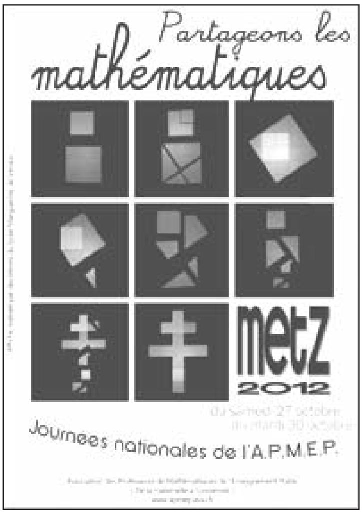


LE TANGRAM DE LA CROIX DE LORRAINE

Un exemple d'application du théorème de Bolyai-Gerwien

Emmanuel CLAISSE
Irem de Lorraine

Cet article est également consultable
en ligne sur le portail des Irem
(onglet : Repères IREM) : http://www.univ-irem.fr/

Introduction

Les pages qui suivent ont toutes été traitées avec des élèves de seconde générale dans le cadre d'un atelier Maths-en-Jeans du lycée Margueritte de la ville de Verdun, encadré par leurs professeurs Emmanuelle et Emmanuel Claisse ainsi que leur chercheur Philippe Lombard.

Le thème choisi au début était le théorème de Bolyaï, sujet qui se révéla très fécond et réserva d'excellentes surprises au cours de l'année 2013, avec en particulier la réalisation de l'affiche annonçant les Journées Nationales de l'APMEP à Metz.

A part la translation, les outils utilisés sont ceux du collège ; ainsi, la plupart des résultats peuvent se démontrer de façon élémentaire et il est possible de les traiter dans des classes de collège. En effet, la translation n'étant pas nécessairement introduite en début d'année dans la classe de seconde à laquelle appartenaient les élèves, le verbe « translater » fut ainsi remplacé par l'expression « déplacer sans tourner ». De même, le mot « superposable » fut substitué à « isométrique».

A noter que la découverte du tangram de la croix de Lorraine peut tout à fait se réaliser en dehors d'un atelier du type maths-en-jeans dans le cadre de TP en suivant les exercices de l'annexe C.

Le dessein d'un atelier MATHS-EN-JEANS

L'objectif de ce type d'atelier est de réaliser « *des actions de jumelage entre un mathématicien et des établissements scolaires, afin* *de mettre les jeunes en situation de recherche, permettre aux élèves comme à leurs parents de se faire une autre image des mathématiques que celle d'une discipline scolaire sélective ou de champ scientifique strict et achevé ».*

Afin de se faire une idée des objectifs des ateliers, on peut parcourir le site http://www.mathenjeans.fr/ et aller à la rubrique « objectifs ». Quelques ateliers du lycée Margueritte sont visibles ici : http://www.lyceemargueritte.fr/espace-culture/sciences/214-l-atelier-math-en-jeans-du-lycee-margueritte.

Conditions requises
pour l'élaboration d'un atelier

Un atelier maths-en-jeans doit remplir un certain nombre de conditions qui sont résumées dans une charte [1] reproduite dans l'annexe A. Précisons qu'il n'est pas nécessaire d'appliquer au mot et à la lettre la charte. La condition à minima de ce type d'atelier est la rencontre hebdomadaire, autour d'un projet, d'élèves et d'un professeur, le tout en relation avec un chercheur. Comme toute activité, la réussite d'un atelier tient avant tout de la motivation des élèves, ce qui suppose d'avoir un sujet suffisamment enthousiasmant ; cependant, les qualités principales de ceux-ci doivent être la curiosité, l'ouverture d'esprit, la créativité, la prise d'initiatives mais aussi l'engagement sur le long terme.

L'atelier "croix de Lorraine"

Les élèves faisaient partie de deux classes de seconde et avaient des compétences diverses et variées en mathématiques.

Cet atelier s'est déroulé en trois parties :

- La première partie avait pour thème les problèmes de quadrature [2] à la manière d'Euclide. L'objectif de cette partie étant de servir de base à la seconde.
- La seconde partie concernait le théorème de Bolyaï-Gerwien ; cette partie utilisant certaines méthodes d'Euclide vues dans la partie précédente.
- La troisième avait pour objectif la recherche de tangrams de la croix de Lorraine ; le but étant de la transformer en un carré. Un certain nombre de techniques utilisées dans les précédentes parties ont été réinvesties ici.

I. — Quadrature selon la méthode d'Euclide

« On ne connaît pas totalement
une science tant qu'on
n'en sait pas l'histoire »
Auguste Comte

L'origine de cette partie remonte au jour où le chercheur mis dans les mains d'Emmanuel Claisse un « pavé » assez déliquescent de l'Irem de Lorraine : *Les Eléments* d'Euclide traduits par Peyrard.

Lorsqu'on a ce genre d'ouvrage en main, c'est un peu comme lorsqu'on visite des vestiges de monuments grecs recouverts d'une végétation luxuriante. A première vue, on a l'impression de n'y voir que les ruines d'une civilisation surannée. Puis, en y regardant de plus près, on y découvre une mosaïque et une colonne de marbre ici, un amphithéâtre et un stade olympique là. Puis des thermes, une bibliothèque, une école. Bref, tout un art de vivre à rendre envieux de nombreux maires de communes rurales !

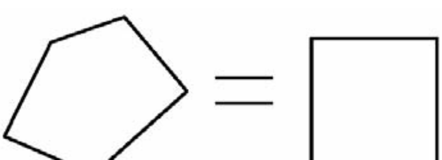
1 http://www.mathenjeans.fr/content/charte-des-ateliers-mathenjeans
2 La quadrature d'un polygone consiste à construire à la règle et au compas un carré de même aire que le polygone donné.

Revenons-en aux *Eléments*. Les expressions nous semblent lointaines, certaines définitions ou certains axiomes nous paraissent parfois incompréhensibles, voire loufoques. Ainsi, s'interroge-t-on sur l'intérêt de revisiter ces pages : les résultats sont connus, certains outils sont dépassés par la « modernité » des techniques actuelles.

Et pourtant, en se plongeant pleinement dans ce monument, on s'émerveille de bon nombre de résultats et de techniques de démonstrations. Tout un art de la preuve, à rendre jaloux les concepteurs des programmes !

Pour le lecteur désireux d'aborder les *Eléments*, il est conseillé de lire au préalable quelques articles d'initiation [Friedelmeyer1, 1998] ou [Friedelmeyer2, 2003). Pour une traduction des *Eléments* avec des commentaires approfondis, on peut lire celle de Bernard Vitrac [B.Vitrac, 2001].

L'enjeu ici fut de rendre vivants quelques résultats des livres 1 et 2 des *Eléments* d'Euclide pour lesquels il n'était pas question de faire lire les pages d'Euclide dans un atelier qui se veut récréatif. Ainsi, la problématique fut exposée de la manière suivante :

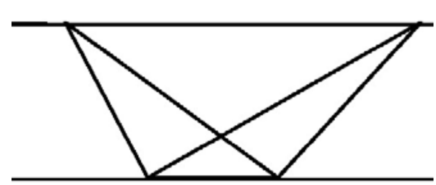


dessinez un polygone quelconque sur votre cahier de brouillon puis construisez à la règle et au compas un carré de même aire que ce polygone.

Evidemment, la première idée des élèves fut de diviser le polygone en triangles puis de calculer approximativement l'aire de chacun pour en déduire l'aire totale ainsi que le côté du carré cherché… Puis, je leur expliquais que calculer une aire, c'est un peu *jouer un air en tournant une manivelle*, comme le dirait Rousseau[3], alors que là, il s'agit de constructions à la règle et au compas.

Une aide fut donnée expliquant qu'on pouvait utiliser le résultat d'Euclide suivant :

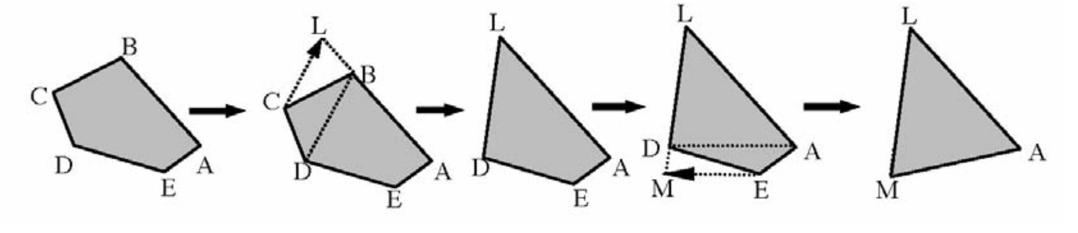
livre I, prop. 37 : les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles ont la même aire



A partir de là, un élève de l'atelier[4], Anthony, eu l'idée de réaliser « l'algorithme »

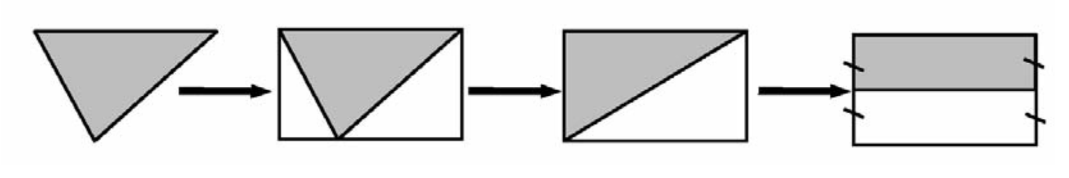
3 Jean-Jacques Rousseau, dans ***les confessions*** au XVIIIe siècle, écrit à propos de l'identité $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$: *« Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais pas cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle. La première fois que je trouvais par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties, et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. Ce n'était pas que je n'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite ; mais appliquée à l'étendue, je voulais voir l'opération sur les lignes ; autrement je n'y comprenais plus rien. »*
4 Elève dont la vocation était d'être chercheur en mathématiques…

suivant afin de transformer le polygone en un triangle de même aire en traçant des parallèles à des diagonales :

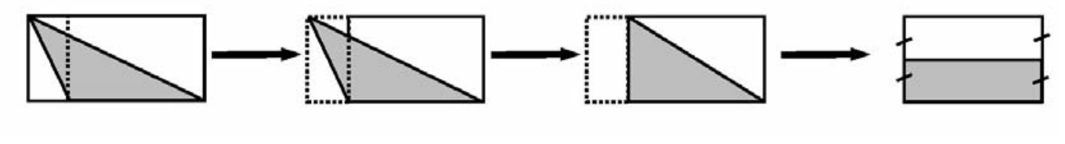


Puis les activités se déroulèrent dans l'ordre établi par Euclide dans les livres 1 et 2 en laissant aux élèves un temps de réflexion :

comment transformer un triangle en un rectangle de même aire ?



