DEFINIR : UNE NECESSITE A CONSTRUIRE. LE CAS DE LA DEFINITION DE LA LIMITE D'UNE FONCTION

Mise en œuvre d'une situation sous forme de « débat scientifique »

Thomas LECORRE[1]
Irem de Grenoble

Nous nous intéressons à l'enseignement de la notion de limite à la charnière lycée-université ; cette notion a déjà donné lieu à de nombreux travaux didactiques. Elle constitue, en effet, un moment clef dans l'enseignement/l'apprentissage des mathématiques à l'image de l'importance décisive qu'elle a représentée dans l'histoire des mathématiques : celui de l'entrée dans l'analyse formalisée. Nous étudions la question du formalisme lié à la définition de limite (quantification, spécificités de l'analyse) et aux obstacles épistémologiques que ce formalisme constitue manifestement. Nous nous interrogeons en particulier sur les moyens et stratégies disponibles afin de rendre ce formalisme intelligible pour l'élève. Dans notre problématique, la priorité consistera à lui faire prendre conscience de la nécessité de définir la notion de limite. Nous regarderons alors comment une situation didactique sous forme de « débat scientifique en classe »[2] tente de donner réalité à ce projet.

Précisons immédiatement la difficulté principale de la définition de limite qui nous intéresse ici : elle réside dans le fossé extra-ordinaire qui existe entre une première approche intuitive très accessible, quasi naturelle, celle qui se fonde sur des objets concrets (listes de nombres, graphes de fonctions,...), et un formalisme (en epsilon/alpha) qui peut apparaître initialement non seulement comme très abstrait

1 Professeur agrégé de mathématiques, lycée Elie Cartan de La Tour du Pin (38), membre de l'IREM de Grenoble, doctorant à l'université Joseph Fourier de Grenoble.
Remerciements à Isabelle Bloch et Marc Legrand pour leur relecture attentive et enrichissante de ce texte.

2 Nous utilisons dans ce texte le vocable « débat scientifique en classe » pour désigner le dispositif didactique que Marc Legrand a développé et qu'il décrit, par exemple, dans (Legrand, 1993). Par la suite nous n'utiliserons plus les guillemets.

mais surtout sans rapport avec la perception première de l'objet défini.

Il est effectivement assez naturel de se familiariser, dans un premier temps, avec les comportements asymptotiques, par exemple, des suites et des fonctions sous différentes formes. Le graphe d'une fonction avec matérialisation d'une asymptote ou pas, la pseudo-stabilisation ou pas d'une suite de nombres, sont les expériences sensibles simples qui vont être fédérées avec l'idée « ça se rapproche de, ça tend vers ». Cette première approche de la limite est fondamentale : elle installe la limite dans le champ des notions intuitives. Ce sera, par la suite très utile de pouvoir mobiliser ce rapport immédiat au concept. Mais évidemment cela reste insuffisant pour fabriquer des affirmations fondées dans le cadre de l'analyse : un formalisme est nécessaire. C'est alors qu'on introduit le epsilon et le alpha. L'un exprime la proximité avec la limite et l'autre la proximité de l'endroit où on regarde cette limite. L'un dépend évidemment de l'autre dans un rapport déterminé par une double quantification. Tout cela place le niveau de complexité engagé dans cette définition à un niveau assez élevé et surtout contribue au sentiment d'étrangeté avec le concept initialement rencontré sur des graphiques et des suites de nombres. Ce scénario, en tout cas cette temporalité, sont ceux qui sont préconisés, la plupart du temps, par les programmes successifs dans l'enseignement au lycée.

Remarquons que le sentiment d'étrangeté décrit précédemment n'est pas sans lien avec l'effort exceptionnel de conceptualisation dont les mathématiciens du XIXème siécle ont fait preuve pour construire ce formalisme. En effet, cette complexité n'est que l'aboutissement d'un travail qui a consisté à éprouver les différents moyens disponibles pour décrire l'idée de limite : c'est-à-dire à vérifier qu'ils permettaient (ou pas) à la fois de donner forme aux idées mais aussi de démontrer, sans contradiction, les résultats issus de la géométrie ou même de la physique, qu'on connaissait déjà à l'époque.

Une question se pose alors : comment un élève/étudiant, s'il est totalement hors de cette problématique (essayer de faire plus simple et se rendre justement compte que c'est trop simple), peut-il vraiment accepter/saisir la fonction et la nécessité de la sophistication de cet outil qui est la limite ? Comment peut-il concevoir cette problématique sans entrer lui-même en questionnement ? Et comment peut-il partager ces questions sans être conscient du cadre dans lequel elles se posent ? Par exemple, d'après Cécile Ouvrier Buffet [3] (Ouvrier-Buffet, 2003), un des obstacles aux situations de construction de définition est la pauvreté de la notion de définition pour les étudiants. Comment un élève/étudiant peut-il renoncer à voir la limite seulement sous l'aspect intuitif « tendre vers » s'il ne conçoit pas son activité mathématique comme la recherche de vérités mathématiques partageables par le raisonnement hypothético-déductif et s'il ne connaît pas le rôle spécifique de la définition dans cette recherche ? N'est-ce pas en partie ce cadre, recherche de ce type de vérité (démontrer) et les outils que la communauté se fabrique pour fonder ces vérités (la définition, la logique, la quantification...) qui donne sens et nécessité au questionnement qui justifie finalement l'emploi du epsilon/alpha ?

Il s'agit donc de faire entrer l'élève/l'étudiant dans une problématique de recherche de sens et de nécessité des savoirs. Nous verrons que la mise en œuvre d'une situation sous forme de débat scientifique en classe s'adapte

3 Cécile Ouvrier Buffet a étudié lors de sa thèse (2003) la notion de définition, et a cherché, entre autre, à déterminer les conditions épistémologiques et didactiques sous lesquelles on peut confier à l'élève une situation de construction de définition.

naturellement au cahier des charges que nous allons constituer.

