] dans le thème Logique révèle une conception générale de la définition comme élément d'un cours[11].

Comme il n'y a pas de chapitre sur la Logique, il s'en suit que ce thème est peu repérable dans les tables des matières, occupant parfois une seule ligne renvoyant à une ou plusieurs pages situées le plus souvent en fin de manuel. Il y a des exceptions, certains manuels ayant choisi d'insérer des pages présentant des notions de Logique réparties au fil des chapitres. Ces pages ne s'intitulent pas « cours », mais y ressemblent beaucoup.

Dans les index en fin d'ouvrage, il y a aussi de grandes différences, certains n'ayant répertorié *aucune* des notions de Logique au programme (Déclic 2nde, 1ère et TS), d'autres en ayant répertorié une partie plus ou moins exhaustive. Les trois manuels de la collection Math'x donnent dans leur index toutes les notions au programme. Dans le manuel de Seconde de cette collection, on trouve :

> Absurde (raisonnement), Contraposée - contraposition, Contre-exemple, Disjonction des cas, Équivaut à -Équivalentes, ET, Il existe, Il faut, Il suffit, Logique, Nécessaire (condition), Négation, Îou, Pour tout ..., Quantificateur, Quel que soit ..., Réciproque, Si … alors … (logique)[12], Si et seulement si, Suffisante (condition).

III.1 *Des définitions qui n'en sont pas … Quelques exemples*

La notion de *proposition*

Cette notion dans son acception logique est rarement explicitée, même dans un langage non formalisé. On trouve plutôt de nombreuses confusions entre les termes « phrase », « proposition », « événement », « propriété », « résultat », parfois dans la même phrase ou le même paragraphe. Cependant, le manuel Math'x Seconde donne cette définition : « Une proposition est une phrase (avec un verbe) qui peut être vraie ou fausse ». Cette formulation a le mérite d'être simple et de lier le statut de proposition d'une phrase à sa vérité. Une formulation plus précise est possible : « Une proposition est une phrase dont on peut décider si elle est vraie ou fausse ». Les quatre exemples qui suivent dans ce manuel couvrent différents cas : proposition vraie, proposition fausse, vraie ou fausse

10 On ne trouve pas non plus de propriétés désignées ainsi.

11 Un point de vue plus ouvert a été étudié dans la thèse de Ouvrier-Buffet (2004), qui serait intéressant ici, car il permettrait de faire se rejoindre deux objectifs des programmes du Secondaire : enseigner la démarche de recherche ou d'investigation et montrer l'intérêt et la nécessité des définitions.

12 Distingué, dans cet index, du « Si...Alors...Sinon (algorithmique) »

selon le contexte, et il est précisé (sans le nommer) le principe de non-contradiction : « mais elle ne peut être à la fois vraie et fausse ».

Dans la collection Déclic, il faut attendre le manuel de TS (2012) pour trouver une « convention » : « Les énoncés mathématiques vrais et les énoncés mathématiques faux et uniquement ces énoncés sont appelés propositions. »

Les connecteurs ET, OU, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

Là encore, les manuels font des choix très différents dans la présentation et la formulation de ces notions. Pour illustrer cela, j'ai choisi deux exemples.

Exemple 1

Dans le manuel Déclic Seconde 2010, la partie « symboles, vocabulaire » intitulée « un peu de logique » (p. 329) est identique dans les deux éditions 2010 et 2014 et aussi dans le manuel de 1ère S de la même collection 2011, intitulé simplement « Logique » (p 383). Ce paragraphe représentait la *totalité* des pages sur le thème Logique dans l'édition de 2010 (2nde) et 2011 (1ère S). En voici (ci-dessous) une copie complète.

Le terme « proposition » n'est pas défini. L'équivalence est la première notion évoquée, alors que l'implication n'a pas été présentée auparavant. Elle est introduite par son symbole formel et ses deux formulations en langage courant. Le texte dit où la « placer », mais ne dit pas son statut (connecteur), ni qu'elle donne une nouvelle proposition. De fait, cette présentation ne peut tenir lieu ni de définition même « basique », ni d'outil de raisonnement. La phrase qui suit évoque la « signification » du symbole $\Leftrightarrow$, ou plutôt ses valeurs de vérité.

