REPERES - IREM. N° 97 - octobre 2014

TEMOIGNAGE D'UNE ANNEE SCOLAIRE ORGANISEE AUTOUR DE LA DEMARCHE D'INVESTIGATION

Exemple de parcours sur la myopie

Laure GUERIN
groupe PERMES
Irem de Clermont Ferrand

Résumé : Cet article porte sur le témoignage d'un parcours d'étude et de recherche en classe de troisième sur la myopie. La pratique de la démarche d'investigation en classe, comme point d'appui de l'enseignement, nécessite une organisation matérielle, spatiale et temporelle différente de celle d'un enseignement classique. Elle suppose une organisation des traces écrites autres qu'en chapitres habituels. Elle oblige à gérer les transitions entre travail de groupes et travail en séance plénière de manière efficace. Elle permet de mettre en exergue la mise en activité et la recherche des élèves. A l'aide d'un exemple de parcours d'étude et de recherche sur l'œil réalisé avec des élèves de troisième, nous tenterons d'apporter des éléments sur cette démarche. Au fil de cette recherche, les élèves ont été amenés à s'autoriser à se poser des questions sur le problème du calcul des distances inaccessibles. Théorème de Pythagore, théorème de Thalès, trigonométrie seront alors des notions abordées au cours de cette recherche. Et dire que tout a commencé à partir de la simple question : « Moi, j'ai des lunettes et pas toi ! Pourquoi ? »

I. — Introduction

Cet article porte sur l'expérience d'une année organisée autour de la démarche d'investigation en classe de troisième. L'objectif de cet écrit est de relater les ressentis, la perception des élèves autour de cette démarche, ainsi que l'organisation qu'il a fallu mettre en œuvre pour réaliser cette démarche au sein de la pratique de classe. Il s'agit d'un témoignage qui me semble intéressant pour les enseignants qui voudraient se lancer dans une telle démarche. J'expliciterai donc la façon dont je me suis appropriée cette façon de travailler, par la description d'un parcours sur les distances inaccessibles ainsi que les différents changements qui me semblent inévitables à mettre en œuvre dans la classe. Cette envie de travailler avec les élèves à l'aide de la démarche d'investigation a été générée par l'appartenance au groupe PERMES (Parcours d'Etude et de Recherche en Mathématiques dans l'Enseignement Secondaire) de Clermont – Ferrand et ne cesse de grandir au fil du temps.

I.1. *Motivation de l'étude*

Le théorème de Thalès, tel qu'il est enseigné en classe de troisième est souvent perçu comme compliqué et dénué de sens par nos élèves. Rédiger les hypothèses leur paraît inutile et rébarbatif. En effet le calcul de longueurs par ce biais est souvent le seul objet du chapitre. Ainsi l'écriture des hypothèses dans les exercices choisis par le professeur leur parait futile, car celles-ci sont toujours vérifiées. De même, l'activité préparatoire du chapitre est souvent vu comme un échauffement, mettant en scène des pré-requis et des quotients égaux que l'on calculerait, sans trop savoir pourquoi. Ce type d'«activité » d'ostension déguisée, fait apparaître des réponses à des questions que les élèves ne se sont jamais posées. Il ne permet pas de générer le questionnement, source de motivation chez les élèves. *« On ne connaît pas un savoir si l'on ne connaît pas les raisons d'être, ou du moins quelques-unes d'entre elles, qui le rendent désirable. »* Yves Chevallard

Le découpage en chapitres, et donc « en petites marches », chacun traitant d'un thème particulier, comme par exemple le théorème de Thalès, tend à faire disparaître les questions sous-jacentes. L'enfermement dans un thème ou « *autisme thématique* » entraîne la perte de sens.

> « *Ce qu'un savoir permet de comprendre et de faire est son utilité : l'utilité d'un concept, par exemple, c'est sa capacité à permettre de comprendre et d'agir, à outiller la pensée et l'action.* » Yves Chevallard

Notre point de départ est donc de placer les élèves dans une situation de recherche dans laquelle ils devront travailler sur le choix et la pertinence des objets de savoirs à mettre en jeu. Calculer une longueur, oui ! Mais comment ? La séquence d'enseignement proposée par la suite est constituée de deux activités d'études et de recherche (AER) conçues pour des élèves de troisième n'ayant révisé aucune propriété portant sur les calculs de longueurs. Ils ont par conséquent comme point appui leurs seuls souvenirs de l'année de quatrième. Cette recherche constitue un travail échelonné sur plusieurs séances d'une heure et doit se visualiser comme un fil rouge au cours duquel les élèves progressent, chacun dans leurs groupes respectifs, dans leurs recherches. On peut assimiler les élèves à des chercheurs scientifiques et l'organisation de la classe à «*une simulation de chercheurs en activités* » (Douady, 1986). Nous envisagerons cette comparaison comme « *un horizon que l'on n'atteindra pas mais vers lequel on peut se diriger.* » (Colloque international Formes d'éducation et processus d'émancipation, Jamot, Hammoud, Triquet, Gandit, Guillaud, Gueudet, 2012, p4).

Ce parcours constitue un parcours finalisé dans lequel l'objectif est de réinvestir les notions vues en classe de quatrième sur certains calculs de longueurs, telles que le théorème de Pythagore, le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle et le théorème de Thalès dans sa version « quatrième» (triangles « emboîtés » l'un dans l'autre). Ces situations nous ont servi de point d'appui pour introduire le théorème de Thalès généralisé aux triangles dans une configuration « papillon » d'une part et la trigonométrie d'autre part : sinus et tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

I. 2. *Choix du sujet*

Le choix du parcours a pour support l'étude de la myopie.