Mais attardons-nous un instant sur un paradoxe lié à l'enseignement de la définition d'un objet en mathématique. La définition est souvent une première pierre dans une théorie. Par exemple, la définition de la limite en epsilon/alpha est un élément fondateur de la théorie de l'Analyse actuelle. La difficulté qu'on rencontre alors dans l'enseignement d'une telle définition dans une logique d'exposition, c'est-à-dire en proposant le savoir comme une suite de faits répondant à une logique interne, peut provenir du paradoxe suivant : avant l'exposition de la théorie [4], la définition, pour l'élève, ne peut pas avoir véritablement de sens puisque sa fonction est précisément d'énoncer cette théorie. Après l'installation de la théorie, il est difficile de mettre en question la forme de la définition pour donner sens à la définition choisie puisque celle-ci est à l'origine même de la théorie : imaginer faire autrement n'est plus véritablement réalisable !

Il est cependant possible d'éviter ce cercle vicieux et de sortir d'une logique d'exposition des savoirs en donnant une place significative à l'élève dans la construction du sens qu'il va attribuer au savoir. Il s'agit de confier une responsabilité intellectuelle à l'élève de manière à ce qu'il éprouve les contradictions et conflits qui apparaissent dès lors que l'on essaie de définir. Par exemple, les situations de constructions de définitions de Cécile Ouvrier-Buffet (Ouvrier-Buffet, 2003) ouvrent une piste pour permettre aux élèves un accès aux définitions qui en préservent le sens. Dans ces situations, où la construction de définitions est donnée à l'élève, « la dialectique entre la construction de concept et construction de définition est visible ». Cécile Ouvrier-Buffet constate que « ceci n'est possible que si l'activité s'inscrit dans une démarche scientifique ».

Au-delà des difficultés propres à l'enseignement des définitions, il existe des difficultés spécifiques à la notion de limite. Aline Robert met en évidence des modèles de la convergence d'une suite chez les étudiants en analysant leurs réponses à un questionnaire (Robert, 1982). Elle définit ainsi essentiellement trois types de modèles, avec des variantes : les modèles primitifs (modèle « stationnaire » : la limite est atteinte à partir d'un certain rang, le modèle « barrière » : la limite est indépassable, le modèle « monotone » : par exemple celui correspondant à une suite croissante majorée), le modèle « dynamique » caractérisé essentiellement par l'idée « de se rapprocher de » et enfin le modèle « statique » qui correspond aux formulations proches de la définition usuelle de convergence. Dans cette étude, Aline Robert montre la grande stabilité chez les étudiants de certains modèles, par exemple celui du modèle « dynamique ». Tout enseignant qui a eu affaire à cet enseignement peut constater que le « ça se rapproche de » sert très longtemps de référence à l'étudiant même si la définition formelle a été donnée. On peut le remarquer dans les formulations où les epsilon apparaissent motivés davantage par le contrat didactique (dans la mesure où la manière dont ils sont utilisés témoigne d'abord d'une profonde incompréhension de leur rôle spécifique) que de la mise en forme d'un raisonnement caractéristique de l'analyse. Ainsi Aline Robert montre que ce modè-

4 Nous entendrons ici le mot « théorie » au sens faible, c'est-à-dire un ensemble d'énoncés mathématiques qui s'organisent en cohérence, et non au sens fort comme, par exemple, celui qu'on donne à « la théorie de la mesure », où l'on suggère l'idée d'exhaustivité du domaine abordé. Nous utilisons le mot « théorie » et non « théorie locale » ou bien « micro-théorie » pour rendre compte de la nature du savoir dont nous voulons parler. Même limité, il relève, pour l'essentiel, des même exigences épistémologiques, pertinence, cohérence et validité, que celles d'une théorie.

le dynamique reste majoritaire jusqu'en 4ème année universitaire. D'autres études rendent compte d'autres difficultés associées à la notion de limite : la notion d'infini et la polysémie de « se rapprocher », la topologie de **R** et le lien avec la notion de limite, notion même de définition pour fabriquer la définition de la limite, interprétation de la multi-quantification…

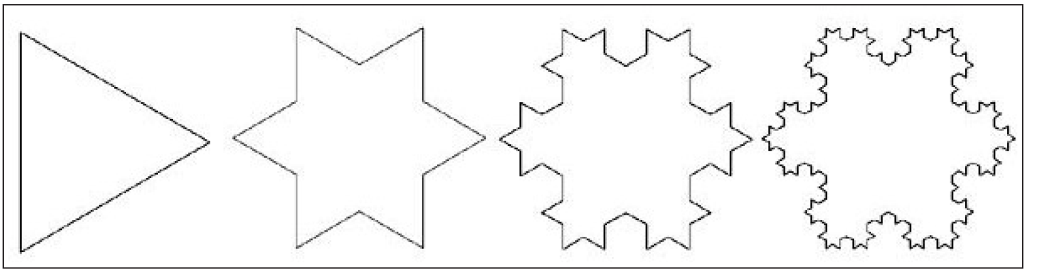
Précisons, ici, une difficulté particulière de la notion de limite qui, d'une certaine manière, condense notre problématique : la notion d'infini. La notion d'infini est facilement mobilisable en faisant appel aux notions intuitives issues de l'expérience et des connaissances. Par exemple, les dimensions de l'univers (même si celui-ci est éventuellement fini) donnent un aperçu de l'infini. L'idée d'éternité aussi donne une idée de l'infini, idée qui apparaît très bien avec le mot d'esprit habituellement attribué à Woody Allen : « L'éternité c'est long, surtout sur la fin ». Mais si l'infini a ainsi une forme de « matérialité », et peut donc permettre d'aborder un concept mathématique qui lui donne un rôle, cet infini-là ne répond pas aux canons de l'analyse actuelle[5]. Nous revenons donc à une difficulté liée à une problématique de formalisation (et de validation). À l'instar de la limite elle-même, si l'idée (d'infini ou de limite) est mobilisable pour entrer dans un problème où le concept (d'infini ou de limite) joue un rôle, puisque celle-ci est essentiellement intuitive et donc accessible, c'est le formalisme qui est efficient pour le résoudre. En effet, seul le formalisme est de nature à répondre aux problèmes mathématiques ainsi posés avec les méthodes démonstratives en vigueur. Nous verrons plus tard, dans une ingénierie que nous proposerons, comment cette difficulté incontournable est rencontrée dans les termes même de la rupture annoncée ici. Nous verrons alors que cette rupture peut être justement l'occasion d'un apprentissage : pour passer des convictions intuitives aux certitudes fondées, il y a nécessité de passer des idées au formalisme.