Les présentations de ET et OU ne sont pas conformes aux notions de Logique qu'elles évoquent. Elles sont très proches des « et » et « ou » du langage courant. De plus, ET et OU sont des connecteurs que l'on peut mettre entre propositions quelles que soient les valeurs de vérité de celles-ci. Ce n'est pas ce qui est écrit dans le manuel, qui semble dire que ET et OU

Un peu de logique

Symbole, vocabulaire	Exemples
$\Leftrightarrow$ équivaut à, si et seulement si, à placer entre deux propositions. Cela signifie que celles-ci sont simultanément vraies (ou encore simultanément fausses).	• ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$. • Les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
« **et** » entre deux propositions, deux événements : les deux propositions doivent être simultanément vraies ; les événements réalisés tous deux.	• « $x \geqslant -5$ **et** $x \leqslant 1$ » signifie : « $x \in [-5\,;+\infty[\,\cap\,]-\infty\,;1]$ », soit « $-5 \leqslant x \leqslant 1$ ». • Lors du tirage d'une carte dans un jeu de 32, « obtenir un roi » **et** « obtenir un pique » signifie « obtenir le roi de pique ».
« **ou** » entre deux propositions, deux événements : au moins l'un(e) des propositions, des événements (et peut-être les deux) doit être vraie (réalisé).	• « $x \in [-1\,;2]$ **ou** $x \in\,]0\,;3]$ » signifie : « $x \in [-1\,;2] \cup\,]0\,;3]$ », soit « $x \in [-1\,;3]$ ». • Lors d'un lancer d'un dé, « obtenir un multiple de 3 » **ou** « obtenir un numéro supérieur à 4 » signifie « obtenir l'un des numéros suivants : 3, 4, 5, 6 ».

n'ont de sens que dans certains cas, en fonction des valeurs de vérité des deux propositions : un seul cas pour le ET et trois cas pour le OU. Enfin, il n'est pas dit que ces connecteurs donnent une nouvelle proposition, mais seulement qu'on les « place entre deux propositions ».

De plus, tous les exemples donnés illustrent des cas où les propositions obtenues par ces connecteurs sont vraies, tout en ne disant pas qu'elles sont vraies (ceci est implicite). Enfin, comme *proposition* et *événement* ne sont pas différenciés, des confusions sont possibles.

Dans le manuel de Seconde de 2014 de cette collection (p. 350), la « définition » de proposition conditionnelle qui est proposée est exemplaire de la variabilité des termes pour désigner une proposition (c'est nous qui les soulignons) :

> « Une *proposition* conditionnelle ou une implication est une *propriété* de la forme suivante : « Si la *phrase* P1 est vraie, alors la *phrase* P2 est vraie ».

Les auteurs semblent utiliser indifféremment les termes « proposition », « propriété », « phrase ».

Enfin l'absence des quantificateurs dans de nombreux exemples de ce manuel aboutit à des écritures incorrectes. Ainsi, l'exemple pour la réciproque d'une implication (p. 350) : il est affirmé que la proposition « Si deux élèves de seconde sont dans le même Lycée alors ils sont dans la même classe » est fausse. Sauf que, sans quantificateurs, on ne peut « logiquement » pas conclure. Bien sûr, la quantification est implicitement universelle, mais comme on est sur la seule fiche Logique (une demi page !) du manuel, cet implicite est très dommageable — à moins que cet exemple serve de base à un débat en classe sur l'interprétation d'une telle phrase.

Encore à propos de l'équivalence, on peut se demander ce qui justifie le choix du terme « interchangeable » utilisé dans Déclic TS à la place de « équivalent ». De même, on trouve l'expression « phrases logiques synonymes » dans Déclic 2nde (p. 276). Ces termes sont-ils supposés être plus accessibles aux élèves ? Mais sont-ils opérationnels ? Il nous semble qu'il y a ici une occasion ratée de désigner la notion logique sous-jacente.

Exemple 2. Une présentation raisonnable [13]

Les auteurs du manuel math'*x* Seconde ont fait le choix de consacrer quatre pages entières au thème « Raisonnement logique », regroupées à la fin de l'ouvrage, avec une visible attention au langage et au sens dans les descriptions des notions. Voir par exemple (page suivante) l'extrait qui définit les connecteurs logiques ET et OU (p. 351).

Les spécificités des connecteurs ET et OU par rapport aux conjonctions du langage courant sont illustrées et désignées clairement. Des notations sont suggérées pour les distinguer — « et » et « ou » pour le langage courant et ET et OU pour les connecteurs logiques. Et il est dit que A ET B, comme A OU B peuvent être vraies ou fausses (il n'est pas dit que ce sont de nouvelles propositions). Enfin, ET et OU sont associés à la réunion et à l'intersection d'ensembles.

