METTRE EN ŒUVRE L'INVESTIGATION EN CLASSE A PARTIR D'UNE " VRAIE QUESTION "

L'exemple de l'Alignement du XXIème siècle

Carole LE BELLER
Marie-Pierre LEBAUD
Irem de Rennes

Résumé : Nous présentons une des activités produites par un membre du groupe de l'Irem de Rennes ayant pour objectif de concevoir des ressources contribuant à la mise en œuvre de démarches d'investigation par les professeurs de collège. Après avoir précisé ce que nous appelons démarche d'investigation, nous verrons comment cette situation est présentée pour mettre les élèves en situation de recherche, quel y est le rôle/la place de l'enseignant, comment la dévolution se fait et quelles notions mathématiques ou transverses sont réinvesties ou introduites via cet « Alignement ».

I. — Introduction

L'emploi de démarches d'investigation (DI) dans l'enseignement des mathématiques a donné lieu à de nombreux travaux de recherche (Loisy et al. 2010). Cependant, pour les professeurs de collège, la mise en œuvre de DI reste délicate. Quelles ressources peuvent être utilisées pour préparer un enseignement selon des DI ? Quand peut-on considérer que les élèves pratiquent réellement l'investigation, en mathématiques ? Quelles ressources peut-on concevoir et diffuser pour soutenir la mise en place de DI ? Ce sont les questions que notre groupe[1] étudie à l'Irem de Rennes.

En lien avec le thème de ce numéro spécial, nous présentons une activité bâtie à partir de l'étude d'une œuvre d'art.

Nous exposons d'abord des points retenus comme importants, pour délimiter ce qui relève de la démarche d'investigation. Nous présentons ensuite la situation que nous avons expérimentée dans plusieurs classes : « *l'Alignement du XXIème siècle* ». Nous posons enfin la question de la possibilité de diffusion et de la réussite du transfert de cette situation.

1 Sonia Grodowski (Collège Évariste Galois, Montauban - 35), Ghislaine Gueudet (CREAD, ÉSPÉ-Université de Bretagne Occidentale), Carole Le Beller (Collège les Ormeaux, Rennes - 35), Marie-Pierre Lebaud (CREAD, Université de Rennes 1), Yann Rouault (Collège Jean Charcot, Saint-Malo - 35), Christophe Pépino (Collège Jean Macé, Saint-Brieuc - 22)

II. — L'investigation en mathématiques au collège ?

Les programmes de mathématiques[2] mis en place en France au collège à la rentrée 2009, dans la continuité des programmes de primaire, mettent en avant les démarches d'investigation (DI).

Dans l'introduction commune aux disciplines scientifiques, la succession non-linéaire, et des allers-retours souhaitables, de sept moments essentiels d'une séquence d'investigation constituée en général de plusieurs séances relatives à un même sujet d'étude sont identifiés et détaillés. En mathématiques, dans le préambule pour le collège, il est précisé : « *Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen. À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.* ». L'accent est mis sur l'esprit de découverte et de recherche de l'élève. Aucune forme de travail (en groupe, seul) n'est imposée. Cela dit, « *les modes de gestion des regroupements d'élèves, du binôme au groupe-classe selon les activités et les objectifs visés, favorisent l'expression sous toutes ses formes et permettent un accès progressif à l'autonomie.* »

2 Extrait des programmes du collège, programmes de l'enseignement de mathématiques, Bulletin Officiel spécial n°6 du 28 août 2008

Quand peut-on considérer que les élèves pratiquent l'investigation en classe de mathématiques au collège ? Différents critères doivent être pris en compte comme l'ont montré les recherches sur cette question (Matheron, 2010). Gueudet & Lebaud (2012) ont montré, dans une synthèse de la littérature de recherche concernant la formation des enseignants aux DI, que les travaux sur ce sujet identifient deux dimensions des DI : d'une part questionner le réel et faire le lien entre le réel et les concepts scientifiques, d'autre part, « *mener une enquête* ». Définir le réel dans la classe de mathématiques n'est pas aisé : est-ce modéliser une situation issue de la « vie courante » ? Est-ce une situation familière aux élèves ? Est-ce la possibilité de manipulations ? Le « réel » qu'il conviendrait de prendre en compte serait alors plutôt « à quel point la question posée est-elle pour les élèves une réelle question » ? Dans cette perspective, la manipulation peut, bien entendu, jouer un rôle. Cependant, dans certains cas, les élèves ne peuvent pas mener d'expérimentations ; mais on considérera tout de même qu'ils pratiquent l'investigation, s'ils sont impliqués dans la recherche d'une solution. Ils mènent alors une enquête dans le sens où ils reconnaissent les questions pertinentes et doivent trouver les moyens d'y répondre.

Un élément central dans la mise en pratique en classe de DI est la place de la preuve dans cet enseignement. Peut-on pratiquer une DI qui ne débouche pas sur une démonstration ? Cette question est spécialement sensible au collège où démarre l'apprentissage de la démonstration. L'activité que nous présentons a été faite en classe de troisième où les preuves ont pu être faites.

III. — Une situation partant d'une question

Une sculpture intrigue les passants dans un quartier rennais en pleine expansion. Tout d'abord, elle paraît petite puis, de l'intérieur, dans l'espace, elle est monumentale. Tout d'abord, elle paraît mathématiquement simpliste puis, vue du ciel et vue de la terre, elle est d'une grande complexité scientifique et d'une extraordinaire richesse d'esprit. Polémique à sa création, elle est désormais au centre d'un quartier qui la protège. Cette sculpture est celle d'Aurelie Nemours. Beaucoup ne la connaissent pas. Qu'est-ce que l'Alignement du XXIème siècle ?

III. 1 *Genèse et évolution de l'idée de la situation*

1. *Proposition de l'étude de l'œuvre en histoire des arts au collège (mathématiques – arts plastiques) et présentation sommaire de l'œuvre*

En 2010, au collège public Les Ormeaux de Rennes, Andrée Chapalain, professeure d'arts plastiques, sollicite Carole Le Beller, professeure de mathématiques, pour travailler ensemble en histoire des arts avec une classe de troisième sur les thématiques « Arts, ruptures, continuités » et « Arts, espace, temps ». D'une part, elle propose de travailler sur des œuvres d'arts de Georges Folmer (1895-1977) et d'autre part sur l'Alignement du XXIème siècle d'Aurelie Nemours (1910-2005).

Ces deux artistes peintres français appartiennent, de 1960 à 1965, au même groupe d'artistes *Mesure*, fondé par Georges Folmer pour rassembler les artistes se réclamant de l'abstraction géométrique : ordre, harmonie et pureté, dans l'esprit d'atteindre la synthèse des arts comme forme d'universalité.