Et s'il y a un angle obtus :

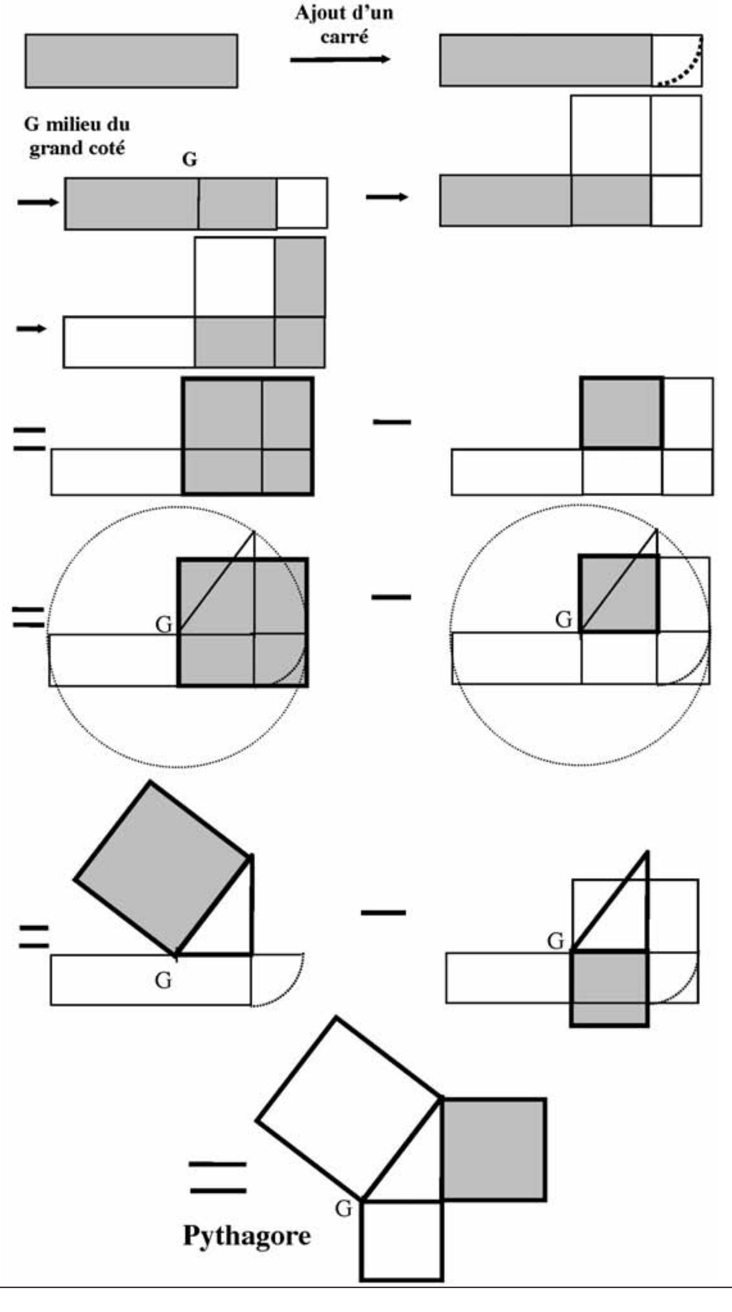


Puis vient la question :

comment transformer
un rectangle en un carré ?

C'est là que les choses se corsent et qu'il est difficile de laisser les élèves en autonomie totale. C'est dans ce dernier résultat utilisant Pythagore qu'on se rend compte des ravages du tout algébrique : il a fallu de longues explications pour expliquer ce passage. L'époque de Rousseau est décidément bien révolue. Le résultat ici « *construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un rectangle donné* » est essentiel par la suite et peut se traduire par *« construire à la règle et au compas un segment de longueur* $\sqrt{ab}$ *connaissant les nombres a et b »*.

Propositions 5 et 14 du livre II d'Euclide :

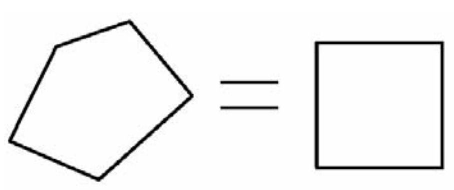


Un premier bilan de cette partie : les élèves ont été très enthousiastes de réaliser la quadrature d'un polygone quelconque mais ont été aussi admiratifs de découvrir des techniques plusieurs fois millénaires. Leur enthousiasme pour cette « nouvelle géométrie » à la règle et au compas est assez surprenant mais finalement compréhensible : l'objectif à atteindre est à la portée de tous et les techniques, plutôt élémentaires, sont nouvelles nouvelles pour ces élèves. Nul besoin de formules algébriques, de calcul compliqué.

A noter que nous avons profité de cette partie pour établir les cas d'égalité des triangles utiles pour la seconde partie (et redoutablement efficaces !).

II. — Equidécomposabilité et théorème de Bolyai

Cette partie est dans la continuité de la précédente puisque le problème posé aux élèves est le suivant :

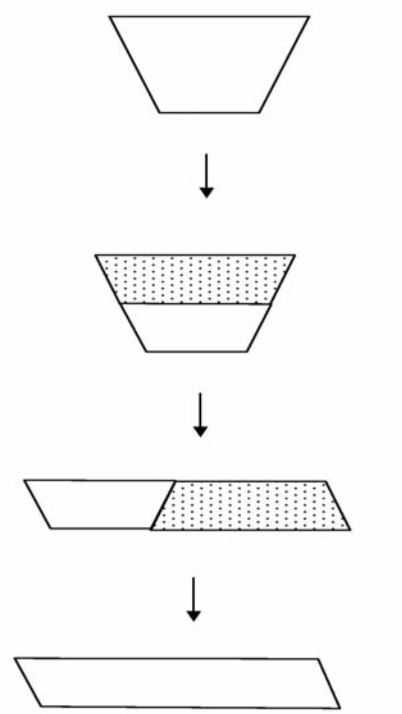


Dessinez un polygone quelconque sur votre cahier de brouillon. Peut-on le découper en un nombre fini de polygones afin de construire un carré en juxtaposant sans vide ni recouvrement ces polygones ?

On dit alors que le polygone et le carré sont équidécomposables[5]. C'est le principe du tangram.

Ce résultat est plus fort que le problème de l'existence de la quadrature d'un polygone. Il est la conséquence d'un théorème plus général énoncé pour la première fois par Farkas Bolyai, qui le démontra en 1832. Indépendamment, ce théorème a été démontré par un lieutenant prussien, Paul Gerwien en 1833. On pourra lire à ce propos l'article de J.P. Friedelmeyer [J.P.Friedelmeyer, 2008].

Théorème de Bolyai : *si deux polygones sont de même aire alors on peut découper l'un en un nombre fini de polygones afin de reconstituer l'autre en recollant les polygones. On dit alors que les polygones de même aire sont équidécomposables ou encore qu'ils sont équivalents par découpage et recollement.*



5 Le terme d'équidécomposabilité a été a été introduit par Hilbert à partir de la quatrième édition des *Fondements de la géométrie*. Hilbert a élaboré une théorie des aires sans recourir à la mesure, le but étant d'échapper à l'axiome d'Archimède.

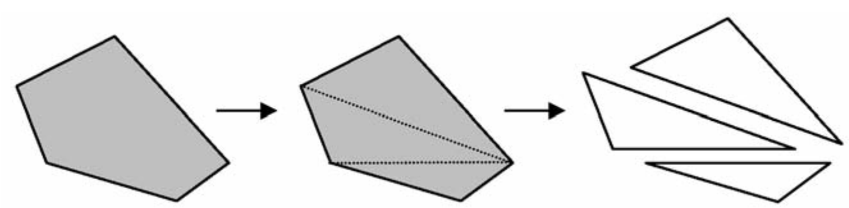
C'est le principe du tangram : découper une figure P en un nombre fini de sous-figures afin de reconstituer une autre figure P'. Avec les élèves, cette partie a été gérée comme la précédente en les laissant en autonomie et en leur donnant un coup de pouce lorsque cela était nécessaire. La liste d'exercices présentés dans l'annexe C est un résumé des activités faites avec les élèves, elle permet d'établir le théorème de Bolyai.