En effet, l'optique géométrique constitue une niche écologique dans lequel le théorème de Thalès en configuration « papillon » s'épanouit. Par exemple, dans l'étude des lentilles minces, l'application du théorème de Thalès permet de trouver la

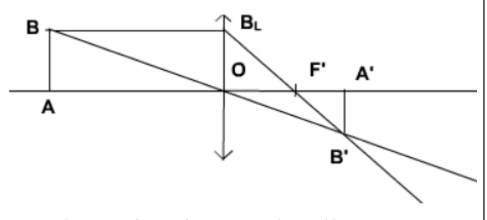


Schéma de référence (lentilles minces)

formule suivante sur le grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

De même, il permet de démontrer la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = C$$

où C est la vergence exprimée en dioptries. De plus les angles qui interviennent en optique amènent à des calculs de trigonométrie.

L'objectif du parcours reste modeste et ne sera pas de faire démontrer aux élèves la relation de conjugaison mais d'utiliser ce contexte pour faire vivre la géométrie du triangle de la classe de troisième.

Par ailleurs, notons que les élèves peuvent s'appuyer sur des connaissances antérieures dans d'autres disciplines. En effet, cette investigation est en lien direct avec les Sciences de la Vie et de la Terre. En classe de quatrième, l'œil est étudié pour sa transmission d'informations par le nerf optique dans l'étude de la communication nerveuse. L'œil peut être pris en exemple « *comme organe sensoriel et étudié pour sa transmission du message nerveux sensitif.* » (*Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008, programme de sciences de la vie et de la Terre, quatrième)*. En Sciences Physiques, les professeurs présentent « *les lentilles convergentes qui concentrent pour une source éloignée l'énergie lumineuse en son foyer.* » Ils présentent *« les éléments de l'œil sous une forme appropriée et pratiquent une démarche expérimentale pour expliquer les défauts de l'œil et leur correction (myopie, hypermétropie).* »Ils enseignent le fait que *« la vision résulte de la formation d'une image sur la rétine, interprétée par le cerveau. » (Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008, programme de sciences Physiques quatrième*)

II. — Déroulement du parcours et analyse

II.1 *Situation et enclenchement de la situation*

La séance commence par une remarque « toute simple » qui nous permet d'enclencher de manière efficace la recherche.

> « Certains dans la classe ont des lunettes et d'autres non … pourquoi ? A quoi servent les lunettes ? »

Une discussion est alors entamée au sein de la classe. Elle nous amène à discuter des problèmes de vision et de la correction que permet le port des lunettes. Les mots « myope », « astigmate » sont alors prononcés mais sans que les élèves sachent réellement à quoi ils correspondent. Leur ignorance sur le sujet est frappante. Les lunettes permettent de « mieux voir », et voilà bien le seul élément de réponse qu'ils peuvent dégager.

L'enclenchement est alors réalisé. Le besoin est né. Pour le cours suivant, je leur demande de réaliser une recherche documentaire au Centre de Documentation et d'Information, sur une encyclopédie ou sur internet sur le sujet suivant : « Qu'est ce que la myopie ? Quelles en sont les causes ? ». On remarquera par rapport au sujet de départ plus vaste, que la question est recentrée et volontairement limitée au seul cas de la myopie.

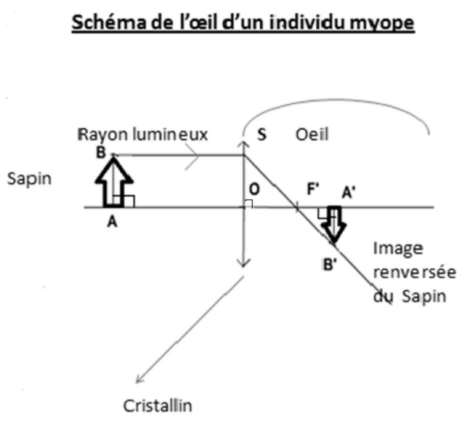
Cet enclenchement est une étape importante. Elle permet de créer une situation motivante pour les élèves et d'entamer un questionnement. Retour en classe. Les résultats de la recherche documentaire sont assez pauvres. Des pages internet copiées et imprimées ! Des schémas ou des phrases compliquées ! Malgré la pauvreté des recherches et le total désordre de ceux-ci, mon objectif est atteint : générer le questionnement. En effet, à l'issue du cours, ceux qui portaient des lunettes sont allés demander à leurs parents quel problème de vision les affectaient et pourquoi. Pour certains ils découvrent alors qu'ils sont myopes. Ils ont envie d'en savoir plus ! Et si les mathématiques permettaient d'éclairer cette situation et de comprendre ces schémas si compliqués trouvés sur internet.

Ensemble, nous réalisons une mise en commun des phrases et des schémas recueillis par les élèves. Nous en formulons un bilan. Cette étape de mutualisation est importante. Elle dure environ vingt minutes Je leur présente ensuite un diaporama sur la myopie qui résume l'ensemble de leurs recherches documentaires et qui fait appel à leurs souvenirs. Une image vue par un myope sans lunette, où les objets lointains sont flous, un schéma de l'œil, un texte expliquant les causes de la myopie (Cf. annexes). Enfin, la situation de recherche est armée, situation dans laquelle ils vont être plongés par groupes de trois ou quatre pendant plusieurs séances.