Réalisée à Rennes en 2004-2005 « L'Alignement du XXIème siècle » d'Aurelie Nemours est une sculpture composée de soixante-douze colonnes de granit. Parallélépipédiques rectangles à base carrée, hautes de 4,5 m et larges de 90 cm, ces colonnes sont disposées selon une grille régulière 8 lignes (espacées de 2,7 m l'une de l'autre) par 9 lignes (espacées de 1,8 m l'une de l'autre). Cette œuvre est orientée de telle façon que les colonnes et leur ombre soient alignées à midi solaire et que la vue de dessus compose un dessin de lignes sombres parallèles entrecoupées de carrés clairs. Aurelie Nemours a peint des carrés et des rectangles pendant plus d'une quarantaine d'années. Elle bannissait l'oblique et la courbe. Sa seule sculpture est l'Alignement du XXIème siècle. Elle correspond au troisième projet imaginé par Aurelie Nemours. Le premier est un cube de trois mètres par trois mètres constitué de soixante-douze colonnes comme l'Alignement actuel, mais dans lequel il est impossible de se promener. Après avoir arpenté les Alignements de Carnac, elle imagine son second projet semblable à l'Alignement actuel sauf que la hauteur des colonnes est de 3,6 m au lieu de 4,5 m actuellement. Au final, l'Alignement est une mise en espace de l'une de ses toiles issue d'une série : « le rythme du millimètre »[3], fait à partir d'un travail sur des formes géométriques minimales dont le carré défini comme le centre d'une croix (cf. fig. 1 page suivante).

2. *Une première activité ne privilégiant pas de démarches d'investigation*

La première activité proposée aux élèves de troisième ne privilégie pas de démarches d'investigation. En classe de mathématiques, elle consiste d'une part en la recherche simple d'une échelle de réduction et de ses calculs pour la construction d'une maquette du monument, et d'autre part en la coréalisation de la maquette avec deux classes de sixième.

3 : Cf. photographie d'Aurelie Nemours avec l'une de ses toiles à l'adresse : http://www.galerie-la-ligne.ch/—bienvenue/les-artistes/nemours-aurelie.html

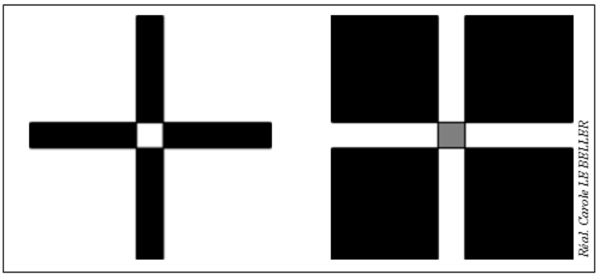


Fig. 1 – *Modélisations géométriques du carré cœur d'une croix*

Fig. 2 – *Photographie de l'Alignement du XXIème d'Aurelie Nemours*

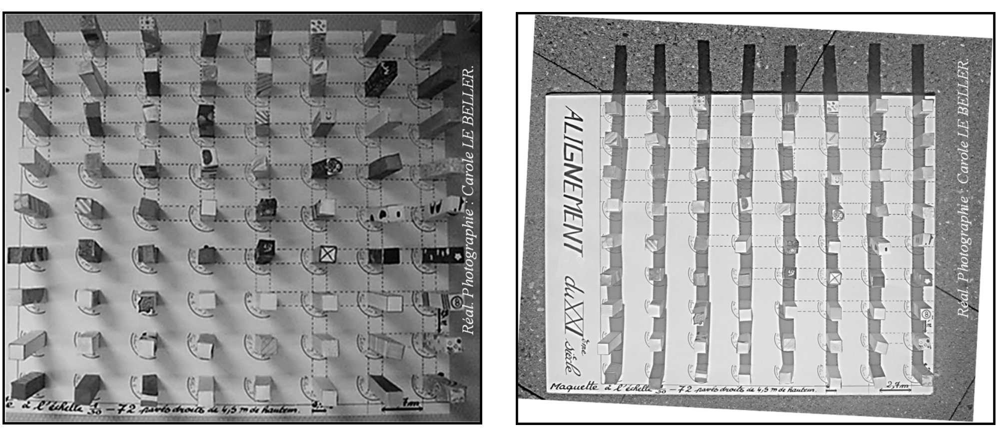


Fig. 3 – *Photographies de la maquette à l'échelle de l'Alignement du XXIème construite par des élèves de 6ème et de 3ème du collège public les Ormeaux en 2010-2011*

3. *Un projet privilégiant une démarche d'investigation*

En 2011, le travail collaboratif mathématiques – arts plastiques pour l'étude de l'œuvre est reconduit. En classe de mathématiques, la démarche d'investigation est privilégiée. Le point de départ de la situation est une simple question posée, en devoir maison, aux élèves de troisième du Collège public les Ormeaux de Rennes : « Qu'est-ce que l'Alignement du XXIème siècle » ? Lors du cours suivant, une mise en commun des réponses est faite, puis la professeure demande aux élèves : « Quelles questions vous posez-vous, à propos de cet alignement ? » Élèves et enseignante trient alors ensemble les questions selon le critère : « À quelles questions, les mathématiques permettent-elles de répondre ? » Par exemple, « Pourquoi soixante-douze colonnes et pas trois ? Les ombres à midi se rejoignent-elles d'une colonne à l'autre ? Pourquoi ces intervalles entre les colonnes ? » sont retenues comme questions mathématiques. En revanche, la question « Pourquoi des colonnes en granit ? » n'est pas retenue, mais trouve une réponse ultérieurement.

L'enseignante présente alors des extraits d'un film documentaire [4] sur Aurelie Nemours permettant de répondre à la plupart des questions « non-mathématiques » dont celle du granit, mais entraînant également d'autres questions. En particulier, le chiffre 9 apparaît beaucoup dans l'œuvre d'Aurelie Nemours et ce fait va être le point de départ de la première activité de recherche pour les élèves. Les questions retenues comme mathématiques sont ensuite étudiées par groupes de trois ou quatre élèves en classe, avec à disposition des ordinateurs, sur plusieurs séances, non consécutives. Les notions travaillées à cette occasion comprennent : la trigonométrie, les fonctions, agrandissement-réduction, géométries plane et de l'espace, systèmes sexagésimal et décimal, etc. Les réinvestissements de notions préalablement étudiées sont nombreux. Un travail en parallèle sur l'abstraction géométrique et sur les arts de l'espace est fait en classe d'arts plastiques. La situation prend une dimension de projet pédagogique à dominante mathématique qui est reconduit les deux années suivantes avec quelques variantes.

III.2. *Description de quelques phases du projet*

Le projet se déroule au fur et à mesure en fonction des questions des élèves. Les phases décrites ci-après sont agencées à titre indicatif puisqu'elles sont celles correspondant aux questions des élèves posées à quelque chose prêt dans cet ordre les deux années de sa mise en œuvre. Cette année 2013-2014, le projet, en cours de réalisation, se voit quelque peu modifié dans son démarrage. Nous en verrons une raison dans le point VI.

À l'intérieur de ses phases, le professeur adapte l'organisation pédagogique à l'objectif du moment : parfois en classe entière, parfois individuel, parfois en groupe de trois ou quatre élèves, parfois en salle informatique avec soit un ordinateur par élève ou par binôme ou par groupe.