Isabelle Bloch (Bloch, 2000) a justement étudié cette difficulté de la question de l'infini et de la limite, en classe de première S, et résout cela en prenant appui sur une figure géométrique : le flocon de Von Koch. Cette figure géométrique est obtenue en appliquant un processus de construction itératif à un triangle équilatéral. À chaque étape de la construction, tout segment est remplacé par un ensemble de quatre nouveaux segments ayant chacun pour longueur le tiers du segment initial. Voici (figure page ci-contre) les quatre premières étapes de construction du flocon de Von Koch : on demande aux élèves de déterminer le périmètre P_n et l'aire A_n de la figure obtenue à l'étape n. Cela est obtenu simplement avec des suites géométriques et des sommes de suites géométriques.

Arrive la question centrale : « Que deviennent le périmètre et l'aire quand on a itéré le procédé « jusqu'à l'infini ? » ». Les élèves utilisent leur calculatrice pour faire des essais numériques à partir des expressions littérales obtenues initialement. Ensuite des conjectures sont émises, puis :

> « A l'issue de cette phase il apparaît bien que les élèves ne peuvent aller plus loin sans apport aidant à la validation : les critères de validation ne peuvent se dégager seuls d'une phase de recherche empirique. C'est donc à ce moment que le professeur doit prendre en charge l'introduction de savoirs, sous la forme du critère qui doit être mis en jeu : si je donne un nombre, aussi grand que je veux, est-ce que P_n peut dépasser ce nombre ? » (Bloch, 2000 p 279)

5 Il est intéressant de noter que cette approche intuitive de l'infini a initialement tenu un rôle dans l'histoire des mathématiques (les infiniment petits/grands) et qu'elle a ensuite constitué un obstacle pour fonder l'analyse formalisée, justement avec la formalisation de la limite.



La suite de la situation va conduire les élèves à valider/invalider leurs conjectures à partir des calculs sur des grands nombres qu'ils peuvent effectuer après un apport théorique sur le logarithme décimal. Ces calculs servent d'expériences décisives ; les élèves déterminent la valeur de *n* qui permet au périmètre de dépasser 10^{3637} (proposé par les élèves eux même) ; le professeur peut institutionnaliser la définition formelle de limite infinie. Un scénario analogue sera utilisé pour l'aire qui donnera lieu à la définition de limite finie.

Nous voyons ici que la force de la situation est de proposer un questionnement fortement contextualisé : on peut comprendre « physiquement » ce que signifie « jusqu'à l'infini » et ce que sont les grandeurs variables en jeu (périmètre et aire). On peut alors conjecturer puis chercher à valider et enfin s'approprier des critères de validation donnés par le professeur. Cette démarche pour fonder la formalisation de la limite comme rapport contravariant[6] des variables en jeu s'appuie donc sur une manipulation instanciée à vocation paradigmatique des variables dans l'exemple du flocon. Pour ce qui est de notre étude, nous verrons que nous adoptons une autre entrée (pour un objectif identique) : un questionnement interne à la théorie de l'Analyse.

Mais reprenons ici la démarche de Pierre Job[7] (Job, 2011). Il identifie le caractère lakatosien de la définition de limite en alpha/epsilon. Lakatos a montré, dans « Preuves et réfutations », comment une définition se construit, en mathématiques, dans une dialectique entre la fabrication d'un théorème et la fabrication de la « bonne » définition qui va permettre de le démontrer. Ainsi Pierre Job établit que la définition actuelle de limite s'est constituée historiquement dans une perspective de fondement démonstratif à l'analyse. Il s'ensuit pour Pierre Job qu'une situation didactique pour la limite doit donner un rôle central à ce caractère lakatosien pour rendre véritablement compte de la nature de la notion. Il fabrique donc une situation didactique qui utilise une telle dialectique de construction du concept/construction de la théorie. Cette situation doit déboucher sur la définition de limite usuelle de fonction. L'expérimentation réalisée montre la mise en œuvre effective du caractère lakatosien mais finalement tombe sur l'écueil, qu'il nommera obstacle, de la conception même de la définition des étudiants, écueil déjà signalé par Cécile Ouvrier-Buffet : les étudiants ne ressentent pas spontanément la nécessité de définir les objets, avec lesquels ils travaillent pourtant.

6 On dit que le rapport est co-variant quand une contrainte sur x fixe une contrainte sur f(x) et contra-variant quand il est inverse. La définition usuelle de limite en epsilon/alpha est contra-variante car c'est epsilon qui contraint alpha, en d'autres termes alpha est fonction de epsilon.