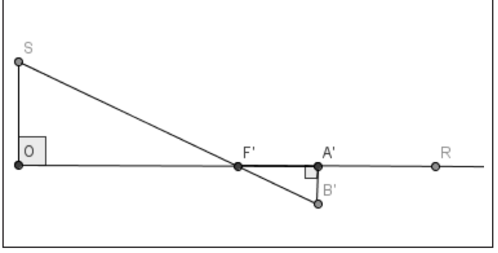
Texte de bilan :

- *Si l'image projetée ne se forme pas au niveau de la rétine alors l'image est floue.*
- *La myopie est un défaut de vision dû à un œil trop long. L'image se forme donc en avant de la rétine, ce qui entraîne une vision floue de loin tandis que la vision de près reste bonne.*

Situation n°1



Après l'observation en classe de ce schéma, la question est la suivante : « Expliquez les causes de la myopie de cet individu. Expliquez votre raisonnement par des phrases et justifiez par des calculs. » Les données numériques communiquées aux élèves sont les distances suivantes : OS (5,5 millimètres), A'B' (0,5 millimètres), OF'(16,5 millimètres) et OR (27 millimètres). Cet énoncé fait appel à un libellé qui n'est pas du tout mathématique. Il s'agit ici de faire appel aux mathématiques pour nous aider à comprendre la situation. L'exercice se résume à une configuration « papillon » de Thalès dans laquelle une distance manquante est à trouver.



Le point R représentant l'emplacement de la rétine n'est pas placé sur la figure donnée aux élèves. L'objectif de l'activité est de calculer F'A', d'en déduire l'inégalité OA' < OR et par suite de conclure à la myopie de cet œil en utilisant le fait que l'image en A' est placé avant la rétine R.

Les élèves se retrouvent face à une « configuration papillon » de Thalès dans laquelle ils doivent calculer la longueur F'A' à partir des trois données OS, A'B' et OF', situation relativement simple pour un élève de troisième qui aurait déjà étudié ce type de configuration. Oui, mais rappelons nous qu'à ce moment précis, les élèves plongés dans la recherche n'ont jamais étudié une telle configuration et ne peuvent donc pas la reconnaître !

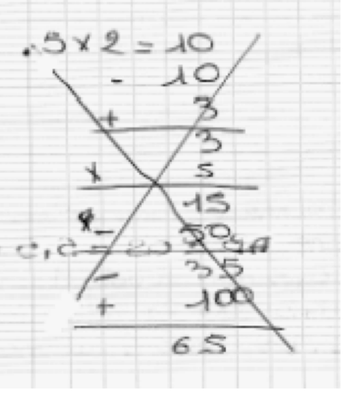
II.2. *Le début des recherches des élèves*

Le début de la recherche est difficile. Ils commencent par écrire au brouillon un discours ou des calculs incohérents. Cependant cette étape me parait être indispensable pour dénouer l'enjeu de l'activité. Le premier jalon qu'ils ont à réaliser est d'identifier la question mathématique sous-jacente au problème. Nous verrons comment, au fil des recherches, le discours évoluera. Voici un exemple de phrase et un exemple de calculs caractéristiques d'un essai de recherche par les élèves :

> *« La personne est myope car la flèche 0S = 5,5 mm A'B' =0,5 mm. Il voit de moins en moins que le AB car la rétine mesure que 0,5 donc A'B il lui manque. »*

Ou encore les calculs de l'encadré ci-contre...

On remarque ici l'envie irrésistible des élèves à vouloir calculer à tout prix ! Quels calculs ? Ils ne savent pas ! Peut-être pourrions-nous interpréter cet écrit par le phénomène de



contrat didactique, mis en évidence par Guy Brousseau. Le comportement de l'élève n'est pas à inscrire simplement dans une logique des savoirs mis en jeu dans ce problème mais aussi dans une logique de la situation. Ainsi serait-ce l'effet de l'application par les élèves de la règle suivante « La réponse à un problème de mathématiques est une série de calculs qui repose sur les nombres de l'énoncé ». « *C'est ce qui détermine explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement ce que chaque partenaire (professeur et élèves) va avoir à charge de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre comptable devant l'autre.*» (Guy Brousseau)

Cependant, ils se rendent vite compte que cela n'a ni queue ni tête et barrent leurs essais ! Ma position, en tant que professeur à ce moment précis me semble primordiale. Je pourrais les guider en leur demandant d'encadrer ou de souligner les mots importants. Mon positionnement est tout autre. En effet nous pourrions évoquer à ce moment précis le problème de lecture de consignes et l'échec des élèves qui ne lisent pas correctement ou suffisamment les énoncés. Cela serait bien les tromper de leur faire croire que leur difficulté vient uniquement d 'un problème de français. La prise d'informations, le tri et la mise en relation d'informations sur des documents ou lors de recherche va au-delà d'une simple difficulté de lecture aussi attentive soit-elle. Ma position est donc de les laisser « patauger » afin qu'ils construisent, par eux – mêmes et grâce au groupe, leur raisonnement. Mes interventions se résument à les encourager à poursuivre, et à les rassurer. Nos élèves sont relativement inhibés et n'osent pas prendre d'initiatives de peur de faire « faux ». Il faut les pousser à produire et leur donner l'autorisation de se tromper : le droit à l'erreur. Petit à petit, à force de tourner le sujet dans tous les sens, ils s'orientent vers le calcul de longueurs, et notamment le calcul de F'A'.

La myopie est due à l'image qui se projette avant la rétine.