Proposition conditionnelle ou implication. Autres exemples

La plupart des manuels « définissent » l'implication $A \Rightarrow B$ dans le seul cas où les deux propositions sont vraies, même quand il est évoqué qu'elle peut être fausse. Exemple [14] :

13 math'*x*, seconde 2010, p. 351 à 354

14 J'ai reproduit tels quels les caractères en gras et italique du manuel)

3 « ET », « OU » en mathématiques

Dans le langage courant :

- « **et** » est employé avec différentes significations (« et en plus » : 1 cahier et un stylo et…, « et puis » : je finis mon travail et je viens te voir, « à la fois » : une mer chaude et calme).
- « **ou** » est aussi employé avec différentes significations, mais le plus souvent, il sert à désigner deux possibilités qui s'excluent l'une l'autre (« fromage ou dessert » sur un menu ne permet pas de prendre les deux !).

En mathématiques, « **OU** » et « **ET** » ont des significations très précises !

« *A* ET *B* » est vraie quand *A* et *B* sont toutes les deux vraies et uniquement dans ce cas.

« *A* OU *B* » est vraie quand au moins l'une des deux est vraie (l'une ou l'autre, voire les deux)

Du point de vue des **ensembles** (page 350) :

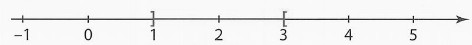
- ET est associé à l'intersection :
  « $x \in \mathrm{I}$ ET $x \in \mathrm{J}$ » signifie « $x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ ».
- OU est associé à la réunion :
  « $x \in \mathrm{I}$ OU $x \in \mathrm{J}$ » signifie « $x \in \mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ ».

La négation de « *A* OU *B* » est « négation de *A* ET négation de *B* ».

La négation de « *A* ET *B* » est « négation de *A* OU négation de *B* ».

Exemples

- Les moteurs de recherche utilisent le ET et le OU logique.
  Si on recherche un livre sur un catalogue électronique d'une bibliothèque, en tapant dans le champ « auteur » : « George OU Boole » on obtient la liste de tous les ouvrages écrits par des auteurs dont le nom contient George ainsi que ceux dont le nom contient Boole. Parmi eux figurent bien sûr ceux dont le nom contient George Boole.
  La même requête avec « George ET Boole » n'aurait renvoyé que les livres écrits par George Boole.
- La *proposition A* : « $x < 3$ ET $x > 1$ » signifie « $1 < x < 3$ ».
  Elle est vraie pour tous les nombres x appartenant à $]1\,;3[$, fausse pour les autres.
  La **négation de** « $x < 3$ ET $x > 1$ » est donc : « $x \geqslant 3$ OU $x \leqslant 1$ ».



- « m est pair OU multiple de 3 » est vraie pour $m = 4$ (4 est pair, non multiple de 3), vraie pour $m = 9$ (9 est multiple de 3 mais pas pair) et vraie pour $m = 12$ (12 est pair et aussi multiple de 3) .
  La proposition est fausse pour $m = 5$ (ni pair ni multiple de 3).
  La **négation de** « m est pair OU multiple de 3 » est « m n'est pas pair ET n'est pas multiple de 3 ».

« Implication

La proposition A $\Rightarrow$ B est une **implication**. Elle signifie que **si** A est vraie **alors** B est vraie. On l'écrit souvent sous la forme « **Si A, alors B** ».

A représente les **hypothèses**, B la **conclusion** et le symbole $\Rightarrow$ signifie ***entraîne, implique***.

Une implication peut être vraie ou fausse. » (Repères, TS, p. 62)

Nous avons vu précédemment (cf. les difficultés des étudiants sur cette notion) pourquoi ce type de « définition » ne suffit pas pour que la notion soit opérationnelle. Dans la collection math'x, dans les quatre pages de logique du manuel de Seconde, le terme « proposition » défini au tout début, est utilisé de manière systématique. Pour l'implication, la présentation est très brève (p. 352).

« Proposition conditionnelle (ou implication)

Une proposition conditionnelle est une phrase du type « si proposition *A* alors proposition *B* ».

Une proposition conditionnelle peut être vraie ou fausse ».

Rien n'est dit dans cette présentation sur les relations entre les valeurs de vérité de *A* et *B* et celles de l'implication. Il est aussi écrit un peu plus loin qu'une proposition conditionnelle et sa réciproque « peuvent être vraies ou fausses indépendamment l'une de l'autre » (p. 352), mais sans plus de précisions. Plus généralement, les valeurs de vérité de la proposition réciproque, de la négation d'une proposition, de la contraposée son données sur des exemples.