Etapes de la démonstration du théorème de Bolyai d'après la liste d'exercices de l'annexe C

On considère deux polygones P et P' ayant même aire. Le but des activités ci-dessous est de prouver que P et P' sont équidécomposables. L'objectif de ces premiers exercices est de prouver qu'on peut transformer le polygone P en un carré par découpage et recollement.

Exercice 1 (assez évident) : construire un polygone P quelconque puis le découper en triangles.

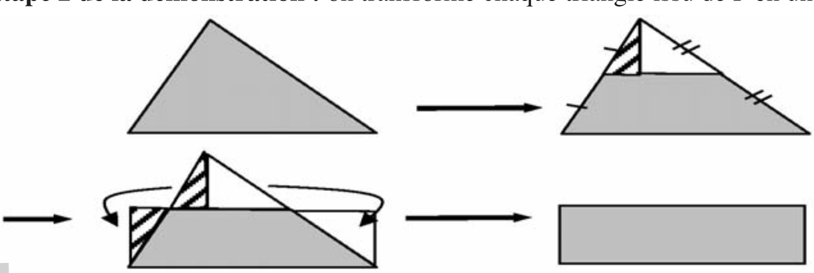
Etape 1 de la démonstration : on décompose le premier polygone P en triangles



Exercice 2 : 1) Découper les trois polygones D1 de l'annexe D et déterminer les deux figures classiques que l'on peut obtenir avec ces morceaux.
2) Construire un triangle quelconque. En s'inspirant de la question 1) , découper ce triangle afin d'obtenir un rectangle.

Figure D1

Etape 2 de la démonstration : on transforme chaque triangle issu de P en un rectangle

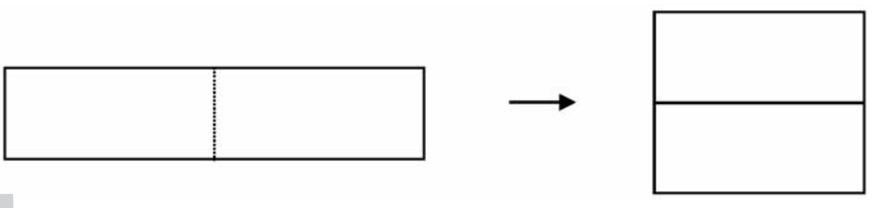


(Cette opération est toujours possible car un triangle a toujours une hauteur qui coupe un côté du triangle.)

Commentaire : les élèves ont eu assez rapidement l'idée de ce découpage alors qu'ils n'avaient pas fait la question 1 de cet exercice.

Exercice 3 : construire un rectangle dont la longueur est supérieure à quatre fois sa largeur. Comment le découper afin d'obtenir un rectangle dont la longueur est inférieure à quatre fois la largeur ?

Etape 3 : si un rectangle a sa longueur supérieure à quatre fois sa largeur, on le transforme en un rectangle dont la longueur est inférieure à quatre fois sa largeur

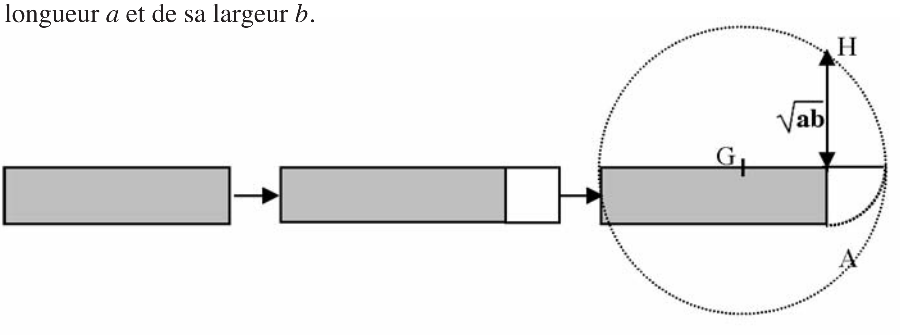


Commentaire : cette étape est nécessaire afin de réaliser l'étape 5. Lors de l'atelier, la difficulté liée au rapport longueur/largeur du rectangle est apparue lors de l'étape 5.

Exercice 4 : soit ABCD un rectangle, O un point extérieur au rectangle appartenant à la droite (AB) et vérifiant AO = AC.
Soit I le milieu du segment [OB]. Construire le cercle de centre I et de diamètre [BO].
Soit H l'intersection de la demi-droite [CA) avec le cercle. Démontrer que $AH = \sqrt{AB \times AC}$

Proposer une construction à la règle et au compas de $\sqrt{5}$.

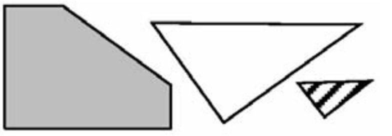
Etape 4 : pour chaque rectangle issu de P, on détermine la moyenne géométrique $\sqrt{ab}$ de sa longueur a et de sa largeur b.



Exercice 5 : 1) Découper les trois polygones D2 de l'annexe D et trouver les deux figures classiques que l'on peut obtenir avec ces trois morceaux.

2) Dessiner un rectangle quelconque dont la longueur a ne dépasse pas quatre fois sa largeur b.

Figure D2

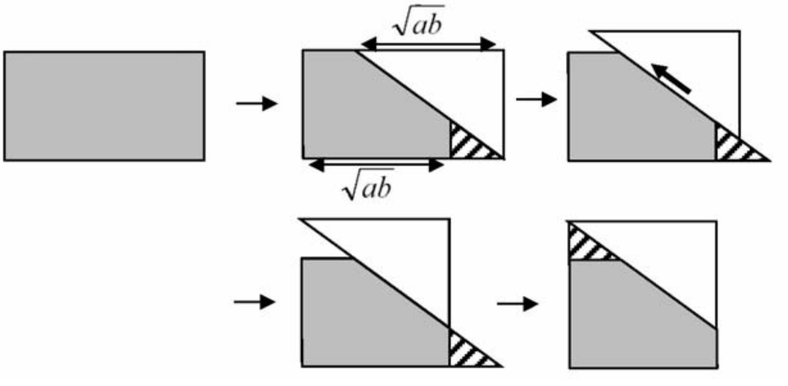


a) Quelle est l'aire du rectangle ? Que vaut la longueur du côté d'un carré ayant la même aire que ce rectangle ?

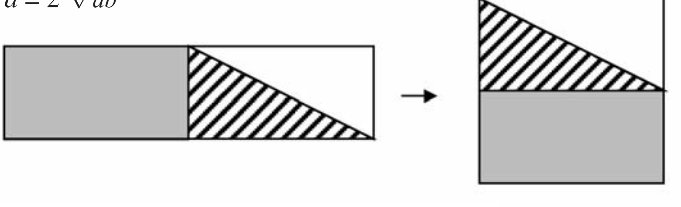
b) En s'inspirant de la question **1)**, découper ce rectangle afin d'obtenir un carré.

3) Que se passe-t-il si la longueur du rectangle dépasse de quatre fois sa largeur ?

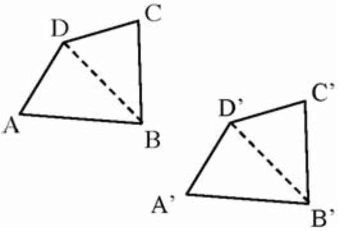
Etape 5 : on transforme chaque rectangle $a{\times}b$ en carré :



Remarque : la figure ci-dessous montre le cas limite pour lequel la longueur $a = 4b$, ce qui équivaut à $a = 2\sqrt{ab}$



Exercice 6 : 1) Question préliminaire :



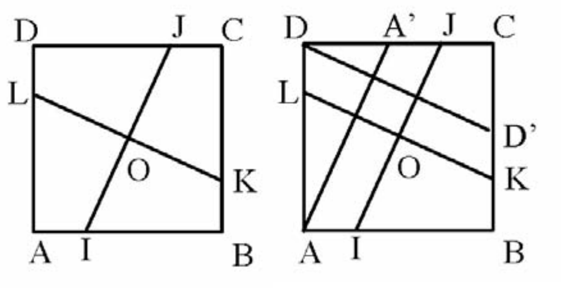
Soient ABCD et A'B'C'D' deux quadrilatères ayant quatre côtés égaux deux à deux (AB = A'B', BC = B'C', …), ainsi que les diagonales BD et B'D'.
Démontrer que ces quadrilatères sont superposables.

2) ABCD est un carré de centre O. Le segment [IJ] passe par O. Le segment [KL] passe par O et est perpendiculaire au segment [IJ].

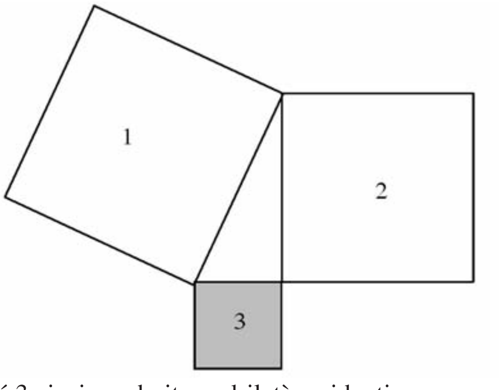
a) Démontrer que les segments [IJ] et [KL] partagent le carré en quatre quadrilatères superposables.

b) Le segment [AA'] est parallèle au segment [IJ] et le segment [DD'] est parallèle au segment [KL].