II.3. *Poursuite des recherches : vers le calcul de longueurs*

Au bout d'une demi-heure, tous les groupes cherchent à calculer OA' ou F'A' mais par quel moyen ? Des idées fusent :

— le théorème de milieux oui mais il n'y a pas de milieux !

— le cosinus : bien trop compliqué !

— Pythagore mais c'est bien sûr !

~~Dans le triangle SOF' rectangle en O :~~
D'après le théorème de Pythagore :
SF'² = OS² + OF'²
SF'² = 5,5² + 16,5²
SF'² = 302,5
SF' = √302,5
SF' = 17,39 (arrondi au centième près)

Ils peuvent effectivement appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle SOF' rectangle en O mais la longueur qu'il permet de calculer n'est pas la longueur cherchée. Ils rayent donc leurs écrits. Notons que tous les groupes sont passés par cette étape d'application du théorème de Pythagore : théorème qui manifestement a marqué leur année de quatrième !

Un groupe part dans une tout autre voie, celle de réaliser la figure en vraie grandeur et de trouver la position du point R tout simplement en le plaçant sur la figure. Cependant les mesures données sont 5,5 millimètres, 0,5 millimètre… Bref, la figure réalisée en vraie grandeur est beaucoup trop petite et ne permet pas de voir quoique ce soit ! Ils poursuivent leur idée en prenant une échelle. Ils transforment les millimètres en centimètres : 0,5 centimètres ; 16,5 centimètres mais aussi 27 centimètres … Bref cette fois-ci la figure est trop grande ! « On a besoin d'une grande feuille, madame ! ». Ce groupe, composé d'élèves faibles, réussira à conclure grâce à la figure réalisée sur une feuille A3. Certains groupes, après l'échec de l'utilisation du théorème de Pythagore, orientent leurs recherches vers les agrandissements-réductions, de manière plus ou moins bien exprimée.

Nous savons que le sapin BA et A'et B' sont symetrique au sapin AB. Cependant après la symetrie il y a eu une réduction qui explique que le sapin AB est plus grand que le sapin A'B'. (÷ 11)

Ou encore

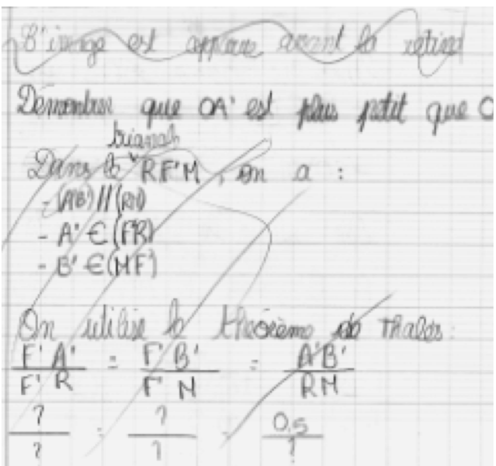
A'O = F'A' + OF'
A'O = ? + 16,5

AB = 5,5 mm
A'B' = 0,5 mm

AB	A'B'
5,5	0,5

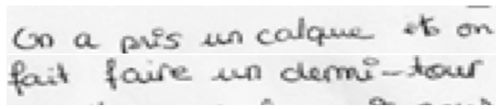
× 11

D'autres essaient d'utiliser le théorème de Thalès dans la version qu'ils connaissent de la classe de quatrième. Leur souci est de trouver dans quels triangles l'appliquer : les triangles doivent être emboîtés l'un dans l'autre avec deux côtés parallèles. Ils tracent et construisent alors des triangles satisfaisant ces conditions.



Ils se retrouvent avec des quotients où seul un nombre est connu et ne peuvent pas ainsi conclure.

Ce sont ces essais non fructueux qui donnent du sens aux théorèmes qu'ils utilisent. Ils se rendent compte que pour pouvoir utiliser cette propriété non seulement les triangles doivent être emboîtés l'un dans l'autre, avec présence de droites parallèles mais aussi qu'il faut connaître trois des longueurs pour pouvoir conclure. La reconnaissance et la création de figures-clef ne suffit pas ici ! L'idée de la symétrie centrale surgit alors dans les différents groupes qui essaient d'utiliser le théorème de Thalès, mais pas toujours exprimé avec les termes adéquats. Un groupe me demande un calque et fait faire un demi-tour à leur triangle afin d'« emboiter » de manière pratique le « petit triangle » à l'intérieur du « grand ».



D'autres me diront dans le patois bourbonnais cher à leurs racines : « *On tourne le triangle et on y met dedans* » et effectueront de la même façon une rotation de 180 degrés du « petit triangle » pour l'insérer dans « le grand » ou du « grand » pour l'insérer dans le « petit ».

Après ces recherches laborieuses les groupes finissent par produire des résultats. Trois pistes peuvent être dégagées :

— Une figure à l'échelle sur une feuille A3.

— L'utilisation des agrandissements-réductions

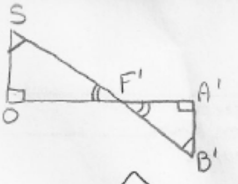
— L'utilisation de la symétrie centrale (de manière plus ou moins explicite) puis de l'égalité des quotients égaux dans deux triangles relevant d'une situation de Thalès de quatrième.

III. 4. *Productions finales*

Voici des exemples de productions finales.

Dans le premier exemple (encadré 1 de la page suivante), notons que les élèves commencent par démontrer que les triangles OSF' et F'A'B' sont semblables, notion disparue du programme de collège mais dont il reste quelques scories sous la forme de triangles agrandis ou réduits. Le triangle SOF est bien agrandissement du triangle F'A'B', les élèves s'en assurent.