1. *Les nombres et le chiffre 9*

Dans cette phase, par groupes de trois ou quatre, les élèves recherchent le chiffre 9 dans l'œuvre. Dans le documentaire, il est précisé que l'œuvre est basée sur les nombres, et que le chiffre 9 est à la base de toutes les dimensions de la sculpture. Très vite, ils le retrouvent : chaque carré de base d'une colonne mesure 9 dm, la hauteur d'une colonne est

4 Références du film documentaire de 26 min : *Chevrel, A., Montivault, A., « Aurelie NEMOURS - Une œuvre entre ciel et terre », coproduction : Vivement Lundi !, TV Rennes, France 3 Ouest avec la participation de Région Bretagne, CNC, Ville de Rennes, DRAC Bretagne, 2006.*

45 dm, les intervalles entre les colonnes sont de 27 dm ou de 18 dm. Ce travail de recherche du chiffre 9 pourrait être fait dans une classe de début collège. En troisième, ils s'amusent à essayer de trouver des correspondances avec les diagonales du terrain rectangulaire, son périmètre et son aire, le volume des colonnes, etc. La deuxième année de la mise en œuvre du projet, certains élèves ont même utilisé l'égalité de Pythagore pour essayer de trouver le nombre d'or dans l'Alignement. Cette idée leur est venue à la suite de l'étude d'une œuvre de Georges Folmer en classe de mathématiques. Une nouvelle question est posée : « Pourquoi le chiffre 9 ? ». La professeure prend l'initiative de contacter Adelberto MECARELI, sculpteur - artiste très proche d'Aurelie Nemours et chargé, par elle, du suivi de la réalisation. Lors de l'entretien téléphonique, Adelberto MECARELLI précise qu'il ne faut pas voir en le choix du chiffre 9 une intention ésotérique de la part d'Aurelie Nemours. Entre 9 mm et 10 mm, il y a le millimètre. Aurelie Nemours travaillait sur le « rythme du millimètre ».

Même si les élèves ne le savent pas encore à ce moment, cette petite activité de recherche sur le chiffre 9 leur sert pour la suite de leur investigation : lors de l'étude de la longueur des ombres portées sur le sol et les colonnes suivantes.

La maquette en papier peut également être un objectif à ce niveau : l'élève doit faire un patron d'un pavé droit. Elle permet aussi de travailler sur la notion d'échelle, en lien en particulier avec le chiffre 9 qui peut servir d'unité.

2. *Modélisations informatiques*

Pour visualiser et étudier l'œuvre vue de dessus, les élèves l'ont modélisée au moyen d'un logiciel de géométrie dynamique plane

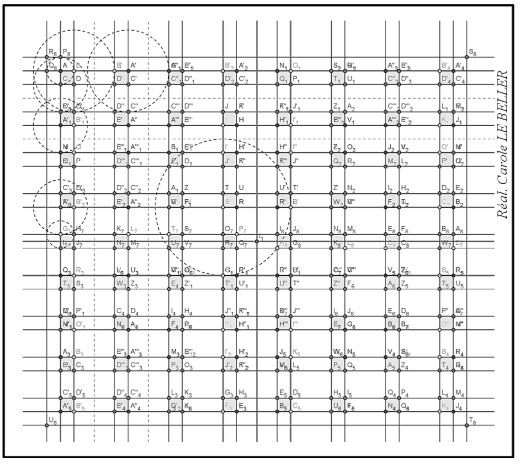


Fig. 4 – *Une modélisation plane de l'Alignement du XXIème siècle vue de dessus réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra*

GeoGebra. Très vite, ils vont chercher des outils mathématiques permettant de tracer rigoureusement et rapidement les soixante-douze carrés (les colonnes vues de dessus). Pour ce faire, en respectant la définition du carré d'Aurelie Nemours (le carré est le centre d'une croix), ils réinvestissent des connaissances antérieures (cercles, carrés, médiatrices, symétries axiales, symétries centrales) pour pouvoir ensuite exploiter au mieux leur modélisation (utilisation de la géométrie dynamique) et éviter un travail répétitif.

Mais la représentation des ombres pose alors problème. Pour pouvoir les déterminer et voir si les dimensions choisies par l'artiste, en l'occurrence hauteur et espacements des colonnes, permettent effectivement à l'ombre d'une colonne d'atteindre la suivante, certains élèves se lancent alors dans une vue de côté (cf. fig. 5) et représentent les rayons du soleil par des droites concourantes ou des droites parallèles.

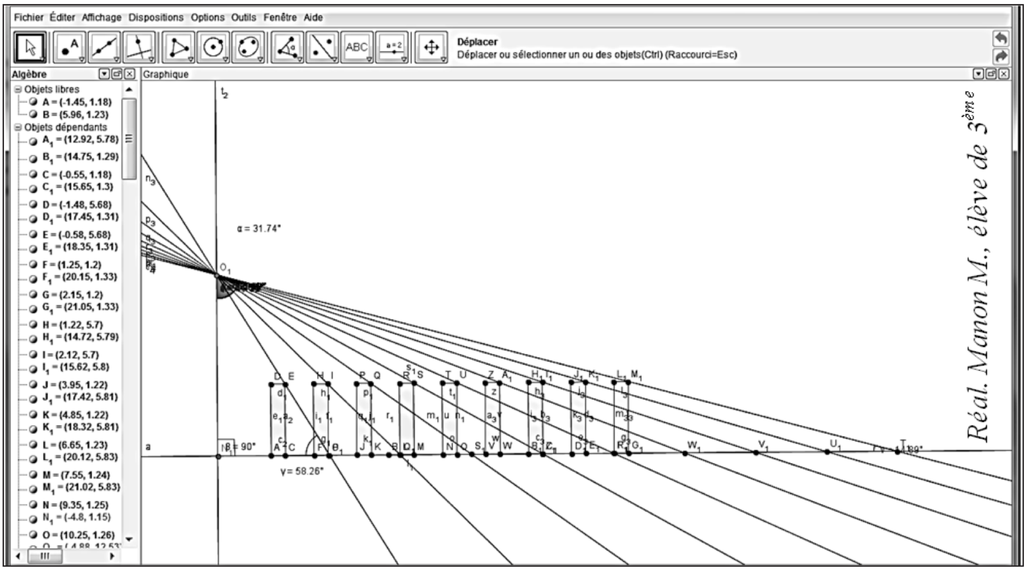


Fig. 5 – *Une modélisation plane de l'Alignement du XXIème siècle vue de côté réalisée par une élève avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra*

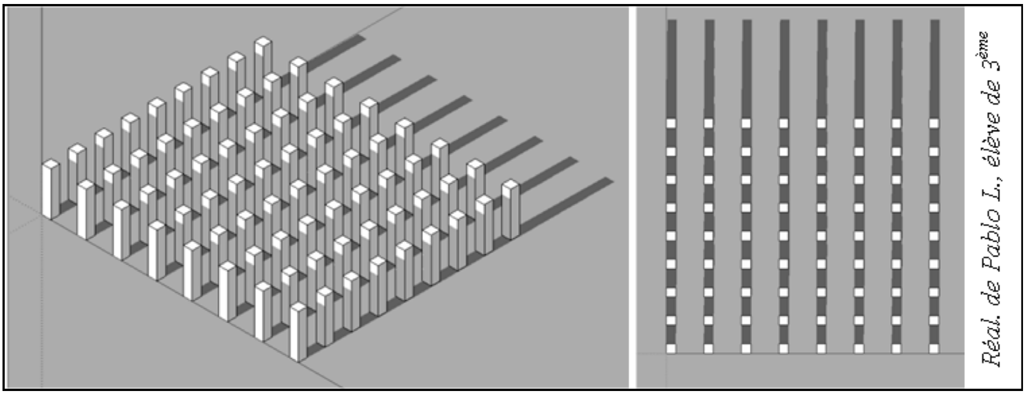


Fig. 6 – *Une modélisation en dimension trois de l'Alignement du XXIème siècle réalisée par un élève avec le logiciel SketchUp*

D'autres élèves choisissent d'utiliser le logiciel *SketchUp* (cf. fig. 6) qui permet de modéliser, à l'échelle, des objets en 3D et de représenter les ombres portées pour une position terrestre et une heure données.