IV. — Formulations diverses du principe de récurrence

IV.1 *Conceptions d'étudiants sur ce principe*

Les conceptions erronées durables et répandues des étudiants de Licence de Maths sur la récurrence et les maladresses fréquentes des écritures de l'énoncé du « principe de récurrence » dans les manuels ou les pratiques de classe m'interpellent depuis de nombreuses années. On peut trouver les résultats de l'étude que j'ai menée sur ce concept dans Grenier (2001, 2003, 2012). Dans Grenier 2012, nous avons décrit les conséquences des formulations approximatives du principe de récurrence « classique » dans les manuels de Lycée et d'université. Rappelons son écriture sous sa forme classique, les notions de Logique sont notées ici en gras :

> **SI il existe** $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie **ET**
>
> **pour tout** $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie,
>
> **ALORS pour tout** $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Cette formulation est complexe, car elle contient une proposition conditionnelle sous la forme SI … ALORS … , la prémisse étant elle-même une proposition composée de deux propositions reliées avec le connecteur ET — l'une existentielle et l'autre universelle —, la conclusion étant une proposition universelle. Cette écriture fait donc intervenir des connecteurs et des quantificateurs emboîtés. Elle fournit une occasion pour revenir à la définition des connecteurs de Logique. Le risque d'une compréhension erronée du principe de récurrence est réel, les nombreux tests sur ce sujet que j'ai proposés aux étudiants de L3 Maths depuis plus de dix ans — et les débats qui ont suivi — attestent des conséquences de ces flous sur leurs conceptions. En voici quelques-unes (déjà citées dans Grenier 2012) :

— Il faut absolument commencer par véri fier l'initialisation ($P(n_0)$ vraie), de plus n_0 vaut 0 ou 1, sinon il est donné.

— Le principe de récurrence sert à prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie à partir d'un certain rang, et ne s'applique que pour une propriété dont on sait déjà qu'elle est vraie.

— Comme on suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque, c'est normal qu'on trouve que c'est vrai pour tout n.

— Une preuve par récurrence ne construit rien puisque la propriété P à prouver est donnée comme vraie au départ.

Pour ces étudiants, l'hérédité n'a de sens et ne peut être vraie que si $P(n)$ est vraie, en relation avec la conviction que le rang initial du principe de récurrence est confondu avec celui de l'hérédité. À la question : « pour quelles valeurs de n, $P(n)$: « $10^n + 1$ est divisible par 9 » est-elle héréditaire ?», il y a un refus des étudiants à s'attaquer à la preuve, parce qu'ils savent que $P(n)$ est fausse :

— c'est un piège, on sait que c'est faux.

— si $P(n)$ est fausse, elle ne peut pas être héréditaire.

— vous avez fait une erreur, c'est $10^n - 1$, pas $10^n + 1$. (!!)

On constate aussi des doutes fréquents sur le principe comme outil de preuve :

La récurrence n'est pas une méthode de démonstration car on suppose la propriété au rang n quelconque et on calcule au rang $n + 1$ en utilisant la supposition.

Ces incompréhensions sont répandues, même chez quelques enseignants de mathématiques. Ces constats nombreux sont des arguments pour affirmer qu'on ne peut pas, pour la compréhension de ce principe, faire l'économie de la formalisation de tous les connecteurs et quantificateurs qui l'établissent, et des notions de Logique sous-jacentes.

IV.2 *Formulations dans des ouvrages*

On peut supposer que c'est la complexité de ce principe, qui amène les auteurs de manuels de Lycée et même d'ouvrages universitaires à des écritures simplifiées, ne contenant pour certaines ni quantificateur, ni implication (!), où l'hérédité est écrite en deux « étapes », sur deux lignes différentes : le résultat donnant des expressions du principe de récurrence dénuées de sens et non opérationnelles – voire fausses. En voici un exemple (cité dans Grenier 2012) [15] :

Cet exemple est caractéristique d'une grande partie des « erreurs » d'écriture du principe de récurrence que l'on peut trouver dans les manuels d'enseignement :

— le SI de la proposition conditionnelle globale n'est pas explicité, il ne reste que le ALORS (qui parfois lui aussi n'est pas explicité) ;

— l'implication décrivant l'hérédité de P(n) est cachée : le Si est absent, et elle est écrite sur deux lignes différentes, parfois présentées dans certains manuels comme deux « étapes » du principe ;

— aucun quantificateur n'est explicité (même l'existence du n_0 est affirmée) ;

— l'initialisation est en $n_0 = 0$, (ce qui est vrai sur l'exemple convoqué).