Le deuxième exemple de production finale (encadré 2) met en jeu la symétrie centrale puis l'utilisation du théorème de Thalès tels qu'il a été vu en classe de quatrième.



Les angles $\widehat{SOF'}$ et $\widehat{F'A'B'}$ sont égaux car ce sont des angles droits.

Les angles $\widehat{SF'O}$ et $\widehat{A'F'B'}$ sont égaux car ce sont des angles opposés.

Les angles $\widehat{OSF'}$ et $\widehat{F'B'A'}$ sont égaux car la somme totale des angles (180°) moins la somme des deux autres angles est au dernière angle.

Cet individu est myope car l'image se forme avant la rétine.

5,5 : 0,5 = 11 Donc OA' = 18 mm

16,5 : 11 = 1,5

16,5 + 1,5 = 18

A'R = OR − OA' Donc A'R = 9 mm

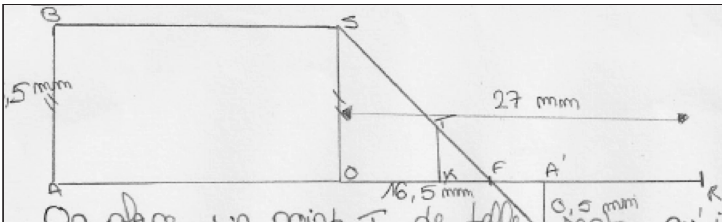
A'R = 27 − 18

A'R = 9

L'image se forme 9 mm avant la rétine.

Donc cet individu est myope.

Encadré 1



On place un point T de telle sorte qu'il soit symétrique au point B' par la symétrie centrale du point F.

On place un point K de telle sorte qu'il soit symétrique au point A' par la symétrie centrale du point F.

On obtient un triangle SOF avec : $T \in (SF)$
$K \in (OF)$

et $(SO) // (A'B')$ car si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

On utilise le théorème de Thalès.

$$\frac{FT}{FS} = \frac{FK}{FO} = \frac{TK}{SO}$$

$$\frac{FK}{16,5} = \frac{0,5}{5,5}$$

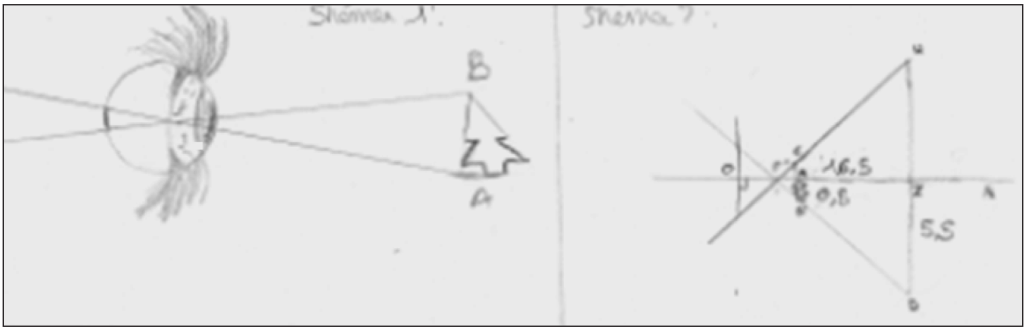
$16,5 \times 0,5 : 5,5 = 1,5$

$FK = 1,5$ mm $= FA'$

$OF + FA' = 16,5 + 1,5 = 18$

Donc l'image projetée renversée du sapin se forme à 18 mm du cristallin au lieu de se former sur la rétine qui se trouve à 27 mm du cristallin.

Encadré 2



Voici (ci-dessus) une autre version envisagée par les élèves. Ils effectuent une symétrie centrale du « grand » triangle puis symétrisent le tout par rapport à (OA'). Ils se ramènent également au théorème de Thalès, vu en quatrième.

De cette recherche, découlera une phase de bilan, où seront mises en avant les productions des groupes. On dégagera deux pistes de travail au programme de la classe de troisième : les agrandissements-réduction et le théorème de Thalès. Dans le bulletin officiel explicitant les programmes de mathématiques de la classe de troisième, on peut trouver : « *Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droites sécantes (Configuration de Thalès)* » ainsi que la phrase suivante

> « *Il est attendu des élèves qu'ils sachent dans des situations d'agrandissement ou de réduction retrouver des éléments (longueurs ou angles) de l'une des deux figures connaissant l'autre.* »

Cette phase de bilan permet de valider certains raisonnements par la classe et d'institutionnaliser les savoirs. Notons qu'à cette étape on reparle du cosinus d'un angle qui était apparu dans les pistes solutions mais qu'ils n'avaient pas exploitées. De manière très spontanée, on parle des définitions du sinus et de la tangente à propos des touches de la calculette qui intriguent tant les élèves. La démonstration du théorème de Thalès dans le cahier de leçon à partir de la symétrie centrale et du théorème des quotients égaux vu en classe de quatrième ne pose aucun problème. Cette démonstration qui d'habitude laisse les élèves perplexes ne soulèvera aucune difficulté. On notera de plus que les erreurs habituelles et classiques au niveau de l'écriture des quotients n'ont pas été rencontrées avec cette classe. Pas de moyen mnémotechnique ! Un simple retour à l'activité préalable, par l'utilisation d'une symétrie centrale de leurs points leur permet de trouver aisément les quotients égaux.