6 Pierre Job a étudié dans sa thèse (2011) certains aspects historiques de la définition de la limite et la possibilité de faire construire la définition de limite à des étudiants.

Nous partageons la problématique de Pierre Job : la motivation de l'étude de la définition de la limite doit, selon nous, être liée à la fonctionnalité même de cette définition. Il nous apparaît cependant, au vu des éléments précédents, qu'une situation adidactique de construction de définition fondée sur une dialectique définir/démontrer concentre simultanément trop de difficultés puisque à la fois définir et démontrer constituent chacun séparément des obstacles pour nos élèves/étudiants. Aussi choisissons-nous de ne pas dévoluer la construction de la définition de limite, mais « seulement » la construction par la classe de la nécessité d'avoir des critères objectifs qui permettent dans un premier temps de trancher sur l'existence ou non d'une limite lorsque la situation limite n'est pas triviale et cela en cohérence avec la double fonctionnalité même de cette définition : discriminer et démontrer. Pour la notion de limite, discriminer correspond à savoir si telle fonction a ou pas une limite, et démontrer correspond aux premiers pas dans l'analyse formalisée [8].

Une question se pose alors : quel dispositif mettre en œuvre pour que l'élève entre dans une problématique discriminer/démontrer qui ne semble, a priori, pas du tout naturelle pour lui, et qui devrait lui permettre de ressentir la nécessité d'une formalisation de la notion de limite et donner un sens à ce formalisme ?

Nous avons choisi le débat scientifique en classe décrit par Legrand (Legrand, 1993) pour répondre à ces indications. De quoi s'agit-il au juste, et en quoi cela permet-il de répondre à notre problème ? En quelques mots, il s'agit d'un dispositif didactique qui structure la classe sous forme d'une « mini communauté de recherche », en lui faisant adopter certaines de ses pratiques. L'objectif de ce dispositif est précisément d'introduire l'élève à « une problématique de recherche d'un sens partageable par l'explicitation des raisons » en organisant régulièrement des débats collectifs de pertinence et de vérité sur les objets mêmes des savoirs à l'étude. C'est donc un dispositif qui se fonde sur la possibilité de la mise en œuvre d'une certaine démarche scientifique collective des élèves pour leur permettre d'appréhender peu à peu la nature des questions du mathématicien et pouvoir ainsi ressentir la nécessité de la complexité de la façon dont ils formulent leurs réponses. Ces formulations canoniques, le professeur les institutionnalisera ensuite comme la façon la plus sûre, la plus économique et finalement — bien que de façon paradoxale — comme la plus simple de transmettre, sans risque de malentendu et d'erreur de fond, l'information que l'on souhaite partager. Mais voyons cela sur un exemple.

Dans l'exemple que nous proposons, l'expérimentation a lieu en décembre 2010 dans une classe de Terminale S qui a l'habitude depuis trois mois de pratiquer cette forme d'activité. Les programmes scolaires en vigueur à cette époque, en Première S (BO n°7 31 08 2000, 2000) ne donnaient qu'un aperçu intuitif de la notion de limite d'une fonction en étudiant des exemples numériques et pour la convergence d'une suite « Toute définition en epsilon et N est exclue. ». L'objectif visé dans cet extrait de la situation est de commencer à donner un sens au formalisme de la limite, en particulier à celui de voisinage de l'infini.

Le scénario consiste à proposer à la classe de statuer sur la conjecture :

C1 : « si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ alors $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel ».

8 Discriminer est bien une forme de démonstration, mais nous avons choisi de dissocier les deux car la fonction spécifique de discriminer nous paraît plus immédiatement mobilisable dans le cadre de la construction d'une situation didactique visant à faire ressentir la nécessité de définir.

La classe devrait rapidement déclarer fausse cette conjecture, le professeur demandera alors de la « réparer », c'est-à-dire de la modifier/compléter en gardant l'idée qu'elle contient, ici : « à partir d'hypothèses sur l'ordre des limites à l'infini des fonctions peut-on induire un certain ordre sur les valeurs prises par les fonctions à distance finie ? ». Cette demande de « réparation » devrait conduire les élèves à se questionner sur la manière de formaliser l'idée « être près de l'infini » i.e. de « voisinage de l'infini » dont ils ne disposent pas à ce stade.

Séance du 09 12 10

Introduction à la situation du professeur : on va étudier la notion de limite et on ne s'occupe, dans un premier temps, que des limites finies à l'infini.

Le professeur demande ce qu'on peut conjecturer sur f et g quand $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Aussitôt, Julien propose :

C1 : « si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ alors $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel ».

Un temps de réflexion est laissé puis un vote effectué :

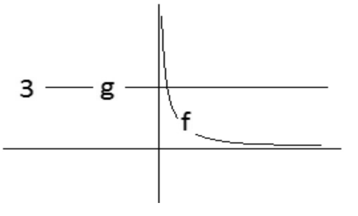
Vrai : 0 Faux : *Tout le monde* Autre : 0[9]

Kevin (Faux) : vient au tableau et propose un contre-exemple : « $f(x) = 1/x$, $g(x) = 3$; on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$, et donc on a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ mais $\lim\limits_{x \to 0 \text{ avec } x>0} f(x) = +\infty$ »

La classe ne semble pas accepter cela comme contre-exemple, un élève rajoute alors :

Thomas H (Faux) : « il faut un dessin »

Kevin (Faux) toujours au tableau dessine :



Raphaël (Faux) rajoute :

« $f(1/4) = 4$ et $g(1/4) = 3$ donc la conclusion est fausse »

Le professeur demande (comme à l'accoutumée dans un tel cas) de réparer la conjecture ; Antoine propose alors :

C2 : « si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ alors f est majorée par g en $+\infty$ ».