Dans d'autres manuels, la quantification universelle de l'hérédité est déguisée dans des expressions floues, telles que « on suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque », ou « pour *un certain n* », ou en changeant le nom de la variable n en p (« on suppose qu'elle est vraie au rang p ») – dans l'intention de distinguer l'élément sur lequel on va étudier l'implication de

1.3.4 Raisonnement par récurrence

Une propriété qui dépend de l'entier n peut être démontrée à l'aide du raisonnement par récurrence. Par exemple, pour prouver que :

$$P(n): 1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad .$$

On peut utiliser ce type de preuve de la manière suivante :

on **prouve** que $P(0)$ est vraie ;
on **suppose** que $P(n)$ est vraie ;
on **prouve** qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété est vraie pour tous les entiers.

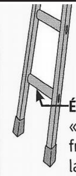
15 *Collection Vauthier 2006 réforme LMD L1 et L2. Dans le volume de cours, 61.3.4, page 20.*

Au début du XX[e] siècle, le mathématicien *Giuseppe* **Peano** présente notamment l'axiome de récurrence dans sa construction des entiers naturels...

axiome de récurrence

Soit P(n) une propriété dépendant de l'entier naturel n.
On suppose que l'on a les deux assertions suivantes :
- P(0) est vraie (*initialisation*) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, **P(n) vraie** implique **P$(n+1)$ vraie** (*hérédité*).

Alors P(n) est vraie pour tout entier naturel n.



Remarque : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On a une variante de ce raisonnement :
Si « P(n_0) est vraie » **et** « pour tout $n \geqslant n_0$, **P(n) vraie** implique **P$(n+1)$ vraie** »,
alors P(n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

la variable générale. Aucune de ces écritures ne rend compte que l'hérédité est une implication quantifiée universellement et qui peut être vraie même si la prémisse est fausse. On trouve même des commentaires qui pourraient laisser croire que cette quantification n'est justement pas … universelle ! Comme cette précision dans un encart en marge du manuel Déclic TS 2011, page 17, intitulé « Bon à savoir » (les mots en gras sont ceux du manuel) :

> 1. Bien repérer ou écrire la propriété P(n) indexée par l'entier n. Ici, P(n) est écrite entre guillemets, car c'est une égalité qui reste à démontrer. À ce stade, on ignore si elle est vraie.
>
> 2. **Attention : lorsqu'on écrit l'hypothèse de récurrence, il faut bien considérer *P*(n) vraie pour un entier n, et pas pour tout entier n. Sinon, on admet la propriété qu'il faut démontrer !**

La remarque 1 (on ne sait pas encore si P(n) est vraie) est intéressante à double titre : d'une part, le principe de récurrence permet l'étude d'une conjecture sur P(n) (ce n'est pas seulement une technique de vérification) et d'autre part, la recherche potentielle d'une hérédité va nous donner des informations sur sa vérité. En revanche, la remarque 2 pose question : elle décrit une technique relevant du raisonnement déductif qui risque de masquer (voire de faire conflit avec) l'hérédité comme implication quantifiée universellement. Même si, bien sûr, il est justifié de considérer un n générique pour établir la vérité de l'implication.

Le manuel Repères TS 2012 (reproduit ci-dessus) se distingue sur cette notion, par une présentation claire du principe de récurrence, proposée de deux manières différentes (page 10, cours du chapitre « suites et limites »). Le quantificateur « pour tout » est présent dans l'hérédité, et en plus, la formulation donnée en remarque met bien en évidence les deux implications « Si.. alors » et « implique », et le connecteur « et ». Cette présentation nous semble parfaite !

V. — Formulations du raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde, ou la démonstration par l'absurde, sont donnés dès la Seconde. Dans le manuel Maths Repères Seconde, il est présenté ainsi :

> Principe du « raisonnement par l'absurde » pour démontrer que si A est vraie alors B est vraie.
>
> « 1. On suppose à la fois que les hypothèses A sont vérifiées et que la proposition B est fausse.
>
> 2. On utilise les propriétés, définitions et théorèmes dont on dispose pour aboutir, au bout d'une chaîne

logique, à une nouvelle proposition C qui est absurde ou contradictoire avec nos hypothèses A.

3. Cette contradiction nous permet de conclure que la proposition B est nécessairement vraie. »

Dans cette description, on peut lire « hypothèses vérifiées » au lieu de « proposition A vraie », « à la fois » au lieu de ET. De plus, la contradiction annoncée en 2 ne concerne pas seulement « les hypothèses A », mais aussi l'hypothèse que B est fausse, on pourrait donc aboutir à « B vraie » ; enfin, la justification de la conclusion (point 3) n'est pas donnée.