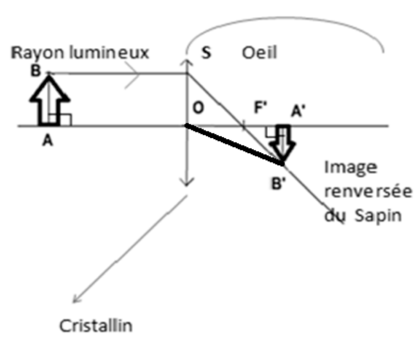
Après cette phase de bilan et travail de la technique, une deuxième activité leur est proposée. Ils sont plongés dans la même situation, mais dans laquelle les données ont changé. Cela a – t- il une influence ? Voilà bien la question que les élèves se posent.

III. — Relance de l'étude : vers la trigonométrie

III.1. *Sujet et début des recherches*

Voici l'énoncé de la deuxième activité d'études et de recherche.

Schéma de l'œil d'un individu myope



Les données sont les suivantes :

$\widehat{A'OB'} = 1{,}6°$

$A'B' = 0{,}5$ mm

On a aussi :

OR = Distance du cristallin à la rétine

OR = 27 mm

Cette situation se ramène à celle de la connaissance dans un triangle A'B'O rectangle en A', d'un angle aigu et de la longueur du côté opposé à cet angle. On veut calculer la longueur du côté adjacent. Il s'agit là d'une situation trigonométrique classique mais dont les élèves à cette étape de l'année ignorent tout ! Ils connaissent cependant les définitions du sinus et de la tangente, vues au détour du bilan de la première situation. Ils ne l'ont cependant jamais utilisé. Ils reconnaissent tout de suite la situation comme étant familière et se demandent pourquoi on recommence ! Ils comparent donc les données de la deuxième situation avec celles de la première et repèrent un changement, notamment en ce qui concerne la donnée de l'angle. Ils supposent que cet angle a une influence sur l'outil à choisir. Ils prennent conscience qu'il s'agit d'utiliser des outils autres que ceux utilisés dans la première situation et cherchent des pistes de solutions dans leurs livres. L'accès à internet, le tableur ou encore le manuel de la classe sont effectivement des ressources autorisées durant toutes les recherches et font partie intégrante des aides disponibles.

III.2. *Trigonométrie et obstacles*

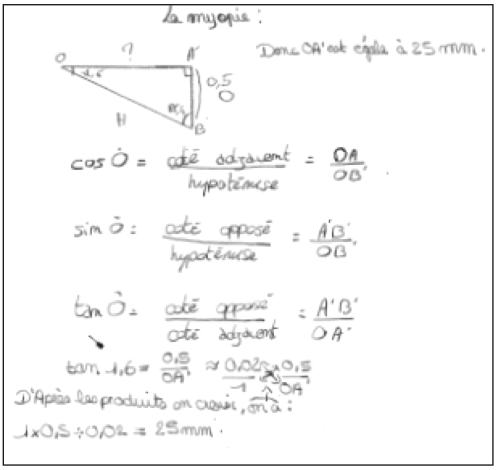
Tous les groupes s'orientent rapidement vers la trigonométrie. La définition de cosinus, sinus et tangente pose problème. Ils s'exclament « C'est quoi un cosinus ? ». Des confusions apparaissent entre le sinus de l'angle et la mesure de l'angle. Ils écrivent « sin SOB = 1,6° ». Mais d'autres questionnements surgissent. Faut-il utiliser le sinus, le cosinus, la tangente ? Faut-il en choisir deux ? Ou un seul ? Et si oui, comment ? Voilà des questions auxquelles je ne pensais pas auparavant en enseignant la trigonométrie. Avant de comprendre comment choisir, il est incontournable de comprendre qu'il faut choisir. Pris dans nos habitudes, nous ne nous posons plus certaines questions qui sont pourtant belles et bien importantes. Pour répondre à cette question, les élèves mobilisent plusieurs stratégies. Je les laisse seuls face à leurs interrogations. La première consiste à vouloir tout utiliser. Ils écrivent le cosinus de l'angle en jeu, le sinus et la tangente et se rendent compte après coup que le cosinus et le sinus sont inutiles.

Pour montrer que l'individu est myope, il faut montrer que $OA' < 27$.

$$\left.\begin{array}{l} \cos \hat{O} = \cos 1{,}6° \simeq 0{,}9996 \simeq \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \simeq \dfrac{OA'}{OB'} \\ \sin \hat{O} = \sin 1{,}6° \simeq 0{,}279 \simeq \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \simeq \dfrac{A'B'}{OB'} \simeq \dfrac{0{,}5}{OB'} \end{array}\right\} \text{inutil}$$

$$\tan \hat{O} = \tan 1{,}6 \simeq 0{,}0279 \simeq \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \simeq \dfrac{A'B'}{OA'} \simeq \dfrac{0{,}5}{OA'}$$

Ou encore, ils utilisent une flèche pour montrer que c'est cette définition qu'ils utiliseront.



la myopie :

Donc OA' est égale à 25 mm.

$\cos \hat{O} = \dfrac{\text{coté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{OA}{OB'}$.

$\sin \hat{O} : \dfrac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{A'B'}{OB}$.

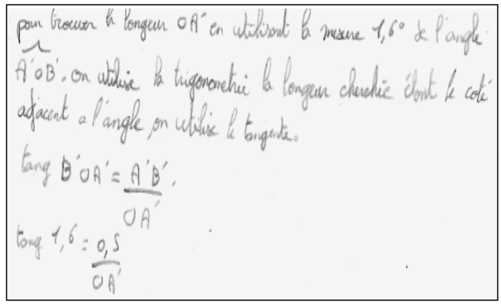
$\tan \hat{O} = \dfrac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}} = \dfrac{A'B'}{OA'}$

$\tan 1{,}6 = \dfrac{0{,}5}{OA'} \approx \dfrac{0{,}02}{1} = \dfrac{0{,}5}{OA'}$

D'Après les produits en croix, on a :

$1 \times 0{,}5 \div 0{,}02 = 25\,mm$.