Avant la séance d'investigation suivante, la professeure regarde les fichiers des élèves enregistrés sur le réseau d'établissement pour déceler les erreurs, anticiper les réactions des élèves et trouver des modifications possibles pour lever ou contourner les erreurs. Dans le cas de la modélisation avec *SketchUp*, la première année de mise en œuvre du projet, la professeure s'est approprié le logiciel entre deux séances.

La séance suivante, lors du point de synthèse, avec le vidéoprojecteur, la professeure montre à la classe des productions d'élèves. Les réactions de la plupart des élèves sont rapides.

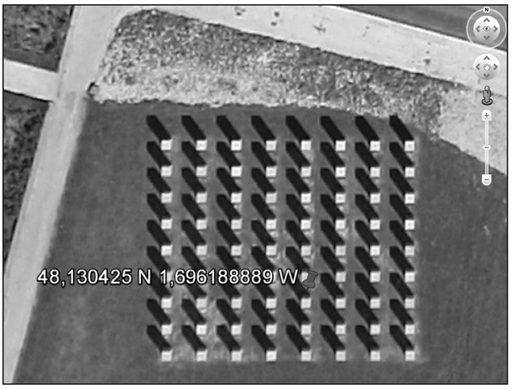
La modélisation plane vue de côté, réalisée par une élève, n'a de sens que si on repousse le point de concours (le soleil) suffisamment loin pour que les droites (les rayons du soleil) semblent parallèles. Sur la proposition des élèves et guidée par eux, la professeure fait une manipulation approximative avec le logiciel de géométrie dynamique. De nouvelles questions sont posées : « À quelle distance doit-on l'éloigner ? », « À quelle hauteur doit-on le placer ? ».

La modélisation en dimension trois, réalisée par un élève, fait apparaître des ombres saccadées, pas complétement alignées. L'élève, auteur de la modélisation, précise qu'il n'a pas réussi à faire en sorte qu'elles soient nettes. La professeure donne alors l'astuce d'utilisation du logiciel *SketchUp* pour régler l'heure et la date. Une correction est rapidement apportée par les élèves pour tenir compte de l'heure d'hiver, mais des essais sur *SketchUp* montrent que cela ne convient pas. Les élèves s'interrogent alors et l'enseignante leur parle de la notion de midi solaire. Il vient alors encore de nouvelles questions : « Qu'est-ce que midi solaire ? » et « En quoi ce paramètre est-il important dans *SketchUp* pour modéliser l'Alignement du XXIème siècle ? » De nouvelles recherches sur le web commencent. Un « point stop » est animé par la professeure pour échanger sur les documents trouvés, faire le tri afin de ne conserver que ceux qui peuvent être compris par les élèves, et au fil des échanges, « défaire » les idées préconçues avec la participation des élèves. Par exemple, nombreux sont les élèves à penser que le soleil à Rennes peut être au-dessus de leur tête à midi solaire, et qu'il peut ne pas y avoir d'ombre. Cette idée erronée vient tout simplement du fait qu'ils ne s'étaient pas réellement posés la question auparavant.

3. *Géolocalisation et midi solaire*

Dans les deux modélisations plane et de l'espace, les élèves ont besoin de connaître la hauteur maximale du soleil et donc de géolocaliser l'Alignement. Le logiciel *Google Earth* permet de donner la réponse (cf. fig. 7). L'Alignement n'a pas été aligné par rapport aux rues avoisinantes. Cette orientation précise nord-sud est rendu visible par le logiciel *Google Earth*. Dans le documentaire, il est précisé que l'ombre portée vient exactement se caler sur la colonne suivante à midi solaire tout au long de l'année. Le terrain est orienté pour que le soleil éclaire les huit premières colonnes de face au sud.

Fig. 7 – *Copie d'écran de la vue de dessus de l'Alignement avec Google Earth à une heure qui n'est pas midi solaire*



De nouvelles questions apparaissent : « À quoi correspondent les degrés, minutes et secondes dans la mesure de latitude et longitude ? », « En quoi ces degrés sont-ils importants dans l'Alignement ?». C'est alors d'une part l'occasion pour les élèves de s'exercer sur les conversions entre les systèmes décimal et sexagésimal, et d'autre part, la nécessité d'expliciter pour la professeure ce qu'est la hauteur du soleil à partir des documents trouvés sur le web par les élèves. Cette dernière partie, conduite par la professeure, fait mobiliser aux élèves des compétences d'utilisation du calcul littéral. Ils arrivent ainsi à calculer les hauteurs minimale et maximale du soleil en degrés à l'Alignement en utilisant la latitude du lieu. Les hauteurs du soleil sont calculées à partir des formules ci-après :

$$h_{min} = 90° - \varphi - \delta \quad \text{et} \quad h_{max} = 90° - \varphi + \delta$$

avec la latitude du lieu $\varphi \approx 48°7'49{,}53''$, et avec δ la déclinaison du soleil $\delta \approx 23°26'$.

Ainsi :

$$h_{min} \approx 18{,}43° \quad \text{et} \quad h_{max} \approx 65{,}3°.$$

La modélisation simplifiée ci-contre permet de comprendre le calcul de la hauteur du soleil la plus grande à l'Alignement avec la déclinaison du soleil donnée.

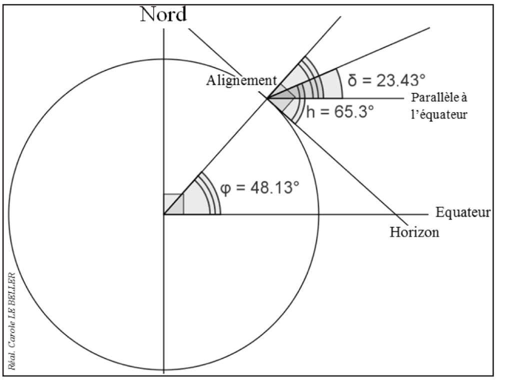


Fig. 8 – *Modélisation de la hauteur du soleil la plus grande à midi solaire sur le lieu de l'Alignement du XXIème siècle réalisée avec GeoGebra (affichage décimal)*

La notion de hauteur du soleil une fois comprise, les modélisations numériques planes des élèves sont rectifiées (cf. fig. 9), et servent à observer la variation de la longueur des ombres portées pour une hauteur de soleil variant entre 18,43° et 65,3°. Par contre, la rectification horaire de la modélisation dans *SketchUp* n'est toujours pas trouvée. Nouveau problème : « Comment déterminer le midi solaire sur le lieu de la sculpture ? ». Le travail se poursuivra alors avec la lecture d'éphémérides.