Dans le manuel de TS de cette même collection (Repères TS 2012, p. 547) le raisonnement par l'absurde est décrit avec les expressions « contraire d'une propriété » et « proposition contraire » — pour dire la négation d'une proposition. Les termes « vrai », « faux » présents dans le manuel de Seconde ont disparu.

Le manuel Math'*x* Seconde ne propose que deux lignes pour décrire ce qu'est un raisonnement par l'absurde (p. 354), qui décrivent davantage le sens de cette preuve que sa structure.

« Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on montre qu'elle ne peut pas être fausse. On suppose donc que sa négation est vraie et on montre que c'est impossible. »

Dans le manuel Math'*x* TS (2012, p.470), la phrase est encore plus courte, la valeur « vraie » de la négation est devenue implicite :

« Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on montre qu'elle ne peut pas être fausse. On suppose donc sa négation et on montre que c'est impossible ! »

La présentation du raisonnement par l'absurde dans Déclic Seconde tient elle aussi en deux lignes (p. 350, Fiche Logique, paragraphe « Quelques outils pour raisonner ») :

« Le raisonnement par l'absurde : on suppose que la conclusion attendue est fausse ; si on arrive à un résultat absurde (faux) on peut en déduire que la conclusion attendue est vraie ».

De quelle « conclusion » s'agit-il ? Il n'est pas clair que les termes « conclusion » et « résultat » désignent des propositions et cette description est inutilisable. Cependant, dans le manuel de TS de cette même collection, dans un paragraphe intitulé « Démontrer une implication $p \Rightarrow q$ »[16] (p. 607), la formulation de ce raisonnement est plus précise et utilise des termes de la Logique :

« Par l'absurde » : Au lieu de prouver $p \Rightarrow q$, on peut prouver que la conjonction p et non q conduit à une contradiction. »

Cependant, aucune justification de cet énoncé n'est donnée dans le manuel.

On voit bien encore ici les effets — à notre avis néfastes — de l'absence d'un « savoir de référence », qui fixerait au minimum un vocabulaire et une syntaxe compatibles avec ceux de la Logique. Les variantes dans une même collection, d'un niveau à l'autre, révèlent les difficultés des auteurs de ces manuels à décrire ce type de raisonnement. La plupart des pseudo-définitions qui en résultent sont inutilisables, car leurs formulations sont données dans un langage trop approximatif, non contrôlé par celui de la Logique, et parfois très loin de celui-ci. Une des conséquences est qu'il est impossible de s'appuyer sur ces « définitions » pour construire une preuve par l'absurde ou valider un raisonnement de ce type.

Un autre effet est le flou dans les écritures ou symbolisations. Ainsi, sur l'implication, on trouve dans les manuels des symboles non con-

16 Ici encore, est implicite que ce que l'on va démontrer est que p $\Rightarrow$ q ***est vraie***.

ventionnels pour l'implication ou l'équivalence, tels que $\Leftarrow$ (implication écrite dans l'autre sens) ou ~ (pour l'équivalence), sans que ceux-ci soient expliqués ; ou encore le terme «interchangeables » pour dire qu'une implication et sa réciproque sont équivalentes : est-ce vraiment plus compréhensible ?

Conclusion de l'étude

Si l'on est convaincu qu'il faut un minimum d'éléments de Logique pour raisonner, formuler et valider en mathématiques, se pose la question de savoir comment les introduire. Notre étude (que nous savons partielle) avait pour objectif d'apporter quelques éléments de réflexion pour une approche raisonnable de la Logique mathématique au Lycée. Nous donnons dans ce qui suit des pistes en ce sens.

Cette étude montre que sans un « savoir de référence » officiel, il est difficile de se mettre d'accord sur un langage et sur le niveau de formalisation des définitions de ces notions. Les critères pour ce « savoir de référence » sont que les notions soient compréhensibles, prennent du sens et soient opérationnelles, tout cela étant évidemment lié. Les propositions qui suivent sont issues, outre de l'analyse des programmes et des manuels, de réflexions menées depuis de nombreuses années dans le cadre de stages de formation continue d'enseignants [17], ainsi que des travaux du groupe « Logique » de la Commission Inter Irem Lycée [18].