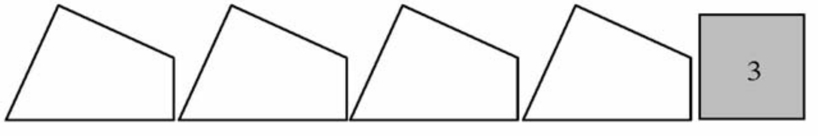
Démontrer que les longueurs AA' et DD' sont égales.



Exercice 7 : la figure D3 de l'annexe D représente un triangle rectangle ainsi que trois carrés.



La figure D4 de l'annexe D représente le carré 3 ainsi que huit quadrilatères identiques :



1) a) Découper tous les polygones de la figure D4.

b) Reconstituer le carré 2 à l'aide de quatre quadrilatères gris.

c) Avec les cinq pièces restantes, reconstituer le carré 1.

2) Expliquer comment obtenir les quadrilatères qui découpent le carré 2.

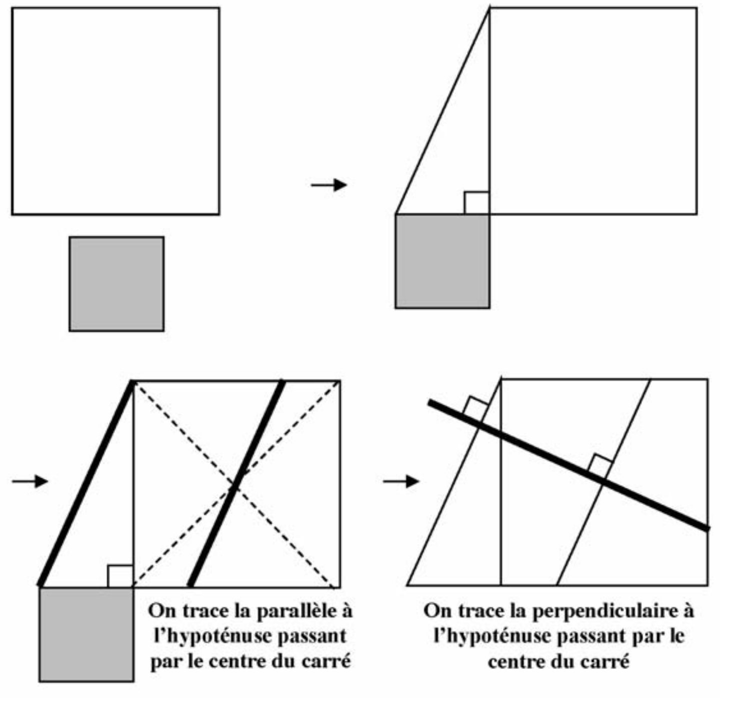
3) Expliquer pourquoi le carré 3 avec les quatre quadrilatères du carré 2 permettent de reconstituer le carré 1.

4) Quel théorème célèbre illustre ces découpages ?

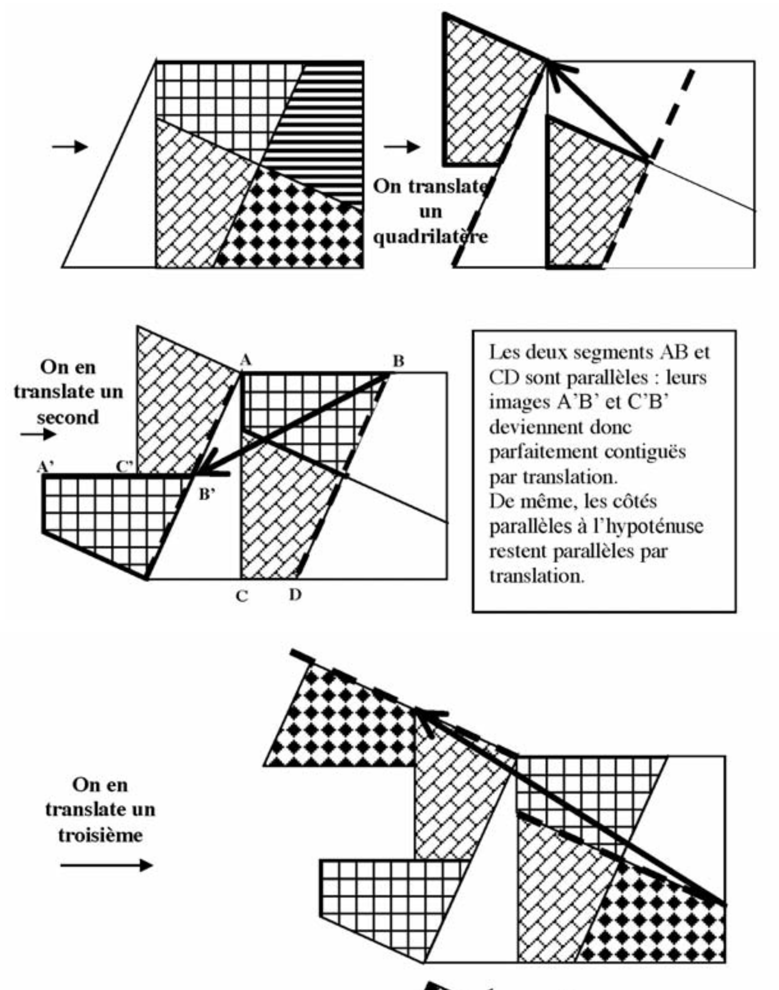
Commentaire : on découvre ce découpage au 10ème siècle dans l'œuvre d'un mathématicien arabe, Abu al-Wafa. Il est également visible dans un certain nombre de mosaïques.

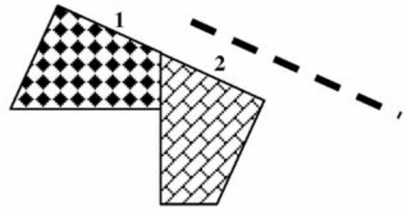
Mosaïque de la mosquée du vendredi à Ispahan (Iran)

Etape 6 : comment fusionner deux carrés en un ?



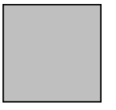
Le carré est partagé en quatre quadrilatères isométriques

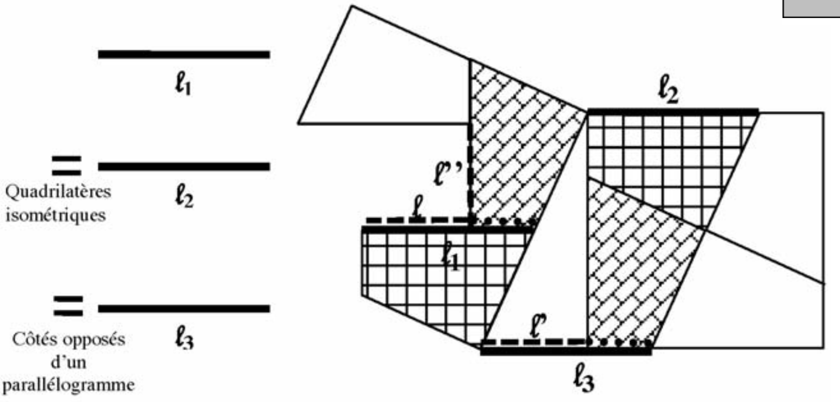




Remarque : par translation, les côtés **1** et **2** conservent la direction représentée en pointillés donc ils restent alignés .

Expliquons maintenant pourquoi on peut encastrer exactement ce carré :

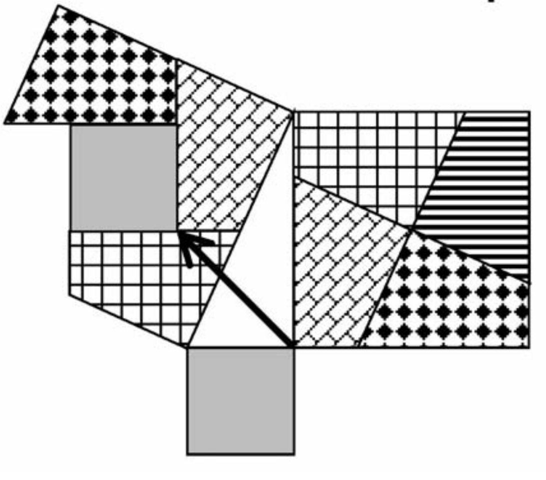




donc $\ell_1 = \ell_3$

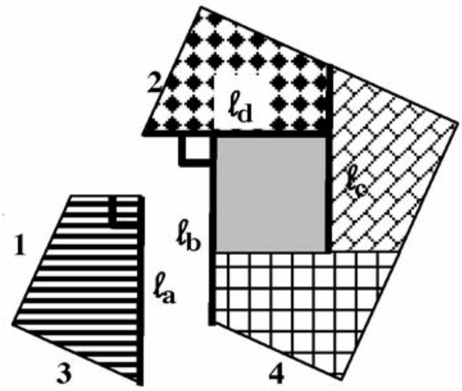
Mais le segment •••••
est commun aux segments ℓ_1 et ℓ_3 donc $\ell = \ell'$

Puisque tous les quadrilatères sont isométriques,
on démontre de même que $\ell = \ell''$ $\ell = \ell''$



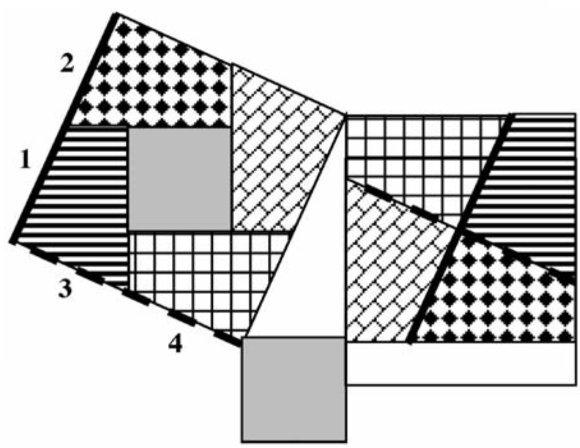
Enfin, l'angle entre ℓ et ℓ''
est droit car c'est le
supplémentaire d'un
angle droit.
On peut donc loger
le second carré
sans chevauchement :

Puisque $\ell_a = \ell_b = \ell_c = \ell_d$ alors le dernier quadrilatère peut s'encastrer exactement afin de compléter la figure en un grand carré.