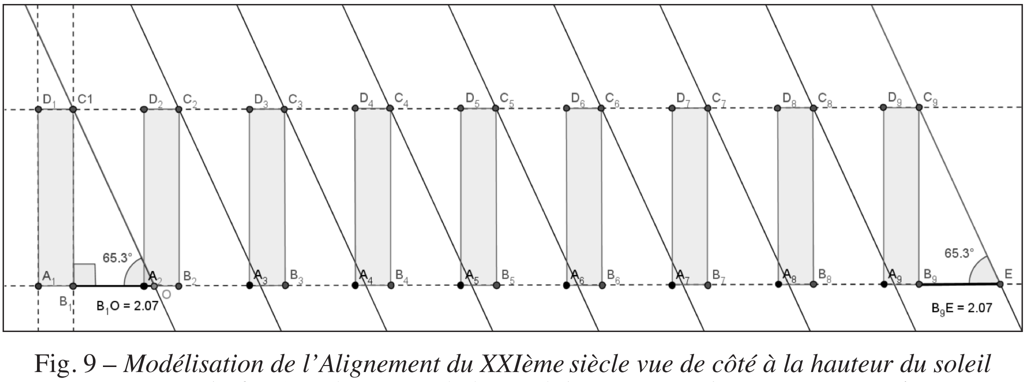


Fig. 9 – *Modélisation de l'Alignement du XXIème siècle vue de côté à la hauteur du soleil maximum de 65,3° réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra*

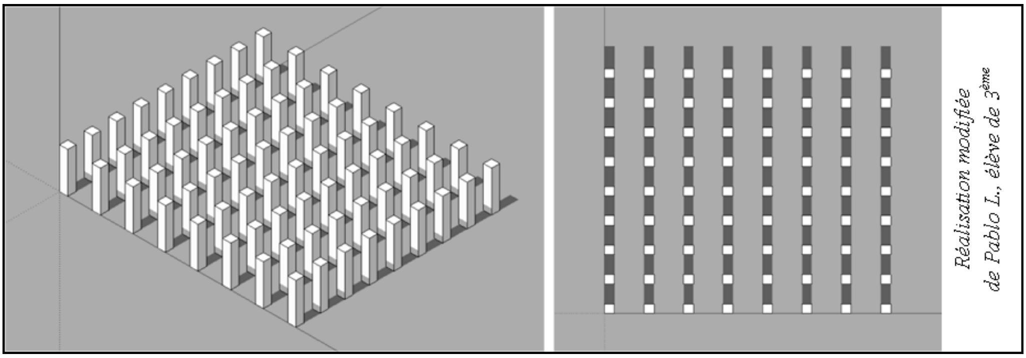


Fig. 10 – *Modélisation en dimension trois de l'Alignement du XXIème siècle à midi solaire, réalisée avec le logiciel SketchUp*

La première année de mise en œuvre du projet, les éphémérides pour l'année 2012 à l'Alignement du XXIème siècle, issues du site de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides (IMCCE)[5], sont données en classe par la professeure. La seconde année, elles sont cherchées sur Internet en salle informatique. Leur recherche pourrait être faite en géographie. A partir de celles-ci, par lecture, les hauteurs du soleil (minimum et maximum), calculées par les élèves, sont confirmées. Les dates et les heures solaires pouvant être lues, la modélisation 3D avec *SketchUp* (cf. fig. 10) est rectifiée au vidéo-projecteur par la professeure les deux années de projet. Ces rectifications faites, correspondant désormais à la réalité de la situation, la modélisation permettra aux élèves d'émettre des conjectures sur les ombres portées des colonnes.

4. La longueur des ombres portées et preuves

Les deux modélisations numériques planes et de l'espace, désormais assez rigoureuses, permettent de déterminer la longueur des ombres portées des colonnes en fonction de la hauteur du soleil. Toute l'année, à midi solaire, les ombres portées viennent se caler entre les colonnes. Au maximum de la hauteur du soleil, l'ombre portée est la plus courte. Cette longueur est déterminée à l'aide des modélisations : environ 207 cm.

La professeure insiste auprès des élèves pour en faire la preuve. La première année du projet, la professeure conduit ce moment. La seconde année, il est un temps de résolution d'une tâche complexe. Dans les deux cas, des exercices techniques de trigonométrie ont été faits au préalable. Avec la trigonométrie, la longueur des ombres portées en fonction de la hauteur du soleil sont calculées. Lorsque la hauteur est la plus grande (le soleil le plus haut 65,3°), la longueur de l'ombre portée L d'une colonne à l'autre est la plus courte : environ 2,07 m.

$$L = \frac{4,5}{tan\ 65,3} \approx 2,07\ .$$

Le résultat est donc prouvé.

Toujours avec la trigonométrie, guidés par la professeure, les élèves prouvent que la hauteur minimale des colonnes pour que l'ombre portée rejoigne la colonne suivante doit être de 1,8 *tan* 65,3, donnant par excès 3,92 m. Les élèves réagissent : cela signifie qu'avec une hauteur de colonne de 3,6 m, deuxième projet d'Aurelie

5 IMCCE : http://www.imcce.fr/fr/ephemerides/phenomenes/rts/rts.php

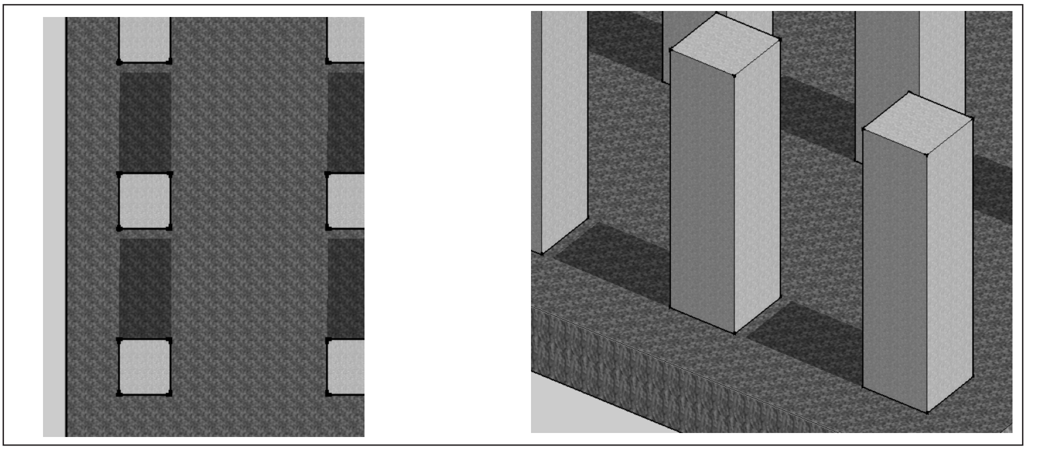


Fig. 11 – *Extraits de la modélisation en dimension trois du second projet de l'Alignement avec des colonnes de 3,6 m de hauteur à midi solaire, réalisée avec le logiciel SketchUp – vue de dessus et zooms*

Nemours, l'ombre inférieure à 1,8 m, l'artiste n'aurait pas eu son tableau souhaité vu du ciel toute l'année à midi solaire (cf. fig. 11).

En effet $L = \dfrac{3{,}6}{tan\ 65{,}3} \approx 1{,}7 < 1{,}8$.