Introduire les notions de Logique comme objets, avant de les utiliser, nous semble raisonnable, car elles ne sont pas naturelles. Leur utilisation « au fil des chapitres » en résolution de problème prendra plus de sens si elles ont été étudiées avant, pour elles-mêmes, sur des exemples mettant en jeu des notions mathématiques simples ou déjà étudiées en classe. Le langage pour les définir peut être accessible tout en étant précis. Autrement dit, il faut, à certains moments, s'autoriser à sortir des « chapitres ». Signalons que quelques exemples du document Ressources pour la classe de Seconde (2008) vont dans ce sens.

Les analyses des programmes et de manuels ont montré que le flou et l'instabilité de certains termes ou expressions désignant les notions de Logique rendent leur compréhension difficile. En l'absence de « vraies définitions », il est nécessaire de porter attention aux formulations de ces notions pour qu'elles soient opérationnelles.

Il faut tout d'abord distinguer *propriété (d'objets), proposition et événement*. Rappelons qu'un événement est, selon le contexte, un fait (en histoire), ou le résultat d'une expérience aléatoire (en statistiques), ou encore une occurrence d'information (en informatique), etc.. Ce ne sont pas des propositions au sens de la Logique. Une propriété est, quant-à-elle, une caractéristique que l'on peut attribuer à un objet. Par exemple, dans l'ensemble Q des quadrilatères du plan, « avoir deux angles droits » est une propriété qui caractérise un sous-ensemble de Q.

Une propriété n'est pas une proposition (au sens de la Logique), mais elle permet de construire des propositions. Ainsi, « tout quadrilatère qui a deux angles droits est un rectangle » est une proposition (fausse). Cette proposition est vraie sur le sous-ensemble des parallélogrammes. Il convient aussi de ne pas entretenir la confusion entre une *proposition* et un *ensemble* (qui n'est pas une proposition !), et donc distinguer les écritures de la *négation d'une propo-*

17 Un document rassemblant le contenu des stages « Logique et raisonnement » du P.A.F. de l'académie de Grenoble assurés par notre groupe de formateurs IREM est en ligne sur le site de l'IREM de Grenoble www-irem.ujf-grenoble.fr
18 On peut trouver des informations sur ces travaux et les membres de ce groupe sur le portail des IREM . http://www.univ-irem.fr

sition («NON A») et du *complémentaire d'un ensemble* ($\overline{A}$). Enfin, dire qu'« une proposition est une phrase dont on peut décider si elle est vraie ou fausse » est plus qu'une « remarque » (comme la présentent certains manuels), c'est une définition de la notion de proposition en mathématiques. Des exercices simples, consistant à reconnaître dans une liste de phrases celles qui sont des propositions (ou non), telles « 3 est un nombre pair » ou encore « *n* est un nombre impair », permettent de distinguer proposition, proposition fausse et proposition « ouverte ». Le travail de l'élève sur ces notions de Logique n'est pas perturbé par la notion de parité, qui est acquise.

Il nous semble que les connecteurs ET et OU sont faciles à caractériser relativement aux conjonctions correspondantes du langage courant. Pourquoi s'en priver ? Mais nous avons montré aussi pourquoi, de notre point de vue, les connecteurs logiques ET et OU n'ont pas de raison d'être étudiés dans des phrases qui ne sont pas mathématiques. Des questions telles que « la phrase « 3 est pair OU 4 est le carré de 2 » est-elle une proposition, est-elle vraie ou fausse ? », mettent l'accent sur les notions de Logique.

Un autre connecteur incontournable, car omniprésent en mathématique, est l'implication, qui fonctionne souvent – correctement – dans un sens proche de celui de la Logique naturelle, sous la forme du « Si … Alors », en particulier dans le raisonnement déductif. Nous avons montré l'insuffisance de cette conception de l'implication pour les raisonnements par l'absurde ou par récurrence, mais aussi pour étudier la réciproque ou la négation d'une implication. On voit donc que toute « définition » de l'implication devrait préciser que c'est une nouvelle proposition, et contenir la donnée de ses valeurs de vérité pour tous les cas possibles vrai-faux des deux propositions concernées. En effet, la phrase « A ⇒ B signifie que si A est vraie, alors B est vraie » — très souvent utilisée dans les manuels — ne définit pas l'implication au sens de la Logique, puisqu'on ne dit pas ce qui se passe dans les trois autres cas (A fausse, A vraie et B fausse). Et nous avons vu que certains raisonnements sont basés sur ces autres cas. Il convient donc de distinguer « A ⇒ B est vraie » de « A vraie ⇒ B vraie », qui est l'un seulement des trois cas où l'implication est vraie, et aussi et surtout de « A donc B » qui est l'instanciation de « A ⇒ B vraie », lorsque A est vraie, permettant de conclure que B est vraie (*modus ponens*).