D'autres encore décortiquent le problème et raisonnent : pour trouver la longueur



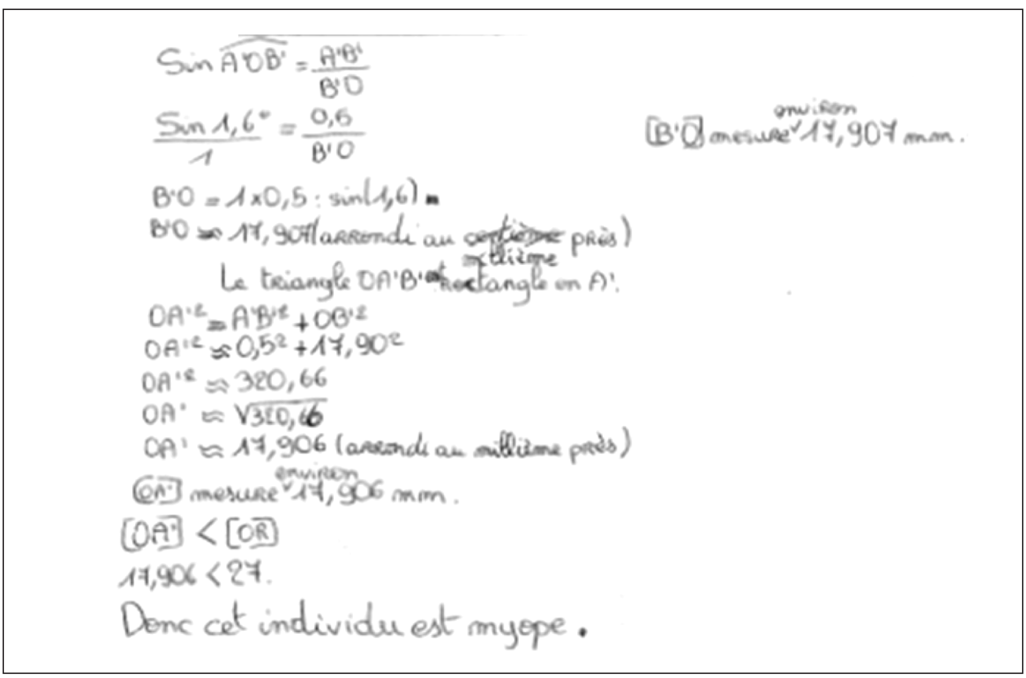
pour trouver la longeur OA' en utilisant la mesure 1,6° de l'angle $\widehat{A'OB'}$. On utilise la trigonometrie la longeur cherchée étant le coté adjacent a l'angle on utilise la tangente.

$\tan B'OA' = \dfrac{A'B'}{OA'}$.

$\tan 1{,}6 = \dfrac{0{,}5}{OA'}$

OA', côté adjacent, en utilisant la longueur du côté opposé, on utilise la tangente, qui fait intervenir ces deux longueurs en jeu dans ce problème.

Un autre groupe considère au hasard le sinus de l'angle et choisit de conclure grâce au théorème de Pythagore (ci-dessous).



$\sin \widehat{A'OB'} = \dfrac{A'B'}{B'O}$

$\dfrac{\sin 1{,}6°}{1} = \dfrac{0{,}6}{B'O}$

$B'O = 1 \times 0{,}5 : \sin(1{,}6)$

$B'O \approx 17{,}907$ (arrondi au ~~centième~~ millième près)

Le triangle OA'B' est rectangle en A'.

$OA'^2 = A'B'^2 + OB'^2$

$OA'^2 \approx 0{,}5^2 + 17{,}90^2$

$OA'^2 \approx 320{,}66$

$OA' \approx \sqrt{320{,}66}$

$OA' \approx 17{,}906$ (arrondi au millième près)

[OA'] mesure environ 17,906 mm.

$[OA'] < [OR]$

$17{,}906 < 27$.

Donc cet individu est myope.

[B'O] mesure environ 17,907 mm.

Ce groupe, grâce à l'utilisation du théorème de Pythagore m'offrira un magnifique tremplin, sans le savoir, pour amener la relation trigonométrique « $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ». Tous les groupes finissent par trouver le résultat. La liaison avec le problème de départ ayant été déjà été traitée avec la première situation, les conclusions sont rapides et ne posent pas de problème.

Une phase de mutualisation des résultats est alors entamée avec une restitution orale des groupes et débat dans la classe. On revient sur les notions, sur les confusions qui ont émergées et le choix du sinus, cosinus ou de la tangente.

III.3. *Conclusions des séances*

Dans ces deux situations, l'analyse des données a permis aux élèves de prendre conscience de l'importance des hypothèses. Elles prennent du sens et seront vécues, non pas comme rébarbatives et inutiles mais comme une aide à la décision pour choisir les outils mathématiques à utiliser. Les savoirs ont été construits. Cette démarche s'inscrit dans une conception dans laquelle les élèves vis-à-vis du savoir en jeu ont des responsabilités importantes. Cette démarche implique la construction d'un contrat spécifique dans la classe qui oriente le professeur vers des « *objectifs d'autonomisation des élèves* ». (Colloque international Formes d'éducation et processus d'émancipation, Jamot, Hammoud, Triquet, Gandit, Guillaud, Gueudet, 2012). Cette habitude de recherche pratiquée au quotidien permet aux élèves de s'engager dans des tâches mathématiques. Cette plus grande liberté permet de faire plus facilement des ponts entre les notions comme agrandissement-réduction et théorème de Thalès, ou encore trigonométrie, théorème de Pythagore et relation trigonométrique « $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ».