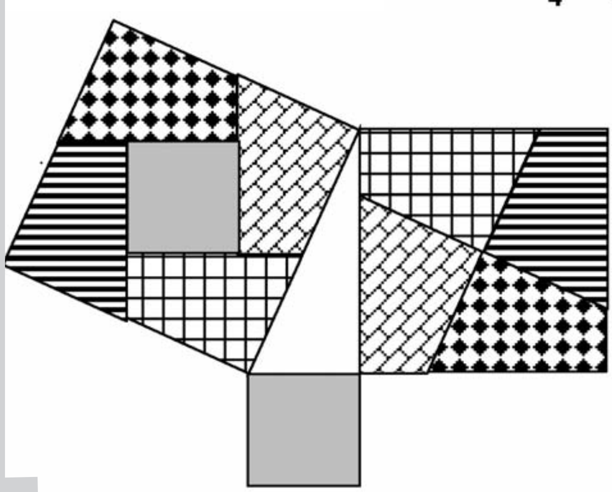


De plus, les côtés 1 et 2 s'alignent par translation car ils restent parallèles à la direction représentée par l'hypoténuse.

De même, les côtés 3 et 4 s'alignent par translation, ils restent parallèles
à la direction perpendiculaire à celle de l'hypoténuse (représentée en pointillée)



Voici, ci-dessous, le résultat de l'étape 6 : fusion de deux carrés en un.



On a transformé par découpage et recollement le polygone P en un seul carré C. Pour davantage de détails sur le découpage d'un carré, on pourra lire [Blanvillain, 2012 a], [Blanvillain, de l'art de découper les carrés en cinq, 2012 b] ou [Blanvillain, c]

Etape 7 : on fusionne les carrés issus de P deux par deux afin d'obtenir au final un seul grand carré C

Etape 8 : on renouvelle les étapes 1 à 6 pour le second polygone P' afin d'obtenir un deuxième grand carré C'

On aboutit alors à autant de carrés que de triangles issus du découpage initial.

Etape 9 : puisque les polygones P et P' ont la même aire, les carrés C et C' sont superposables, on superpose donc les découpages des deux carrés. Le carré obtenu et les polygones P et P' sont équidécomposables : le théorème de Bolyaï est prouvé.

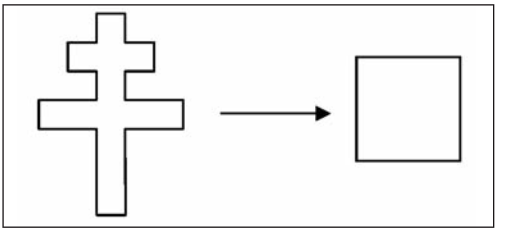
Remarques : on peut durcir la notion d'équidécomposabilité, en remplaçant le groupe des isométries par un de ses sous-groupes.

En 1951, les mathématiciens suisses Hadwiger et Glur ont démontré que deux polygones de même aire sont équidécomposables uniquement par translations et symétries (c'est-à-dire de telle façon que les pièces correspondantes aient des côtés parallèles)

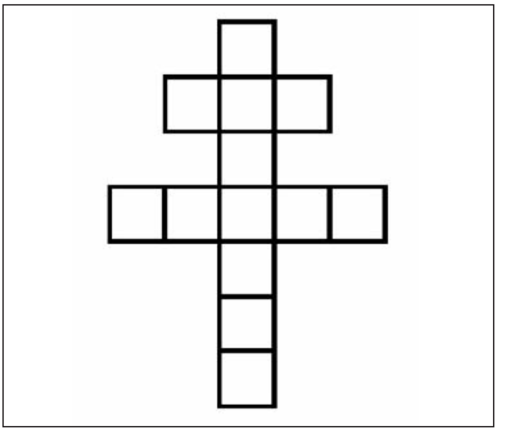
III. — Le tangram de la croix de Lorraine

La troisième partie de l'année avait pour but la participation au concours d'affiche devant annoncer les Journées Nationales 2012 de l'APMEP qui ont eu lieu à Metz (voir Annexe B). Le slogan de ces journées étant « Partageons les mathématiques » et le lieu au cœur de la Lorraine. L'idée qui s'imposa fut le partage de la fameuse croix de Lorraine.

Armés du théorème de Bolyaï, nous savions que le découpage de la croix afin de reconstituer un carré était possible. Mais comment ? Et autant que possible en ne faisant pas trop de découpages…

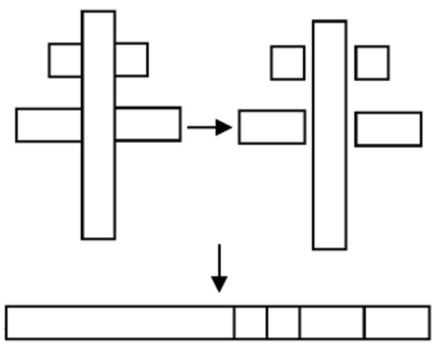


Par la suite, nous modéliserons la croix de Lorraine à l'aide de treize carrés identiques, comme sur la figure ci-dessous :

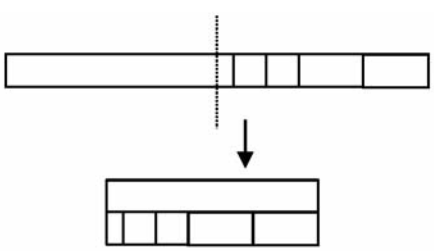


Première méthode : en utilisant l'étape 5 de la démonstration du théorème de Bolyaï

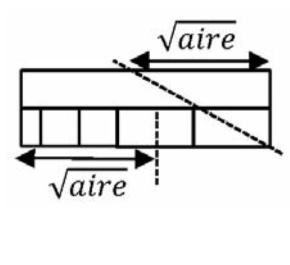
On commence par transformer la croix en un rectangle :



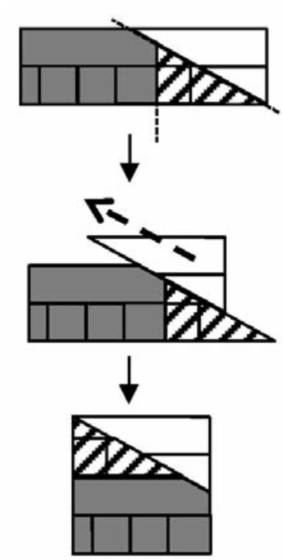
Le dernier grand rectangle ci-dessus étant constitué de treize carrés identiques, ses dimensions sont 1×13 donc la longueur du grand côté dépasse les quatre fois celle du petit côté. On découpe donc le rectangle et on superpose les deux rectangles afin d'obtenir un rectangle conforme à l'utilisation de l'étape 5 :



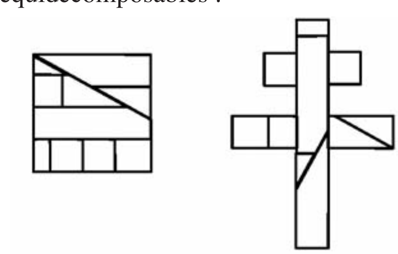
On reporte la longueur $\sqrt{aire}$ (technique vue ci-dessus à la règle et au compas) :



Et on effectue le découpage qui permet d'obtenir un carré :



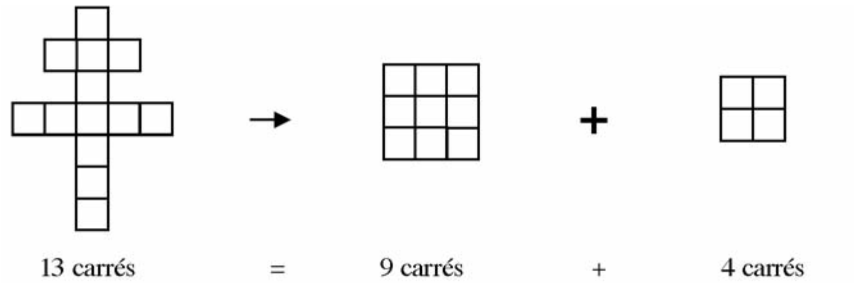
… et voici donc le carré et la croix de Lorraine équidécomposables :