Des élèves se posent assez naturellement la question suivante : « Quelle doit être la hauteur minimale des colonnes pour obtenir une ombre portée d'au moins 1,8 m à midi solaire en fonction de la hauteur du soleil ? ». La première année du projet, les élèves souhaitent faire des tests en papier cartonné. Ce souhait n'a pas été exprimé la deuxième année. Ils réalisent des colonnes de hauteurs différentes. Par simulation du soleil avec une lampe torche, certains ont une vague idée du résultat : environ 4 m. Etant difficile en classe de troisième, la recherche de la preuve est guidée par la professeure, qui propose une courbe à la séance suivante (cf. fig. 12 au verso).

Lorsque le soleil est le plus haut sur l'Alignement à midi solaire (65,3°), la hauteur minimale des colonnes se calcule :

$$f(65{,}3) \approx 3{,}913\ 480\ 679.$$

La hauteur minimale des colonnes doit être de 3,92 m pour obtenir le tableau vu du ciel à midi solaire toute l'année. Le résultat donne l'occasion de faire réfléchir les élèves sur le sens de l'arrondi. Si la valeur arrondie 3,91 m est choisie, vue du ciel, une fine bande ensoleillée au bord de huit colonnes sur neuf d'une ligne existerait, mais elle ne serait peut-être pas vue du ciel à l'œil nu. La preuve est faite que le second projet d'Aurelie Nemours (hauteur des colonnes : 3,6 m) n'aurait pas permis d'obtenir le même tableau vu du ciel à midi solaire toute l'année comme le permet l'Alignement du XXIème siècle actuel.

5. *Modélisation 3D : maquette test*

Les colonnes parallélépipédiques rectangles à base carrée faites en papier cartonné à l'échelle 1/50 constituent le début d'une maquette. Une nouvelle question d'élèves est posée : « Y a-t-il d'autres solides possible permettant d'obtenir le même tableau vu du ciel ? ». L'investigation semble sans fin. De nouveaux solides vont être construits. Pour ce faire, la professeure rappelle les contraintes à conserver : le tableau

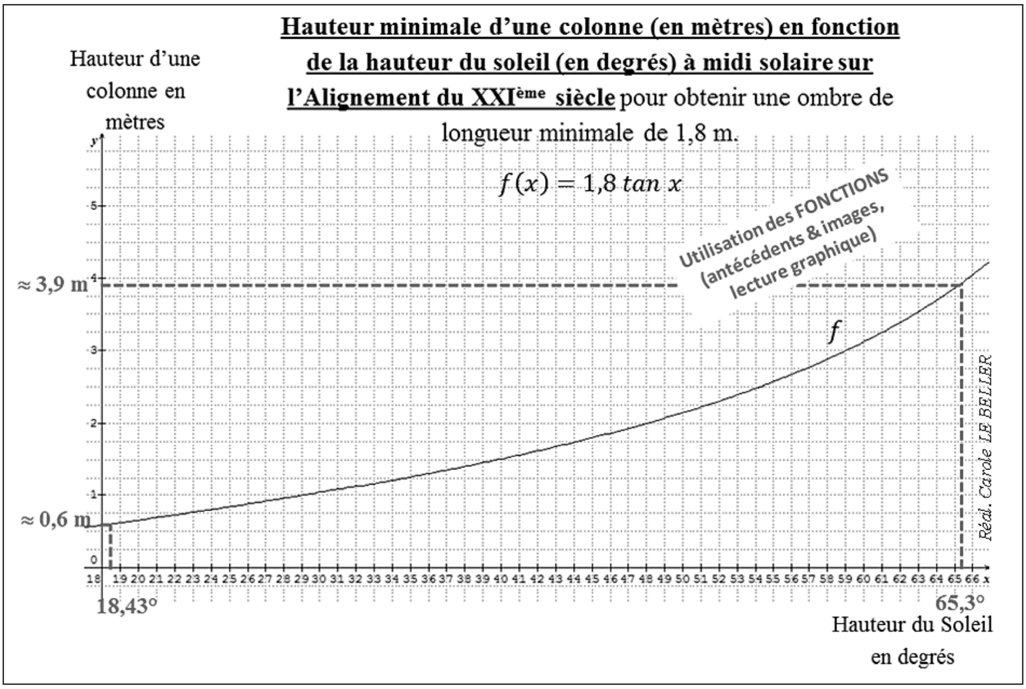
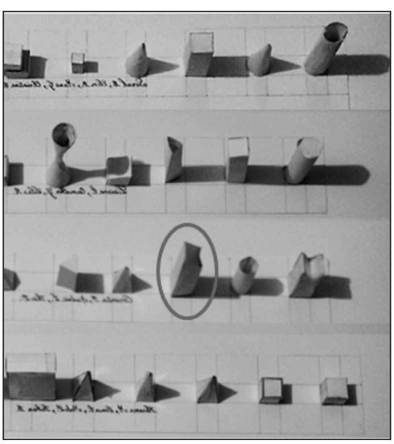


Fig. 12 – *Courbe réalisée avec le logiciel Sine qua non*



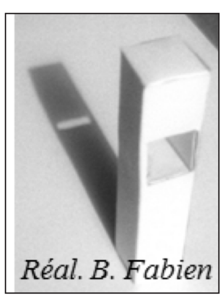


Fig. 13 et 14 – *Photographies de solides réalisés par les élèves*

vu du ciel à midi solaire tout au long de l'année et le rythme du nombre 9 d'Aurelie Nemours (les intervalles de 1,8 m, la hauteur des colonnes de 4,5 m et la longueur du côté de leur base carrée 90 cm).

Lors des tests, un solide (à tourner dans l'autre sens) correspondant aux contraintes ci-dessus a été trouvé par Corentin P., élève de troisième (cf. fig. 13). Il s'agit d'un pavé droit sectionné par un plan formant un angle avec la parallèle au sol. Cet angle est variable mais a un maximum afin que la section soit entièrement éclairée. Certains solides, originaux, posent question quant à leur ombre (cf. fig. 14).

Le solide de la figure 13 est analysé en résolvant un problème proposé, en devoir maison, par la professeure. Les connaissances en jeu peuvent être : les angles alternes-internes égaux, la trigonométrie, le théorème de Thalès, la géométrie dans l'espace, sections d'un prisme droit, égalité de Pythagore, perspective cavalière, patron.

Il se révèle qu'il existe une infinité d'autres solides possibles (cf. fig.15 gauche). Mais, pour correspondre à l'art d'Aurélie Nemours et les contraintes de l'Alignement, ils doivent être inscrits dans un pavé droit de dimensions 0,9 m × 0,9 m × 4,5 m, et les coupes intérieures possibles ne peuvent être qu'en angle droit (cf. exemples fig. 15 droite).