Un temps de réflexion est laissé puis un vote effectué :

Vrai : 11 Faux : 11 Autre : 18

Laëticia (Autre) : « Je pense que c'est vrai mais je n'ai pas de démonstration »

Aussitôt cinq autres élèves ayant voté Autre se déclarent dans la même situation.

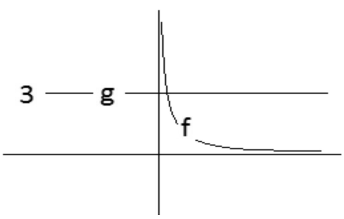
Raphaël (Autre) : « Que veut dire « f est majorée par g en $+\infty$? »

François (Vrai) : « Ça veut dire que quand x tend vers $+\infty$ alors g majore f, c'est-à-dire g est supérieure à f »

9 Cette possibilité de voter « Autre » se justifie par le fait que les élèves peuvent avoir de très bonnes raisons de vouloir voter ni vrai ni faux, raisons que nous verrons très bien apparaître dans cet exemple.

Guillaume (Vrai) : « Quand x= + ∞ $g > f$ donc f est majoré par g en + ∞ , la conjecture revient à dire que « si A alors A », c'est vrai mais pas très intéressant »

Mathieu B. (Faux) vient au tableau pour tracer un contre-exemple :



Guillaume (Vrai) aussitôt réagit : « C'est un exemple ! »

Nathalie (Faux) : « La définition de majorée, c'est pour tout x, et donc « majorée en + ∞ », ça n'existe pas ! »

Lydia (Autre) : « Comme l'a dit Guillaume, cette conjecture a une valeur épistémologique nulle, elle est vraie sans démonstration »

Un nouveau vote est effectué pour mesurer l'état de la classe :

Vrai : 2 Faux : 12 Autre : 22

Le professeur s'apprête à faire une institutionnalisation mais Lydia intervient :

Lydia (Autre) : « Il y en a qui pensent que c'est faux, donnez-moi un contre-exemple ! »

Aussitôt Mathieu (Faux) : « Il suffit de regarder le dessin de tout à l'heure »

Raphaël enchaîne : « Il faut définir « majorée en + ∞ »»

Fin du premier extrait de séance

Ce qu'on peut constater c'est que le débat semble déboucher effectivement au moins pour certains élèves sur un questionnement autour des formalismes utilisés ici comme allant de soi, Raphaël demandant de définir « majorée en + ∞ ». Mais quel est le ressort spécifique de cette situation ? Pour l'essentiel il nous semble que c'est le même que celui qui est décrit par Guy Brousseau [10] en proposant la notion de situation adidactique [11] : quand la dévolution d'une situation est réalisée, que le contrat didactique à l'œuvre le permet, et que le milieu est suffisamment riche pour provoquer les rétroactions prévues alors l'élève va se heurter assez naturellement aux obstacles épistémologiques qui sont présents dans la situation. Ce scénario débouche alors sur une institutionnalisation qui donnera le statut de savoir aux connaissances mises à jour.

Faisons remarquer qu'il y a cependant une spécificité propre à ce dispositif, c'est l'aspect collectif de la situation proposée qui, à l'instar d'une « vraie » communauté de recherche, lui confère une forme d'efficacité. Plus précisément, quand par exemple, Cécile Ouvrier-Buffet constate dans une expérimentation, à propos de la définition que :

> « les étudiants ne traitent pas simultanément ces deux fonctions (construction et reconnaissance). Pourtant, même si chaque situation ne mettait en jeu explicitement (dans l'énoncé de la tâche) qu'une seule de ces fonctions, nous pouvions nous attendre à ce

10 Guy Brousseau est un didacticien auteur de la théorie des situations didactiques. Un excellent article de Alain Kuzniac pour une introduction à cette théorie est paru dans le numéro 61 de Repère-IREM (p19 à 35).

11 Définition de Guy Brousseau pour situation adidactique : « Le maître se refuse à intervenir comme possesseur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation. »

que les étudiants les mobilisent dialectiquement, comme dans toute démarche scientifique. » (Ouvrier-Buffet, 2003 p265).

Elle évoque ici la difficulté pour un élève/étudiant d'entrer dans une démarche scientifique, et en particulier d'articuler différents points de vue. Dans le dispositif de débat scientifique en classe cette difficulté se trouve naturellement atténuée par le fait que justement les différents points de vue adoptés, si ils ont vocation à être finalement pris en compte par chaque élève, *n'ont pas, initialement, à être tenus par les mêmes personnes*. Ainsi on voit bien dans l'extrait précédent que la démarche scientifique adoptée est finalement davantage *le fait d'une communauté que celui exclusif des individus* qui la composent. Remarquons qu'ainsi le dispositif ne présuppose pas la présence d'une capacité individuelle à mobiliser une démarche scientifique, comme Cécile Ouvrier-Buffet l'aurait souhaité/attendu, mais présuppose, en revanche, une capacité du groupe classe à échanger sincèrement entre élèves tout en acceptant la contradiction. Cette capacité, comme celle de la démarche scientifique, n'est pas naturelle et est l'objet d'un apprentissage. Cela explique aussi pourquoi, pour cette classe habituée, il y a une forme de simplicité qui se dégage de l'échange direct observé, mais cela n'a en fait rien de naturel… c'est le résultat d'un travail important et de longue durée en amont sur d'autres sujets mathématiques.

