
LA « PREUVE POUR COMPRENDRE », UN LEVIER POUR LA CONSTRUCTION DU SENS DE LA LETTRE EN CLASSE DE CINQUIEME

Cécile BOMBRUN-NIGON
ESPE de l'Académie de Lyon,
Université Lyon 1

Sylvie COPPE
ESPE de l'Académie de Lyon, Université Lyon 1
UMR ICAR (Université Lyon 2, CNRS, ENS Lyon)

Résumé : L'algèbre est un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques au collège. Son introduction pose de nombreux problèmes aux enseignants et aux élèves. Dans cet article, nous rendons compte d'une expérimentation menée en classe de 5^e au moment de l'introduction de l'algèbre. L'activité utilise un programme de calcul qui donne toujours le nombre de départ, l'objectif est de faire établir la conjecture aux élèves puis de la démontrer. Nous voulons analyser, à partir de cet exemple les potentialités données par les programmes de calcul dans le cadre de preuve en algèbre. Nous situons nos questions dans le cadre des travaux sur l'algèbre élémentaire et sur la preuve développés en didactique des mathématiques. Après une analyse des documents officiels sur la place actuelle de la preuve en algèbre, nous montrons ensuite comment une activité de preuve peut participer à la construction du sens de la lettre en classe de 5^e.

Cet article reprend les grandes lignes de la recherche effectuée dans le cadre de notre mémoire de master (Bombrun Nigon, 2012). Il s'agit de rendre compte d'une expérimentation menée en classe de 5^e sur l'introduction à l'algèbre élémentaire par une activité de preuve en utilisant un programme de calcul qui donne toujours le nombre de départ. Nous voulons analyser, à partir de cet exemple les potentialités données par les programmes de calcul dans le cadre de preuves en algèbre.

Notre expérience d'enseignement en collège pendant quinze ans, nous a permis

d'observer les difficultés des élèves avec l'utilisation de la lettre. Souvent, en classe de 3^e, les élèves ne pensent pas à l'utiliser si celle-ci n'est pas introduite ou imposée dans l'énoncé. Pourtant, si l'on se réfère aux programmes du collège, à ce moment-là, la méthode algébrique devrait avoir trouvé sa place aux côtés des procédures arithmétiques. Cette constatation s'est trouvée confirmée lors de l'épreuve de Brevet en juin 2012, en métropole, où seulement 12% des élèves ont produit une démarche correcte dans l'exercice pour lequel la procédure experte demandait l'introduction de la lettre.

 LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
 POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

Nous avons donc cherché des situations qui donneraient du sens à l'utilisation de la lettre au collège tout en favorisant le questionnement des élèves. Il nous semble important qu'une situation d'introduction propose un enjeu fort pour que les élèves aient envie de rentrer dans la tâche et d'étudier le savoir en jeu. Cette réflexion sur la notion de « sens » n'est pas nouvelle, elle occupe une place importante en didactique des mathématiques. Elle a même eu un rôle de catalyseur dans le développement de cette science. Selon Conne (1993) :

« La critique principale qu'on peut lui faire (aux mathématiques modernes) consiste à relever qu'elle a sacrifié le sens à l'autel des formes et du langage. La didactique des mathématiques participe de ce mouvement critique et a été motivée par la question du sens. Pourtant, sa rupture n'aura pas été le rejet pur et simple de l'outil formel, mais une recherche pour le maîtriser. »

Chevallard (1989) propose d'entrer dans l'algèbre par l'explication de certaines propriétés numériques aisément observables. Pour cela, il privilégie la modélisation qui selon lui, permet « *de rendre compte de l'activité mathématique* ». Le travail de modélisation peut se faire sur un système propre aux mathématiques ; notamment « *le système des nombres entiers offre à l'observation de nombreux phénomènes qui peuvent être modélisés algébriquement* ». Par exemple : pourquoi la somme de deux entiers impairs est-elle paire ? Les activités proposées permettent de travailler sur l'aspect structural d'une expression algébrique. La lettre et la manipulation des expressions algébriques permettent d'expliquer les phénomènes observés. Cette fonction nous semble intéressante dans la problématique de trouver une situation dans laquelle l'introduction de la lettre est une nécessité. L'entrée dans l'algèbre peut également être travaillée en mettant en avant l'aspect pro-

cédural d'une expression algébrique. Chevallard (2007) définit les expressions algébriques en s'appuyant sur cet aspect. Pour lui « *$3x^2$ est l'expression algébrique d'un certain programme de calcul, à savoir le programme de calcul qui, étant donné un nombre x , renvoie le nombre $3x^2$* ». Il définit alors l'algèbre élémentaire comme « *la science des programmes de calcul (sur les nombres) et en particulier la science du calcul sur les programmes de calculs* ». Cette définition nous a orienté vers des activités constituées d'un programme de calcul, du type « choisir un nombre ... » qui amènent une identité et donc à généraliser pour tous les nombres ce qui est constaté pour quelques-uns.