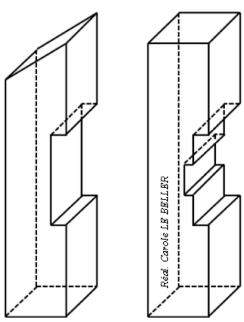


Fig. 15 – *Représentations en perspective cavalière de prismes*

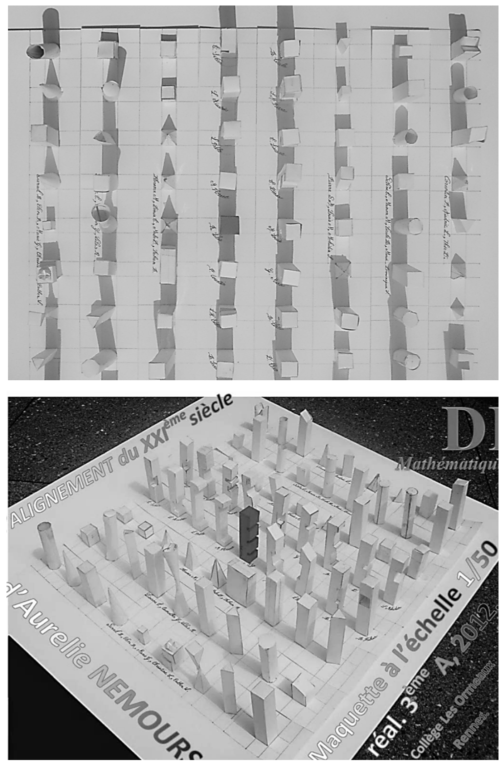


Fig. 16 et 17 – *Photographies d'une des maquettes réalisée au Collège les Ormeaux.*

Les travaux réalisés par les élèves sont de qualité. Rassemblés dans une même maquette, on y sent le fruit d'un travail motivé, voire pour certain(e)s élèves, passionné.

6. *Aller plus loin, nos soixante-douze obélisques bretons… Et évaluation*

Une autre idée de recherche peut être anticipée par le professeur. Les savoirs et savoir-faire en jeu seraient : la géométrie dans l'espace (sphère, latitude, longitude) et la trigonométrie (Eratosthène). A midi solaire, le soleil frappe les huit premières colonnes et l'ombre vient se caler dans les intervalles entre les colonnes suivantes. En fait, l'Alignement se comporte comme un gnomon (cadran solaire simple). En Angleterre, un obélisque à Durham et aussi le grand monument mégalithique Stonehenge pourraient être utilisés en lien avec notre Alignement du XXIème siècle, en s'inspirant de la méthode du mathématicien grec Eratosthène qui avait calculé une approximation de la circonférence de la terre à l'aide de deux obélisques d'Egypte : l'un à Syène (Assouan) et l'autre à Alexandrie.

Lors d'une évaluation en temps limité, un exercice a porté sur l'ombre portée et la trigonométrie. Le dernier problème à faire à la maison, ainsi que la représentation en perspective cavalière et le solide à construire, ont été évalués (évaluation sommative).

Les retours des élèves ayant vécu le projet sont très positifs. La première année, un diaporama[6], relatant l'expérience est produit par la professeure. Les élèves, trouvant qu'il correspondait bien à la réalité, ont souhaité en avoir une copie sur cd.

Six élèves (la première année) et dix (la seconde année) ont choisi « L'Alignement du XXIème » d'Aurelie NEMOURS à l'épreuve d'histoire des arts du DNB. Ceux interrogés sur le sujet ont tous été évalués très favorablement.

IV. — Le rôle de médiateur du professeur

Des mises en commun du travail fait sont régulièrement organisées par le professeur afin que chacun bénéficie de l'apport des recherches et des interrogations des autres groupes. La première année, la preuve mathématique du fait que la hauteur des colonnes et leur espacement permet bien de recréer le tableau vu du ciel est faite par le professeur à partir des résultats obtenus par les élèves. La seconde année, la preuve devient une tâche complexe à résoudre. Au cours du travail, de nombreuses connaissances mathématiques sont réinvesties : notion d'échelle pour la modélisation, proportionnalité pour l'interprétation des mesures de longitude, constructions géométriques utilisant des transformations planes lors de la modélisation de la vue de dessus, trigonométrie, etc. De nouveaux savoirs sont également nécessaires : la notion de fonction, ou au moins de dépendance fonctionnelle, va être introduite par le professeur afin de calculer la hauteur minimale d'une colonne, pour avoir une ombre portée qui rejoigne la colonne suivante, en fonction de la hauteur du soleil.

Dans cette situation, l'usage des mathématiques s'impose de lui-même aux élèves. Pour cela, l'enseignant doit accepter de ne pas maîtriser entièrement leurs réponses et stratégies. Par exemple, l'emploi du logiciel *SketchUp* n'avait pas été anticipé par l'enseignant lors de la première mise en place de cette activité. Il ne s'agit a priori pas d'un logiciel usuel de la classe de mathématiques, mais un groupe d'élèves a choisi de l'utiliser et l'enseignant les a suivis dans leur démarche.

Tous les résultats apparus au cours de ce travail peuvent être démontrés dans une classe de troisième. C'est le rôle de l'enseignant de montrer toutes les solutions trouvées par les élèves à partir d'un même problème. Cependant, une question a suivi l'étude faite de l'ombre portée : dans l'œuvre d'Aurelie Nemours, les colonnes sont de forme parallélépipédique rectangle. Certains élèves se sont demandé si une autre forme de solide aurait permis de reconstituer le même tableau par une vue de dessus. Un solide correspondant aux contraintes de l'artiste a été trouvé par les élèves en faisant des tests à partir de maquettes : il s'agit d'un pavé droit sectionné par un plan formant un angle avec la parallèle au sol. Cet angle n'est pas unique mais a un maximum afin que la section soit entièrement éclairée. L'enseignant a mis en évidence alors qu'il y avait, pour ce problème, plusieurs solutions possibles et qu'il ne pouvait pas déterminer une stratégie pour les trouver toutes. Cela nous paraît également important de proposer aux élèves des problèmes qu'on ne sait pas entièrement résoudre.

6 Site de l'Irem de Rennes : http://www.irem.univ-rennes1.fr/recherches/groupes/groupe_DI/index.htm

V. — L'investigation dans « l'Alignement du XXIème siècle »

Les élèves sont invités à investir un problème et à l'explorer en référence à la réalité via les mathématiques. La situation choisie, ici, est concrète. Elle n'est pas issue de la vie courante de l'élève puisque cette œuvre d'art, bien que présente à Rennes n'est en général pas connue des élèves. Elle devient cependant très rapidement une question qui a un réel sens pour eux.

Le travail commence par une recherche sur Internet, faite en devoir maison, et surtout par un débat entre élèves pour savoir quelles questions vont être retenues comme relevant de la classe de mathématique. Tout au long de cette activité, de nouvelles questions apparaissent et aucun « habillage » n'est nécessaire pour que les élèves poursuivent leur enquête et puisse répondre à la principale question initiale : « La hauteur des colonnes, sachant qu'elle doit être un multiple de neuf, est-elle suffisante pour que l'ombre d'une colonne rejoigne la suivante ? ». La modélisation reste assez simple pour que les élèves la prennent en charge d'eux-mêmes. Ceux-ci connaissent bien le logiciel de géométrie plane utilisé, il n'y a donc pas eu de problème d'appropriation de la pratique de ce logiciel.