En ce qui concerne la question de la définition et du formalisme, cette situation repose sur une autre spécificité : la « sous-détermination » du milieu. On entend par « sous-détermination » du milieu le fait que les éléments du milieu ne sont pas suffisamment définis pour qu'une quelconque conclusion partageable par la seule raison soit possible. En particulier, les élèves ici ne connaissent ni la définition de voisinage, ni celle de limite. Les seules rétro-actions possibles de la situation sont donc dues à la multiplicité présente dans la classe des conceptions des objets de pensée mis en jeu par l'exploitation du formalisme des symboles « infini » et « limite ». Cette multiplicité, quand elle sera exprimée, provoquera un conflit socio-cognitif : finalement de quoi est-on en train de discuter ? Cette « sous-détermination » n'est donc pas le fait de l'absence d'un savoir ou le fait de la limitation d'une connaissance, mais, en caricaturant, l'absence même, d'une certaine manière, des objets mis en jeu dans le milieu, en tout cas de leur définition. Cette spécificité est caractéristique d'une situation qui vise à produire la nécessité et la formalisation d'une définition.

Maintenant analysons le scénario qui semble permettre à cette « sous-détermination » de mener les élèves à la nécessité de définir. Il y a d'abord une conjecture grossièrement fausse mais qui contient une idée fondamentale (peut-être le « pressentiment » d'un théorème) : savoir quelque chose sur les limites de fonctions doit pouvoir permettre de dire quelque chose sur les fonctions. Un contre-exemple vient alors anéantir la conjecture… mais pas l'idée. En effet on s'aperçoit vite que le contre-exemple ne remet pas en cause l'idée, mais seulement le caractère trop général de sa formulation. Tout le débat qui s'ensuivra repose sur cette quête de tenter de formuler une idée prégnante qui résiste à être formulée. Cette résistance a essentiellement deux causes : évidemment la « sous-détermination » du milieu, les élèves ne disposent pas du formalisme qui pourrait leur permettre de conclure, mais aussi le cadre de recherche de vérités partageables par la raison dans lequel ils débattent et qui les empêche de considérer comme satisfaisantes (du point de vue de ce type de vérité) des formulations qui leur paraissent un tant soit peu ambiguës.

Regardons maintenant un autre exemple qui fonctionne suivant le même principe dans la suite de la même situation.

La première partie a donc fait apparaître le besoin de formaliser la notion de voisinage. Le professeur peut donc institutionnaliser les connaissances rencontrées lors du débat. Tout d'abord la notion local/global : la limite quand x tend vers l'infini est une information locale (« du côté de l'infini ») qui a peu de chance de pouvoir donner lieu à une information globale (l'ordre des fonctions sur **R**). Ensuite la difficulté fondamentale rencontrée lors de la discussion sur le « majoré en + infini » : si on peut avoir une idée de ce qu'est l'infini et en déduire des convictions, cette idée ne suffit pas pour construire des certitudes partageables comme le débat l'a révélé. En effet, en proposant « majorée en + infini », on ne sort pas du problème puisque soit on a l'impression de tourner en rond, soit on se demande ce que cela signifie. Il faut trouver une formulation qui permette d'éviter ces deux impasses, ce qui revient à formaliser l'idée « du local en l'infini ». C'est la notion de voisinage de l'infini que le mathématicien utilise pour traduire cela. Comme l'objectif ici n'était pas, in fine, de dévoluer cette formalisation à l'élève mais de faire prendre conscience de sa nécessité, le professeur propose donc la formulation du mathématicien sous la forme :

C3 : « si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ alors il existe un réel A tel que pour tout x réel avec $x >$ A on a $f(x) \leq g(x)$ ».

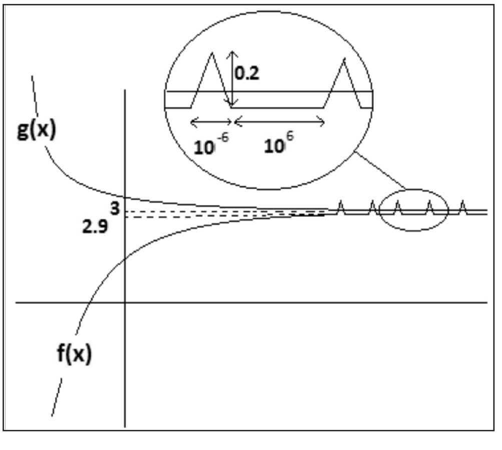
Un débat entre les élèves a alors lieu faisant apparaître les difficultés de déterminer ce A qui ne peut pas être défini par l'intersection des courbes de f et g comme il est initialement proposé. En effet, il apparaît dans la discussion que plusieurs intersections sont éventuellement possibles. La « dernière » intersection, proposée par certains, semble alors une piste prometteuse, mais à nouveau, est mise en doute par d'autres qui imaginent la possibilité d'une infinité d'intersections. Finalement, même si la détermination du A semble difficile, la grande majorité des élève (3/4) est convaincue par la vérité de C3, tandis que certains élèves plus sceptiques font remarquer que C3 n'est pas démontrée.

Cette discussion sur le nombre A nous semble capitale car c'est là un des nœuds/sauts épistémologique majeur qu'introduit la définition de la limite : faire appel à un nombre A qui est contraint par la situation mais non déterminée par elle . En réalité cette existence est le plus souvent prouvée par un calcul choisi par le sujet épistémique à partir de son analyse de la situation mais elle ne peut être calculée « mécaniquement » par un automate intelligent à partir de la situation comme les élèves ont été habitués depuis des années à le faire quand il s'est agi pour eux d'un coté de trouver les racines d'une équation et de l'autre de résoudre des inéquations : l'existence de ces racines est rarement un problème qui est dévolu aux élèves, pas plus que de saisir la liberté qu'offre un domaine de validité d'une équation non réduite à une, deux ou trois valeurs pour faire un choix pertinent de l'une d'entre elles ! C'est peut-être là une coutume pédagogique qu'il faudrait questionner car de ce fait le travail scientifique effectué par l'élève en algèbre ne le prépare pas du tout au nouveau travail scientifique qu'il va devoir apprendre à effectuer en analyse où il va lui falloir conjuguer le choix d'une majoration permettant d'effectuer un calcul d'inéquation lequel lui permettra ensuite de faire un choix particulier pertinent montrant par un simple calcul l'existence d'un A fortement contraint par la situation mais pour ainsi dire jamais déterminé par elle seule !