La réciproque, comme la contraposée, d'une implication A ⇒ B ne sont pas définies seulement lorsque l'implication est vraie, elles peuvent donc être fausses, l'une comme l'autre. De plus, la valeur de vérité de la réciproque d'une implication est *indépendante* de celle de l'implication. Ces propriétés sont trop souvent implicites dans les manuels consultés.

L'équivalence d'une implication et de sa contraposée n'est pas une « remarque » (comme on le voit parfois écrit dans les manuels), mais un théorème important dont on se sert régulièrement. Or, ce théorème n'est pas difficile à démontrer.

Enfin, il n'est pas possible d'écrire correctement la négation d'une phrase qui contient des quantificateurs implicites, car on va devoir s'en servir pour écrire cette négation. C'est donc une bonne opportunité pour montrer la nécessité d'expliciter les quantifications, le domaine où on se situe, la forme et le type d'énoncé. Par exemple, on ne peut nier la phrase ouverte « $x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4$ » sans préciser dans quel ensemble de nombres on se place et si la quantification est universelle ou existentielle. Il y a là une occasion intéressante pour étudier les différentes interprétations que l'on peut en faire.

Références

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique*. *Thèse* de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

DURAND-GUERRIER V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Habilitation à diriger des recherches, soutenue le 16 juin 2005 à l'Université Claude Bernard Lyon 1.

FABERT C. (2010) L*e nouveau programme de logique de seconde*. Mémoire de master de Didactique des maths, Université Joseph Fourier Grenoble, en ligne : charlotte.fabert.free.fr.

FABERT C. & GRENIER D. (2011) Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de Logique. *Petit x,* 87, pp. 31-52.

GRENIER D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x*, 88, pp.27-47.

GRENIER D. (2008 *a*) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique, *Actes du colloque AMQ*, Sherbrooke, Québec, juin 2006.

GRENIER D. (2008 *b*) Expérimentation et preuve en mathématiques, in *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, PUF.

GRENIER D. (2003) The concept of « induction » in mathematics*, Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education*, vol. 3. ed. Gagatsis ; Nicosia Cyprus.

GRENIER D. (2001) Learning proof and modeling. Inventory of fixtures and new problems. *Proceedings of the 9th International Congress for Mathematics Education*, Tokyo, Août 2000.

GRENIER D. & Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 18.1, pp. 59-100, La Pensée Sauvage, Grenoble.

LAKATOS L. (1984). *Preuves et réfutations*. Traduction de N. Balacheff et J.-M. Laborde, Hermann, 2004.

MESNIL Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement*. Thèse de l'université Paris Diderot.

OUVRIER-BUFFET C. (2007). *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique*. Collection « Éducation et sciences » dirigée par Sylvette Maury. Éditions Fabert.

OUVRIER-BUFFET C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve – Étude épistémologique et enjeux didactiques*. Note de synthèse HDR. Université Paris Diderot (Paris 7).

Documents officiels

Bulletin officiel du collège n°6 du 28 août 2008, ministère de l'éducation nationale.

Bulletins officiels pour le Lycée : n°4 du 29 avril 2010 (Seconde), n°9 du 30 septembre 2010 (Première S), n08 du 13 octobre 2011du 28 août 2008 (Terminale S), ministère de l'éducation nationale.

Ressources pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème du collège « raisonnement et démonstration », ministère de l'éducation nationale, juin 2009.

Ressources pour la classe de seconde, ministère de l'éducation nationale, juin 2009.

Manuels

Collection Déclic mathématiques, Hachette éducation : Seconde 2010 et 2014, Première S 2011, Terminale S 2012

Collection math'*x*, Didier : Seconde 2010, Première S 2011, Terminale S 2012

Collection maths Repères, Hachette éducation : Seconde 2010, Première S 2011, Terminale S 2012

ANNEXE 1

Encadré du programme de Logique des trois années de Lycée
Notations et raisonnement mathématiques
(objectifs pour le Lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.
Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante »;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

ANNEXE 2

Organisation présentée dans le document « Ressources » Seconde

« Notations et raisonnement mathématiques »

Notions d'ensemble, sous-ensemble, appartenance, inclusion

- Explicitation des quantifications
- Implications et équivalences

dans le cadre des fonctions

- Condition nécessaire, condition suffisante
- Appartenance d'un point à une droite

en géométrie

- Réunion et intersection
- Négation

en statistiques et probabilités

Langage courant et langage mathématique

- Langage courant explicite et implicite
- Implication mathématique