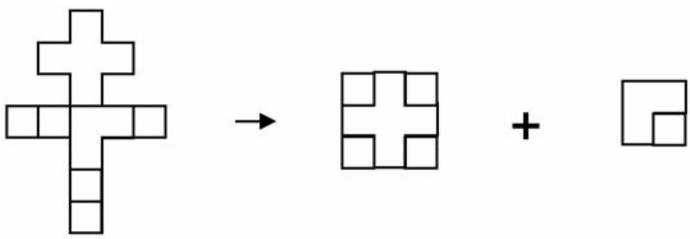
Seconde méthode : celle de l'affiche

L'idée de base est de transformer la croix de Lorraine en deux carrés puis de les fusionner en un seul carré en utilisant la méthode d'Abu al-Wafa. Et — quelle chance !… — la croix de Lorraine est constituée de 13 carrés, sommes de 9 carrés et 4 carrés…

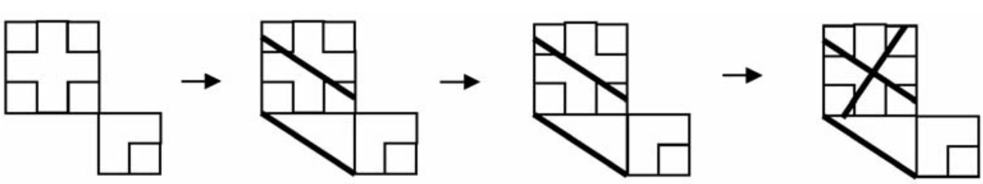
découpage selon la méthode d'Abu al-Wafa



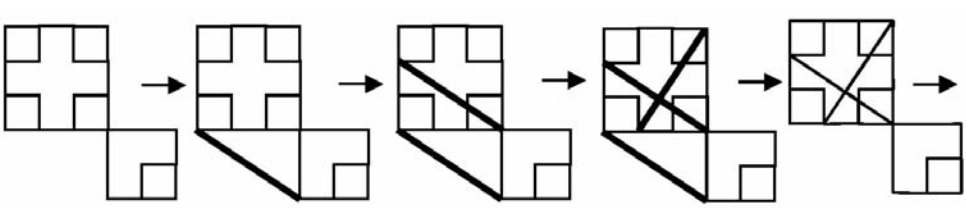
Mais afin d'obtenir un tangram avec le moins de pièces possibles, on peut au départ effectuer un découpage de la croix non pas en 13 carrés mais avec seulement 7 polygones :

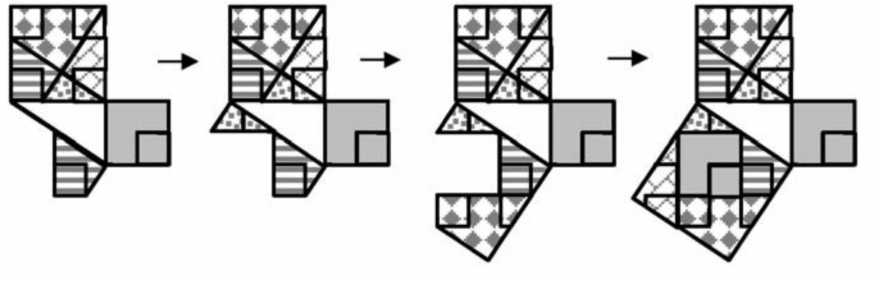


Puis on utilise la méthode d'Abu al-Wafa afin de fusionner les deux carrés :

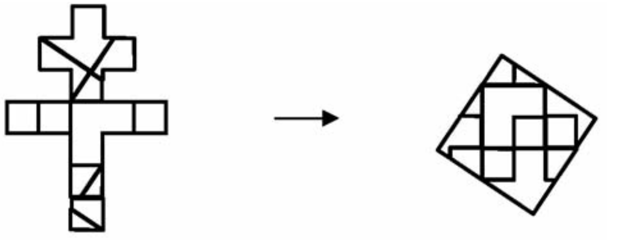


Le résultat est plutôt médiocre avec quatorze pièces dont certaines sont très petites… Une idée surgit : *peut-on modifier la méthode d'Abu al-Wafa en faisant en sorte que les deux segments perpendiculaires ne passent pas par le centre du carré ?*





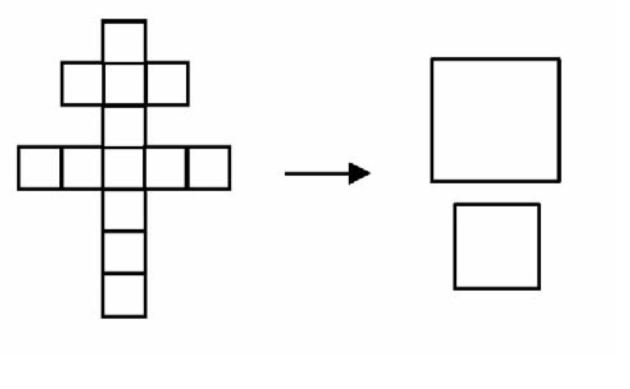
Voici donc ci-contre le carré et la croix de Lorraine équidécomposables :



Exercice 8 :

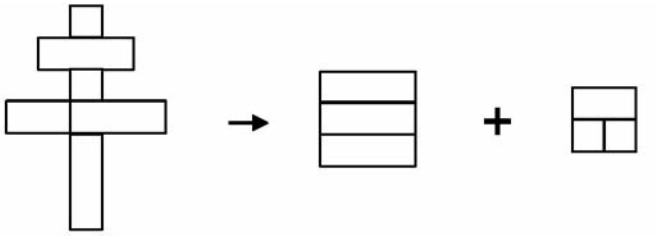
1) Peut-on transformer facilement la croix de Lorraine en deux carrés ?

2) Utiliser la fusion de deux carrés en un à l'aide de la méthode d'Abu al-Wafa à l'étape 6 de la seconde partie afin d'obtenir un tangram de la croix de Lorraine.

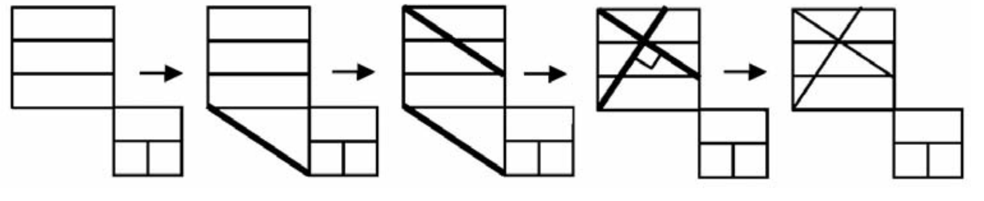


Troisième méthode :

On transforme à nouveau la croix de Lorraine en deux carrés, mais en utilisant un autre découpage :



Puis on utilise la méthode d'Abu al-Wafa afin de fusionner les deux carrés :



Les élèves ont présenté leurs travaux au congrès d'Epinal où les personnes présentes pouvaient jouer avec les tangrams apportés.

Puis l'APMEP Lorraine annonça le résultat du concours : l'affiche retenue fut celle de la croix de Lorraine. Quelle joie de savoir qu'elle sera tirée à plusieurs milliers d'exemplaires et que deux mille tangrams seront distribués lors des Journées Nationales de l'APMEP [6] : mille tangrams avec la seconde méthode et mille autres avec la troisième méthode.

Dans *le Petit Vert* (bulletin de la régionale Lorraine) et lors des Journées, a été repris un défi déjà présent dans Jeux 3 : trouver un découpage de la croix de Lorraine en un minimum de pièces pour pouvoir former un carré (ce ne sera donc plus nécessairement un puzzle « de Pythagore »). Les résultats sont téléchargeables ici :

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Des_puzzles_Croix_de_Lorraine.pdf.

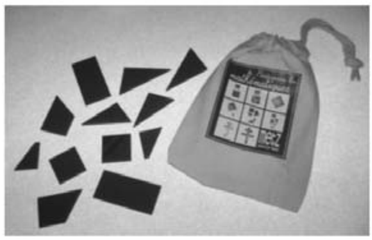
Conclusion

Ces activités géométriques furent passionnantes pour de multiples raisons.

La première, et peut-être la plus importante, fut de donner aux élèves le goût de chercher et d'expérimenter en proposant des questions suffisamment ouvertes et facile-

6 http://www.lyceemargueritte.fr/espace-culture/sciences/260-journ%C3%A9es-nationales-2012-de-l%E2%80%99association-des-professeurs-de-math%C3%A9matiques

congrès d'Epinal



Le tangram présenté sur l'affiche

le second tangram

ment compréhensibles mais dont la résolution n'est pas toujours aisée. Ces activités pouvant répondre à la définition moderne de démarche d'investigation. On pourra consulter à ce propos un des nombreux articles publiés dans Repères Irem dont le sujet est lié à la démarche d'investigation, articles répertoriés dans le numéro 96 de Repères [Gandit, 2014][7].

De plus, le fait de revisiter des méthodes élaborées voici plusieurs millénaires par les grecs d'Euclide fut passionnant et les élèves ont été agréablement surpris par leur inventivité. On comprend pourquoi ces méthodes ont été enseignées pendant 2500 ans ou plutôt on se demande pourquoi elles ont disparu des programmes…

Un autre intérêt de ces activités géométriques fut d'avoir une autre approche de la notion d'aire sans utiliser de formules, autrement dit comparer sans calculer, permettant ainsi de travailler sur la grandeur « aire ». A ce propos, j'invite le lecteur à lire l'article « Des aires sans mesures à la mesure des aires » [Chamontin, 2001].