Le professeur propose alors l'étude d'un cas particulier sous forme d'une fonction qui pourrait s'avérer un contre-exemple de la conjecture C3 que la classe croit vraie. Le but, en utilisant toujours la « sous-détermination » du milieu, ici l'absence de définition de limite est, comme dans la situation précédente où l'on a été conduit à « définir » les voisinages de l'infini, de faire ressentir un nouveau manque dans la caractérisation du concept de limite et donc effectuer un second pas : aller vers la nécessité de définir le deuxième objet de la limite, le voisinage de cette limite ; le troisième pas (probablement le plus délicat pour l'élève) sera de voir pourquoi il est nécessaire de prévoir la façon dont on fera interagir de façon non symétrique ces deux voisinages !

Début du 2ème extrait de la séance :

Le professeur propose alors une situation aux élèves sous forme d'un graphique d'une fonction g qui a pour limite 3 (et qui « finit » même par être constante et égale à 3) et d'une fonction f que nous appellerons affectueusement « le monstre » pour une raison qui paraît évidente quand on rencontre cette fonction :



Rappel de la conjecture C3 :

« si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ alors il existe un réel A tel que pour tout x réel avec $x > A$ on a $f(x) \leq g(x)$ »

Le professeur demande alors « Est-ce un exemple, un contre-exemple ou un hors-sujet [12] pour C3 ?

Un temps de réflexion est laissé puis un vote effectué :

Exemple : 0 Contre-Exemple :

5 Hors-Sujet : 26 Autre : 5

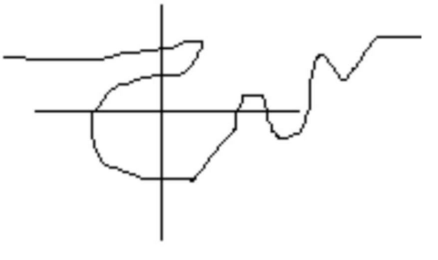
Thomas C. (HS) : « en + ∞ lim g < lim f ou lim f < lim g ? On ne sait pas ? »

Antoine (HS) : « Cette fonction n'existe pas ! »

François (HS) : « Une fonction existe du moment qu'elle est dessinée »

Antoine vient au tableau et explique : « Pas toujours car celle-ci n'existe pas : »

et il dessine :



Et il rajoute : « Cette fonction n'existe pas car elle a plusieurs y pour un seul x, donc la fonction f c'est n'importe quoi ! »

Hugo (HS) : « la limite de f est comprise entre 3,1 et 2,9 à cause de la période »

12 Un Hors-Sujet pour une conjecture correspond à une situation qui ne vérifie pas les hypothèses de cette conjecture.

Antoine (HS) : « Si la fonction existe alors c'est un contre-exemple »

Lydia (CE) propose de définir la fonction f morceau par morceau pour montrer à Antoine que cette fonction est bien définie.

Et elle conclut : « donc on peut bien définir la fonction f » et rajoute « mais par contre je ne sais pas ce qu'est la limite de f en $+\infty$, donc je change d'avis et passe à Autre »

Emelyne : (qui passe de Contre-exemple à Autre) : « Tu m'as convaincue, je change d'avis »

Nathalie(Autre) : « Oui mais $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$ ».

Fin du 2ème extrait

Dans cet extrait, le vote initial donne une grande majorité de votes Hors-Sujet, vote correspondant en principe à des situations qui ne vérifient pas les hypothèses de la conjecture. C'est ici pertinent puisque la fonction f n'a pas de limite. Cependant nous pouvons remarquer que les élèves ayant voté Hors-Sujet et qui prennent la parole dans ce script avancent d'autres raisons que l'inexistence d'une limite pour f (la fonction n'existe pas, on ne sait pas quelle fonction a la plus grande limite, la limite est comprise entre 3,1 et 2,9). Ceci est logique puisque avant d'étudier la question de la limite, pour laquelle ils n'ont pas de prise réelle par défaut de définition, ils essaient de mettre en cause ce qu'ils croient le mieux connaître. On peut d'ailleurs voir là le signe d'une forte conviction en la conjecture puisque la tendance nette ici est de mettre uniquement en cause la fonction proposée et non sa limite (au point même qu'Antoine dira de la fonction donnée par le professeur lui-même : « Cette fonction f, c'est n'importe quoi ! »). Le débat fait ensuite évoluer le questionnement vers le but recherché et finalement Nathalie pose la question : quelle est la limite en $+\infty$ pour cette fonction ? Dans la suite de la situation, cette question de Nathalie sera collectivisée par l'étude de la conjecture : « La fonction f a une limite en $+\infty$ ». Ce qui mènera au questionnement attendu : « Oui, mais finalement c'est quoi une limite ? ».