Il est cependant intéressant de noter que l'emploi de *SketchUp*, qui a été proposé au départ par un élève, a été ensuite adopté par beaucoup d'autres. La modélisation en trois dimensions possible et les fonctionnalités du logiciel, qui permet de représenter les ombres, leur a paru plus adéquat pour répondre à leur problème et sa prise en main n'a finalement pas posé de difficulté. Cependant, ses fonctionnalités n'ont pas caché les outils mathématiques nécessaires à cette résolution. Elles ont même fait apparaître de nouvelles questions dont : « Qu'est-ce que le midi solaire ? ». L'utilisation de ce logiciel a été même suffisamment importante pour que l'enseignant choisisse de le proposer aux élèves lorsqu'il a refait cette activité l'année suivante.

Le rôle de l'enseignant a été de s'appuyer sur les productions des élèves, comme, par exemple, sur la modélisation obtenue au moyen de *SketchUp* pour relancer les discussions et institutionnaliser les résultats obtenus. Ceci demande, pour l'enseignant, une grande confiance en ses capacités à suivre les différentes stratégies, parfois développées au moyen d'un logiciel qu'il ne connaît pas. L'enquête est menée conjointement par les élèves et par l'enseignant qui doit, alors, accepter de ne pas avoir toutes les réponses. C'est sans doute nécessaire pour laisser aux élèves la possibilité de se poser eux-mêmes les bonnes questions.

VI. — Diffuser la situation « l'Alignement du XXIème siècle » ?

La présentation faite ci-dessus du déroulement de cette activité correspond à ses deux premières mises en place, faite par l'enseignante créatrice, Carole Le Beller. La deuxième année, un autre membre du groupe Irem a également testé cette activité dans une classe de troisième, à partir des documents produits. Nous notons que les questions des élèves rejoignent celles issues de la première expérience. Cet enseignant a pu travailler sur ce thème avec le professeur d'arts plastiques ; en particulier, le documentaire, présentant l'artiste et ses œuvres, a été visionné pendant le cours d'arts plastiques. On peut, mais nous ne l'avons pas testé, imaginer également un travail sur les ombres avec le professeur de sciences physiques, ou avec le professeur de géographie pour les coordonnées d'un point sur la sphère terrestre. Cette activité est pluridisciplinaire :

elle peut rester dans la classe de mathématiques, mais elle gagnerait sûrement à investir d'autres disciplines en accord avec les enseignants concernés.

Suite à la présentation de cette activité d'investigation lors des journées mathématiques de l'IFÉ et du colloque de l'Irem de Rennes en juin 2012, deux enseignants, extérieurs au groupe, l'ont également testée : dans un cas avec des élèves de première Bac Pro dans le cadre de l'accompagnement personnalisé (AP), dans l'autre cas pour une classe de troisième réussite (élèves en très grande difficulté). Le retour de ces deux dernières expériences montre que les documents produits, s'ils aident à la mise en place de l'activité, n'ont pas toujours permis qu'elle se déroule effectivement sous la forme d'une démarche d'investigation. Par exemple, un des enseignants a rajouté, aux documents fournis, des fiches à remplir par les élèves, orientant ainsi leur travail. Dans ce dernier cas, l'activité a cependant permis de mettre en place une différenciation : l'enseignant a fait, à partir des fiches qu'il avait écrit, travaillé chaque groupe sur un thème particulier, permettant ainsi de travailler plus spécifiquement certaines compétences.

Il est à noter que les tests faits dans notre groupe ont été réalisés dans des classes de troisièmes « classiques » quant au niveau scolaire (celles du collège les Ormeaux intègrent des élèves déficients visuels), alors que les deux autres expérimentations ont été menées dans des classes d'élèves avec des difficultés scolaires. Cette situation peut expliquer les différences de déroulement rencontrées. Dans la classe de troisième réussite, les enseignants n'ont pas pu aller jusqu'au bout et se sont arrêtés à la construction de la maquette simple, sans réussir à mobiliser leurs élèves pour les problèmes posés par les ombres.

Les situations sont modifiées par les enseignants qui les prennent en main, en fonction de leur contexte d'enseignement, et des interactions avec les élèves, et ceci est d'autant plus vrai, pour une situation au départ très ouverte. Or, la mise en place de cette activité dans des contextes différents a permis de valoriser sa grande richesse et ses possibilités d'adaptation à l'appétence des élèves. En lycée professionnel, les élèves ont voulu modéliser la sculpture avec des logiciels mais n'ont pas parlé de construction de maquette, alors que cette construction a été demandée par les élèves dans les autres classes. Le problème des ombres a motivé certaines classes mais pas toutes. Les ressources produites pour diffuser cette activité présentent les différentes stratégies que peuvent employer les élèves, tout au moins celles que nous avons actuellement rencontrées. Mais laisser les élèves pratiquer une démarche d'investigation suppose que d'autres stratégies verront le jour pour résoudre le problème, ici présenté. Un nouveau logiciel pourrait, par exemple, faire évoluer la recherche autrement. Actuellement, au collège les Ormeaux, au démarrage de leur projet, bénéficiant de tablettes prêtées par Canopé Rennes, les élèves ont demandé à photographier les ombres de différents solides pour ensuite les étudier.

Cette activité est déclinable à plusieurs niveaux scolaires : si l'on s'arrête à une maquette simple en dimension trois, elle peut être faite en sixième. L'investigation porte alors sur la recherche d'une échelle adaptée. Elle pourrait être également proposée au lycée en poussant alors l'investigation sur la recherche d'une fonction modélisant la longueur de l'ombre en fonction de la hauteur du soleil. Elle offre également la possibilité d'un travail inter-niveau : des élèves de sixième faisant la maquette papier et les élèves de troisième l'utilisant pour leur recherche, recherche dont ils pourraient exposer les résultats aux élèves concepteurs de la maquette.

Les activités de type DI demandent beaucoup de préparation au professeur pour anticiper au mieux la grande variété possible de réponses des élèves : cette préparation est nécessaire avant la mise en œuvre, mais aussi tout au long du déroulement de l'activité. Elle est essentielle puisque le professeur doit s'appuyer sur les réponses produites pour faire avancer le travail.

BIBLIOGRAPHIE

Grodowski, S., Gueudet, G., Le Beller, C., Lebaud, M-P., Pépino, C., Rouault, Y. (2012), « Démarches d'investigation en mathématiques au collège », In Aldon et al. *Représentations dynamiques des mathématiques : quels outils pour faire, pour apprendre et pour enseigner les mathématiques ? Actes des journées Ifé 2012* (pp.146-148) (http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/representation-dynamiques-des-mathematiques)

Lebaud, M.-P. & Gueudet, G. (2012). Démarches d'investigation et collectifs dans la formation des enseignants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1400–1412).

(http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012)

Loisy, C., Trgalova, J. & Monod-Ansaldi, R. (2010). Ressources et travail collectif dans la mise en place des démarches d'investigation dans l'enseignement des sciences (pp.30-37). *Actes des journées scientifiques DIES 2010*. Lyon : INRP

Matheron, Y (2010). « Démarches d'investigation » et Parcours d'Étude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système. *Conférence invitée au colloque de la CORFEM*, Juin 2010, Caen

Soury-Lavergne, S., Gueudet, G., Loisy, C. & Trouche, L. (2010). De la conception de parcours de formation à leur appropriation par des formateurs, *Rapport du projet INRP-Pairform@nce,* INRP, 152p.