Autre avantage de ce type d'activités : utiliser ce que Duval appelle l'appréhension opératoire d'une figure [Duval, 1994], c'est-à-dire jouer à modifier mentalement ou matériellement un dessin afin d'obtenir l'idée d'une solution possible. Ce type de démarche permettant, entre autres, de reculer l'intervention d'un formalisme trop précoce ; formalisme qui apparaît trop souvent au détriment de l'expérimentation et de la recherche de sens. Citons à ce propos Pierre Thuiller : « *Beaucoup d'échecs ou de semi-échecs de l'enseignement des mathématiques pourraient bien provenir d'une méconnaissance des aspects heuristiques de la "reine des sciences"* ».

D'autre part, les avantages qu'apporte le cadre « maths-en-jeans » à ce type d'activité sont nombreux. Avant tout, les sujets mathématiques ne sont pas soumis aux programmes. De même, mis à part les horaires, la façon de les traiter est sans contrainte.

Ainsi, ce cadre est idéal pour pratiquer les mathématiques différemment que dans le cours classique. En particulier, le travail dans la durée permet à l'enseignant de donner du temps aux

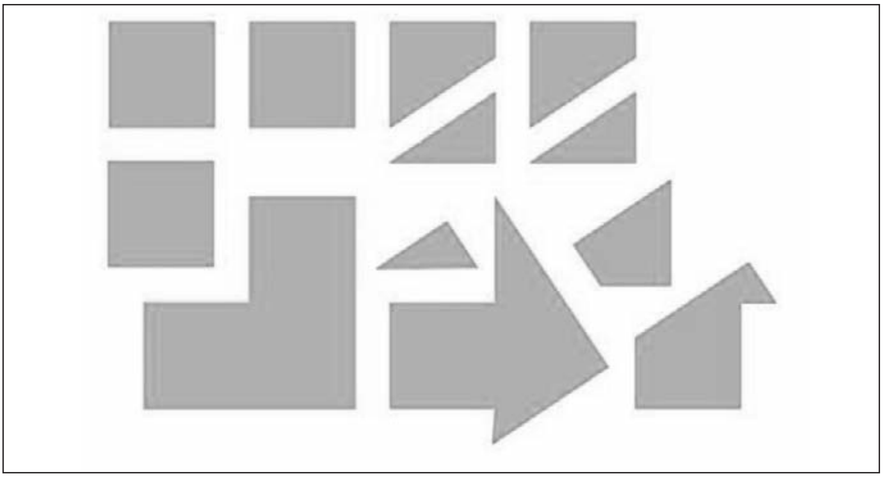
7 Répertoire sur le net concernant la démarche d'investigation http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1103

élèves pour comprendre, chercher, expérimenter ; bref, de leur donner une certaine autonomie. A noter tout de même qu'il est illusoire de penser qu'on peut laisser une autonomie totale dans ce genre d'activités : il est souvent nécessaire de recadrer, de donner des directives, des informations, des pistes, etc.

Un autre intérêt de l'atelier « maths-en-jeans » est l'écriture d'articles [8] ainsi que le goût de partager et de présenter ses travaux dans le cadre de rencontres avec, en particulier la Journée Portes Ouvertes du lycée ou le congrès national maths-en-jeans [9]. Concernant le congrès, les élèves présentent généralement leurs travaux dans un amphithéâtre dont les auditeurs sont des élèves ou des professeurs. Quoi de plus stimulant !

Enfin, concernant l'atelier « croix de Lorraine », ajoutons le challenge puis la joie de remporter le concours d'affiches et de pouvoir donner deux tangrams à un médaillé Fields [10].

Je voudrais terminer par un mot concernant la géométrie. Ou plutôt une unique citation d'Aristote qui sonne comme un hymne à l'enseignement de la géométrie : *« rien n'est dans l'esprit qui ne fut d'abord dans les sens »*. Alors découpez les morceaux ci-dessous et reconstituez la croix de Lorraine ou deux carrés ou un unique carré !



8 http://www.lyceemarguerritte.fr/espace-culture/sciences/145-les-maths-en-jeans-du-lyc%C3%A9e-marguerritte-s%E2%80%99imposent

9 http://www.lyceemarguerritte.fr/espace-culture/sciences/144-maths-en-jeans-une-journ%C3%A9e-%C3%A0-epinal

10 Cédric Villani a dédicacé l'affiche tout en félicitant les membres de l'atelier du lycée Marguerritte.

ANNEXE A

Charte d'un atelier MATh.en.JEANS

Quel que soit le niveau d'enseignement, un atelier MATh.en.JEANS apporte aux élèves un lieu de découverte, de création et d'investissement possible, un environnement qui encourage et valorise leur initiative, une vision moderne des mathématiques et un rapport au milieu de la recherche mathématique.

La création d'un atelier MATh.en.JEANS *nécessite des éléments essentiels :*

– un-e chercheur-se volontaire (enseignant-chercheur, doctorant, ...)
– un établissement ou, de préférence, deux établissements jumelés avec, dans chacun, au moins un enseignant et un nombre raisonnable d'élèves (entre 3 et 6 par sujet paraît souhaitable)
– des sujets de recherche à la fois attractifs et sérieux
– un calendrier permettant le temps nécessaire à un travail collectif en petit groupes de une à deux heures hebdomadaires
– des rencontres régulières entre les chercheurs en herbe, les enseignants et le chercheur (appelées «séminaires »)
– une présentation «officielle» des résultats (elle peut être de différents ordres : communication en congrès, animation, production d'article, d'affiches...).

Rôle de l'enseignant :

– l'enseignant aide les élèves à préciser leurs pensées, à reformuler, en leur laissant le temps nécessaire.
– l'enseignant ne traduit pas le problème, ne le réduit pas à des petites questions et ne le résout pas à la place des élèves.
– l'enseignant prépare à la présentation orale et / ou accompagne la préparation d'un écrit.
– l'enseignant signale son atelier à l'association et fournit les informations nécessaires (effectifs, sujets, organisation...).

Rôle du chercheur, de la chercheuse :

– le chercheur choisit le sujet, en collaboration avec l'enseignant.
– dans la mesure du possible, le chercheur se rend dans les établissements, échange par vidéoconférence
ou invite les jeunes dans son laboratoire (séminaires de recherche).
– le chercheur accompagne et stimule le questionnement des élèves.
– le chercheur valide régulièrement les avancées par le dialogue avec les élèves, il valide la recherche dans son état final et l'écrit éventuel.

Les principes indispensables à respecter :

– ne pas en faire un atelier d'excellence, ni une compétition.
– ne pas sélectionner les élèves, ni pendant les phases de recherche, ni pour les prestations.
– éviter le recours systématique à internet pendant les séances de recherche.
– ouvrir à des élèves volontaires (soit réellement volontaires, soit en choix face à autre chose) encadrés par un (ou des) enseignant(s) volontaire(s).

Concours APMEP

ANNEXE B

CONCOURS APMEP 2010 – 2011

PRODUCTION D'UNE AFFICHE

Cahier des charges

Mentions devant obligatoirement figurer sur l'affiche :

L'indication du congrès : **Journées nationales de l'A.P.M.E.P.**

Le thème des journées : **Partageons les mathématiques**

La date des journées : **du samedi 27 octobre au mardi 30 octobre 2012**

Le lieu : **Metz**

Format de l'affiche imprimée : A3

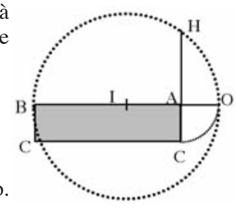
Bibliographie

APMEP. (s.d.). *http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Des_puzzles_Croix_de_Lorraine.pdf*. Récupéré sur http://www.apmep.fr/Le-puzzle-de-l-affiche.
B.Vitrac. (2001). *Euclide Les Eléments*. puf.
Blanvillain, C. (2012 a, janvier-février). de l'art de couperles carrés en trois. *Revue du Palais de la Découverte*, pp. 47-51.
Blanvillain, C. (2012 b, mars-avril). de l'art de découper les carrés en cinq. *Revue du Palais de la Découverte*, pp. 41-45.
Blanvillain, C. (c). *http://25a8.ch/upload/school/1_Trisection.pdf*. Récupéré sur http://25a8.ch/upload/school/1_Trisection.pdf
Chamontin, F. (2001, janvier). Des aires sans mesure à la mesure des aires. *Repères-IREM n°44*.
Duval, R. (1994, octobre). les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *repères irem n°17*.
Friedelmeyer1, J.P. (1998, avril). Les aires, outil heuristique, outil démonstratif. *Repères-IREM n°31*.
Friedelmeyer2, J.P. (2003, octobre). le professeur de mathématiques d'aujurd'hui peut-il encore apprendre quelque chose d'Euclide. *Repères-IREM n°53*.
Gandit, M. (2014, juillet). Démarche d'investigation en mathématiques. *Repères Irem*, pp. 68-72.
Friedelmeyer, J.P. (2008). équidécomposabilité des polygones plans. *L'Ouvert n°117*.
Moyon, M. (2013 octobre). Diviser en multipliant les approches. Repères Irem, p 47-77.