Mais regardons comment se structure la situation proposée et remarquons qu'un autre élément de construction de la situation entre en jeu : le retournement de situation décrit par Isabelle Bloch (2005). Habituellement on définit un objet puis on regarde ses propriétés. Ici c'est le contraire qui est proposé : on interroge l'objet à partir des propriétés qu'on lui suppose avoir. Ce retournement permet à l'élève de questionner lui-même la notion de limite. En effet, les propriétés d'ordre sur les fonctions lui sont accessibles, la vérité de la conjecture réside finalement au seul endroit où des doutes restent possibles : la fonction f a-t-elle une limite ? Remarquons aussi que la structure de cette deuxième partie est donc un peu différente de celle de la première : là où un objet (deux fonctions qui font contre-exemple) questionnait la conjecture-théorème (C1), ici c'est le contraire, la conjecture-théorème (C3) questionne l'objet (limite d'une fonction). Ce type de dialectique est proche d'une démarche lakatosienne, cependant le concept de définition n'a pas encore un statut suffisamment solide et établi pour les élèves puisque, par exemple, comme l'a montré Robert, quelques archétypes graphiques et le fameux « se rapprocher de » tient lieu, de manière très stable, de définition en acte [13] de la limite. Dès lors, il ne semble pas réaliste d'espérer, comme c'est le cas pour les « étudiants » imaginés par Lakatos dans « Preuve et réfutations », d'attendre autre chose de ce début de situation que le questionnement : « Finalement c'est quoi une limite ? ».

13 Terme utilisé par Cécile Ouvrier-buffet dans (Ouvrier-buffet, 2003 p10 et p296) dans un autre cadre que celui de la limite.

Si les élèves possédaient le concept de quantification d'une donnée qualitative certains pourraient peut-être nommer ici ce qui leur manque : quantifier le qualitatif « se rapprocher de a ». Ils pourraient voir qu'ils sont face au même problème que le précédent : celui de l'absence du epsilon petit mais fixé et non nul qui viendrait jouer le rôle du A, grand mais fixé et non infini qui a été précédemment proposé par le professeur comme une façon de quantifier le qualitatif « se rapprocher de l'infini ». Mais ce concept ils ne le maîtrisent pas et ils ne peuvent donc préciser leur manque que par l'expression beaucoup plus vague « c'est quoi une limite ? » qui n'est ni formellement une demande de définition, ni un projet de construction de définition, mais constitue cependant un marqueur significatif pour l'objectif assigné à ce début de situation, « faire ressentir la nécessité d'une définition ».

C'est alors au professeur que revient ici d'expliquer, lors d'une institutionnalisation, que le seul moyen de statuer sur cette situation, f a-t-elle une limite ou pas, est effectivement de se demander ce qu'est une limite, *autrement dit de se référer à une définition*. Continuer au-delà, vers une définition formalisée de la limite, nécessitera d'avancer sur la question de la topologie de **R**, en particulier sous la forme d'éléments du SPA [14] de Isabelle Bloch. Cela sera l'objet de la suite de la situation.

Pour conclure nous pointerons l'autre retournement, assez classique dans la théorie des situations, qui s'opère ici, ce qui devait constituer une rupture (le passage des idées au formalisme), ce qui devait constituer un obstacle (la notion de définition), devient précisément ce qui rend possible un autre apprentissage fondamental : celui de la fonction d'une définition, discriminer et démontrer [15], et celui de la forme de la définition parfois complexe qu'on adopte pour donner corps à ses idées, les rendre efficientes et partageables.

Nous ajouterons que si cet apprentissage est essentiel dans une perspective d'entrée dans l'Analyse formalisée, mais aussi plus généralement dans la formation en mathématiques, il peut aussi contribuer significativement à l'éducation du citoyen.

En effet, l'élève peut ainsi comprendre que finalement toutes ces constructions compliquées (les Réponses) ne le sont pas du fait de la perversité du mathématicien mais que, placé dans une perspective d'établir des vérités résistantes et partageables (le Cadre), le monde (qui se révèle par le Questionnement) est beaucoup moins simple qu'il n'y paraît aux premiers abords. A ce moment-là, il peut être davantage prêt à appréhender le formalisme et sa complexité pour ce qu'ils sont : les moyens de saisir collectivement cette réalité insaisissable sans eux. Cela pourra constituer, pour cet élève, une formidable occasion de se rendre compte que le simplisme n'est que naïveté et/ou tromperie, de fabriquer des anticorps aux discours de cet acabit, et de se préparer à envisager le monde dans sa réelle complexité.

14 « Cette spécificité relative aux méthodes de preuve en analyse et signalée dans d'autres recherches (cf. Legrand 1991), fait partie de ce que nous avions nommé le Système Spécifique de Preuve de l'Analyse (cf. Bloch 1995) ; c'est ce qui nous permet de caractériser le milieu des preuves (souligné par l'auteure) pour l'enseignement de l'analyse. » (Bloch, 2000 p122)

15 La fonction *démontrer* de la définition est présente dans la suite de la situation (non montrée ici) qui ira jusqu'à la démonstration par les élèves de C3 dans un cas particulier : C3' : « si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 4$, alors il existe un réel A tel que pour tout x réel avec $x > A$ on a $f(x) \leq g(x)$ »

Bibliographie :

Bloch I. (2000) L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation. Université Sciences et Technologies – Bordeaux I.

Bloch I. (2005) Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur. Université Paris-Diderot – Paris VII.

BO n°7 31 08 2000 (2000). programme de première scientifique 2000.

Brousseau G. (1998) Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990. Grenoble : La Pensée sauvage.

Kuzniak A. 2005) La théorie des situations didactiques de Brousseau. Repères-IREM 61, 19-35.

Lakatos I. (1984) Preuves et réfutations essai sur la logique de la découverte mathématique. Paris : Hermann.

Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. Repères IREM 10, 123-158.

Ouvrier-Buffet C. (2003) Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. Université Joseph-Fourier – Grenoble I.

Job P. (2011) Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques. Belgique : Université de Liège.

Robert A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. Divers articles de mathématiques. Paris : Université Paris VII.