IV. — Évolution de l'organisation de la classe et conclusion

IV.1. *Les évolutions*

D'un point de vue spatial, l'organisation des tables en îlots (groupes de trois ou quatre élèves) permet une transition facile, simple entre les séances plénières et les séances de recherche. La circulation du professeur y est aisée. De plus, cette disposition facilite la différenciation pédagogique.

Les traces écrites sont aussi amenées à évoluer. En effet, un tel enseignement repose sur des questions génératrices d'études. L'institutionnalisation se base à partir de ces grandes questions. Exemple : comment calculer une distance inaccessible ? La leçon apparaît alors comme une réponse, comme une solution à un problème. Un cahier de recherche est à la disposition des élèves pour noter les avancées et les pistes de travail. D'autre part, la manipulation d'objets en lien avec le problème posé permet aux élèves de visualiser les situations et donc d'avoir une meilleure conceptualisation mathématique du problème. Au niveau temporel, la démarche d'investigation et les travaux de recherche nécessitent de laisser du temps aux élèves en classe pour s'approprier les problèmes, dégager des pistes, qui d'ailleurs se révèlent parfois infructueuses.

Il faut laisser de la place à l'erreur et surtout le droit à l'erreur. La prise en compte des conceptions des élèves me parait être un facteur décisif. Si certains élèves au départ éprouvent de la réticence à entrer dans la complexité. « C'est trop dur, madame, c'est pas pour moi ça ! » me diront-ils. La lueur qui se dégage lorsqu'ils trouvent une piste suffit au professeur pour continuer dans cette voie.

Les obstacles à dépasser sont nombreux avant que les élèves se lancent dans une démarche d'investigation. A la fois des obstacles provenant du changement de contrat et des obstacles inhérents à toute recherche. Il ne s'agit pas d'écrire ce que le professeur attend mais d'écrire ce que le savoir commande. Cela génère au départ des angoisses chez les élèves et les déstabilise : « Il faut faire quoi ? Vous voulez quoi ? ». Du point de vue du professeur, il faut savoir «se retenir» pour ne pas donner la solution aux élèves tout de suite, savoir jouer le jeu et laisser ouvertes les investigations. Le rôle du professeur est changé. Il ne s'agit plus d'être le seul détenteur du savoir mais d'être le directeur de l'étude.

Quant au vécu de l'erreur, il est aussi transformé. Lorsqu'un groupe se trompe, il ne s'agit pas de dire aux élèves «vous vous êtres trompés». Ils doivent comprendre qu'ils se sont trompés parce que le savoir le leur montre et leur prouve. Autrement dit, il s'agit de pousser les élèves à penser par eux-mêmes. Tout ceci n'est possible que si le professeur se sert du poids du groupe et laisse les élèves aller jusqu'au bout de leurs pistes. Il est nécessaire de gérer les différentes solutions trouvées par les élèves et de savoir rebondir pour les amener vers les finalités du parcours d'études et de recherches.

IV. 2. *Conclusion*

Ce parcours autour de l'œil a permis aux élèves de travailler autrement les théorèmes de géométrie inscrits au programme de la classe de troisième. La pratique de la démarche d'investigation remet en cause nos pratiques au sein de la classe. Mais à en juger la motivation que les élèves ont montré tout au long de cette recherche, on peut espérer qu'elle aura permis de changer pour certains le rapport qu'ils entretenaient avec les mathématiques. En tout cas, pour moi le rapport que j'ai avec l'enseignement a été aussi bouleversé.

Remerciements à
Robert Noirfalise et Thierry Lambre.

Bibliographie

Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008 Programmes de collège de mathématiques, Sciences physiques et Science de la Vie et de la Terre. Ministère de l'E.N.

BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage

CHEVALLARD, Y (1985) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage

JAMOT, HAMMOUD, TRIQUET, GANDIT, GUILLAUD, GUEUDET,(2012) Colloque international Formes d'éducation et processus d'émancipation, Actes en ligne http://cread.espe-bretagne.fr/spip.php?rubrique131

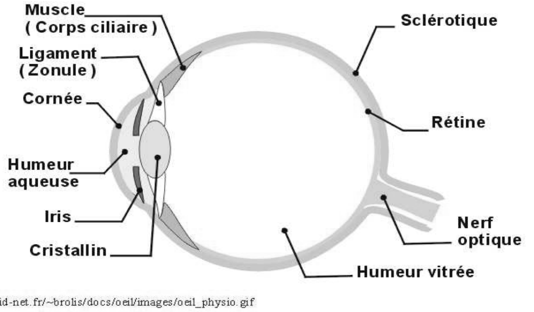
SAMADI R. *Cours d'optique géométrique* : Université Pierre et Marie Curie, Paris, p 20 http://www.edu.upmc.fr/physique/lp103ElectOpt/doc_opt/optique.pdf

ANNEXES

La tour Eiffel vue par un myope sans correction

http://www.institutdelamyopie.com

Schéma de l'œil vu en Sciences de la Vie et de la Terre



perso.id-net.fr/~brolis/docs/oeil/images/oeil_physio.gif

Schéma étudié en Sciences Physiques