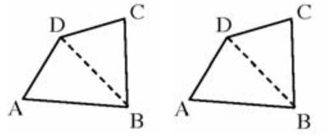
ANNEXE C

La croix de Lorraine (les exercices distribués aux élèves)

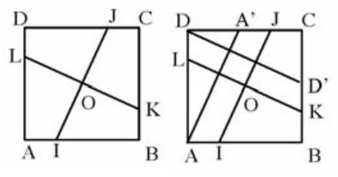
Exercice 1 : construire un polygone quelconque puis le découper en triangles.
Exercice 2 : 1) Découper les trois polygones D1 de l'annexe D et déterminer les deux figures classiques que l'on peut obtenir avec ces morceaux.
2) Construire un triangle quelconque. En s'inspirant de la question **1)** , découper ce triangle afin d'obtenir les pièces qui permettent de reconstituer un rectangle.
Exercice 3 : construire un rectangle dont la longueur est supérieure à quatre fois sa largeur.
Comment le découper afin d'obtenir un rectangle dont la longueur est inférieure à quatre fois la largeur.
Exercice 4 : soit ABCD un rectangle, O un point extérieur au rectangle appartenant à la droite (AB) et vérifiant AO = AC. Soit I le milieu du segment [OB]. Construire le cercle de centre I et de diamètre [BO].
Soit H l'intersection de la demi-droite [CA) avec le cercle. Démontrer que AH = $\sqrt{AB \times AC}$. Proposer une construction à la règle et au compas de $\sqrt{5}$.



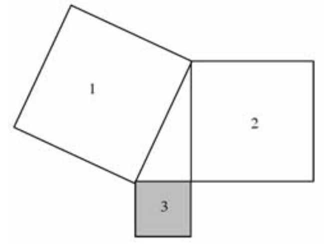
Exercice 5 : 1) Découper les trois polygones D2 de l'annexe D et trouver les deux figures classiques que l'on peut obtenir avec ces trois morceaux.
2) Dessiner un rectangle quelconque dont la longueur a ne dépasse pas quatre fois sa largeur b.
a) Quelle est l'aire du rectangle ? Que vaut la longueur du côté d'un carré ayant la même aire que ce rectangle ?
b) En s'inspirant de la question **1)**, découper ce rectangle afin d'obtenir un carré.
3) Que se passe-t-il si la longueur du rectangle dépasse de quatre fois sa largeur ?
Exercice 6 : 1) Question préliminaire : Soient ABCD et A'B'C'D' deux quadrilatères ayant quatre côtés égaux deux à deux (AB = A'B', BC = B'C', …), ainsi que les diagonales BD et B'D'. Démontrer que ces quadrilatères sont superposables.

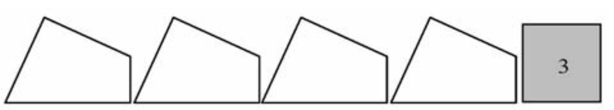


2) ABCD est un carré de centre O. Le segment [IJ] passe par O. Le segment [KL] passe par O et est perpendiculaire au segment [IJ].
Démontrer que les segments [IJ] et [KL] partagent le carré en quatre quadrilatères superposables.
Le segment [AA'] est parallèle au segment [IJ] et le segment [DD'] est parallèle au segment [KL]. Démontrer que les longueurs AA' et DD' sont égales.
Que peut-on en conclure ?



Exercice 7 : puzzle d'Abul Wafa
la figure D3 de l'annexe D représente un triangle rectangle ainsi que trois carrés. La figure D4 représente le carré 3 ainsi que huit quadrilatères identiques.
1) a) Découper tous les polygones de la figure D4.
b) Reconstituer le carré 2 à l'aide de quatre quadrilatères.

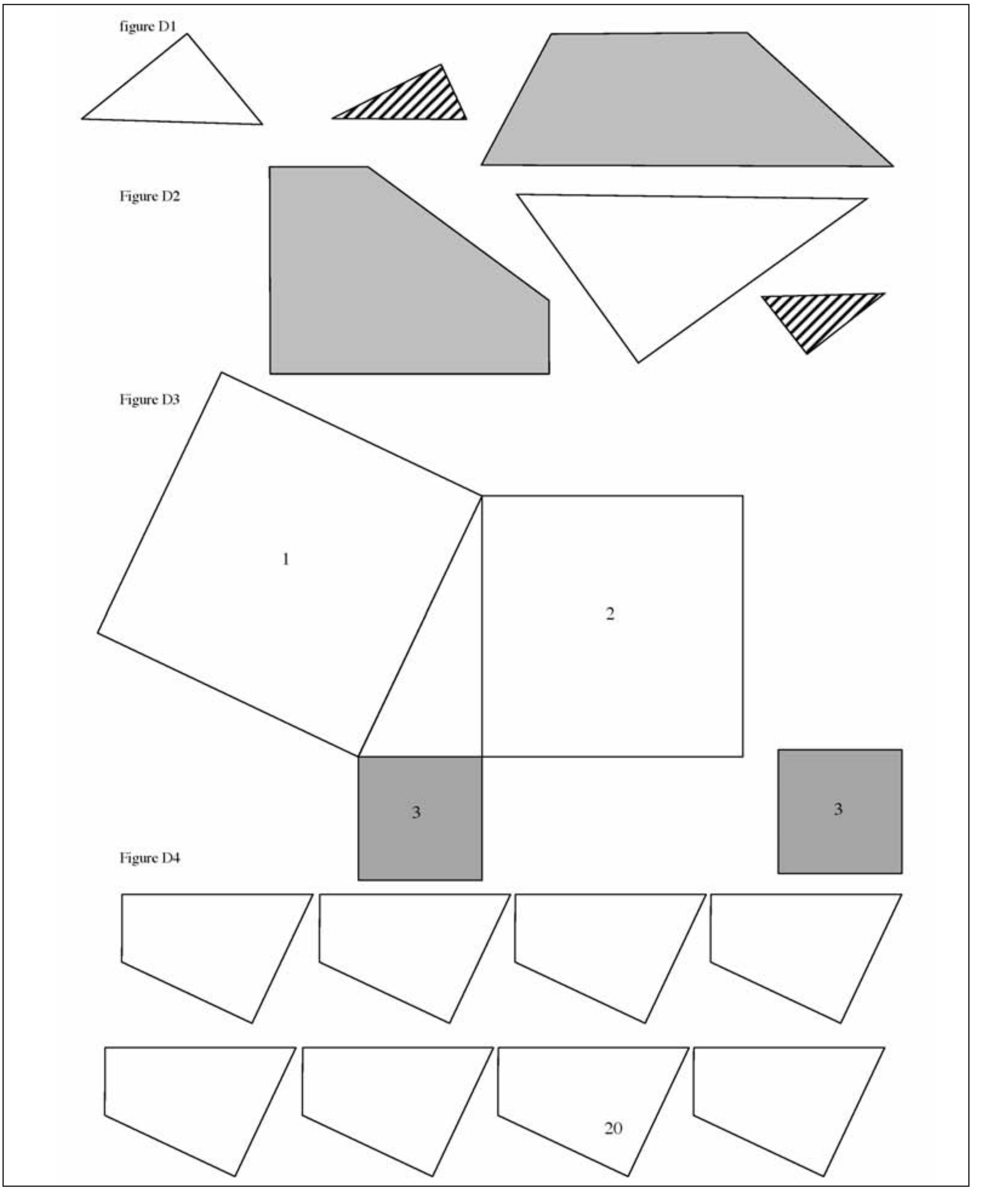




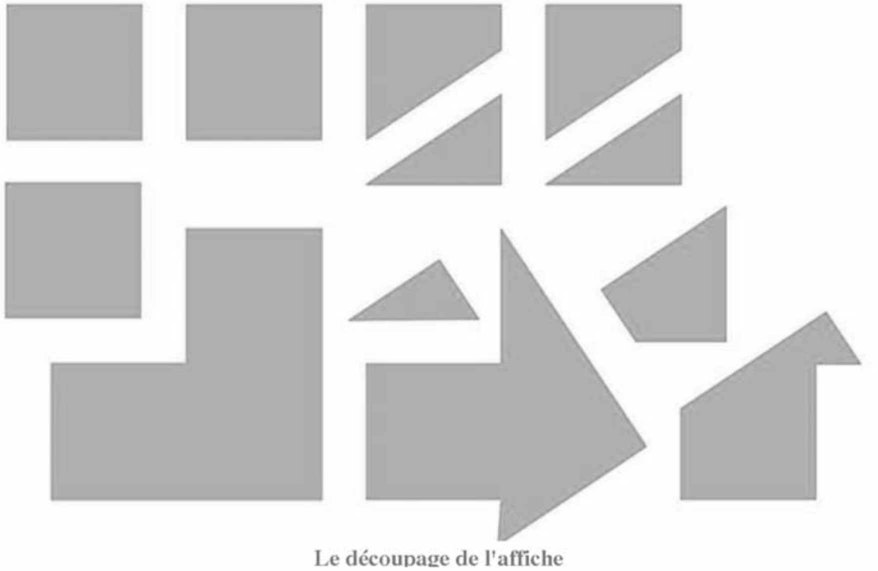
c) Avec les cinq pièces restantes, reconstituer le carré 1.
2) Expliquer quelle construction permet d'obtenir les quadrilatères à partir du carré.
3) Expliquer pourquoi le carré 3 avec les quatre quadrilatères du carré 2 permettent de reconstituer le carré 1.
4) Quel théorème célèbre illustrent ces découpages ?
Exercice 8 :
1) Peut-on transformer facilement la croix de Lorraine en deux carrés ?
2) Comment réaliser la fusion des deux carrés en un ?

Les figures à découper

ANNEXE D



ANNEXE E



Le découpage de l'affiche

Le second découpage