Nous faisons l'hypothèse que l'observation des régularités, la nécessité de la généralisation et la recherche d'explication amènent les élèves à s'engager dans une démarche de preuve. Les preuves produites par les élèves et notamment celles relevant de l'expérience mentale (au sens de Balacheff, 1982) pourront alors être un levier pour le professeur pour aller vers la lettre. Les élèves sont ainsi confrontés à une situation où ils peuvent s'engager en testant sur des valeurs numériques particulières mais dans laquelle la recherche d'explication devrait les conduire à produire une preuve intellectuelle pour expliquer pourquoi le programme de calcul donne un résultat remarquable (par exemple toujours le même nombre ou le nombre choisi au départ ...). Nous nous sommes donc demandé si et comment les programmes de calcul peuvent être des outils qui faciliteraient le passage d'une preuve relevant de l'expérience mentale à une démonstration algébrique dans le cadre de l'enseignement introductif de l'algèbre élémentaire en classe de 5^e.

Ainsi, nous faisons comme hypothèse qu'une situation d'introduction dans laquelle les élèves sont confrontés à une activité de validation de proposition par le biais d'une preuve intel-

lectuelle est un moyen de développer la dimension « outil » de l'algèbre afin de développer le sens de ce nouveau domaine de savoir. Nous nous appuyons sur les travaux de Barallobres (2004) qui montre que « *ce sera dans le contexte de la recherche de raison et d'explication (...) que les preuves intellectuelles en algèbre (...) surgiront et que les preuves pragmatiques deviendront limitées* ». Pour lui, les preuves intellectuelles doivent être reconnues par l'élève comme l'outil qui permet de comprendre, pour qu'elles puissent avoir le statut d'outil de validation. L'enjeu n'est pas d'établir le caractère de vérité mais de comprendre pourquoi c'est vrai. De plus, il précise que la recherche d'explication (et non la recherche de la conviction d'autrui) limite l'impact de l'affectif (autorité, séduction, ...) sur les décisions des élèves. Barallobres a pu mettre en évidence que dans ce type d'activité la preuve intellectuelle devient pour les élèves l'outil le mieux adapté non pas parce que le professeur l'a dit mais parce que c'est le seul outil qui permet d'expliquer la conjecture émise. Il précise également que cette seule situation ne suffit pas et qu'il faudra d'autres activités pour installer chez les élèves un recours naturel aux preuves intellectuelles.

Chevallard (1990) souligne l'importance de proposer des situations familières. Quand il propose la modélisation à partir des nombres naturels, l'intérêt des naturels réside dans le fait que « *les entiers naturels ont d'abord cette vertu essentielle de constituer une réalité qui, psychologiquement, est vécue comme familière* ». Un certain nombre d'élèves a déjà joué à la devinette du magicien : « pense à un nombre, ajoute ..., tu as trouvé 0 » donc ils se sentent rassurés par la situation et n'ont pas une posture de refus face à cette activité. Les énoncés du type « choisir un nombre ... » semblent familiers aux élèves, ils devraient leur permettre de s'engager dans l'activité avec des exemples numériques sans difficulté de tra-

duction du langage naturel et sans calculs trop complexes.

Nous utiliserons donc les programmes de calcul pour engager les élèves dans une activité de « preuve pour comprendre » plutôt que de preuve pour convaincre. Dans cet article, nous proposons un exemple de ce type d'activité et nous analyserons les types de preuves produites par les élèves et leur exploitation pour l'introduction de la lettre (voir partie III).

Avant de présenter la situation que nous avons choisi de tester, dans une première partie, nous citerons quelques références sur les recherches en didactique de l'algèbre pour dégager quelques caractéristiques de son enseignement. Nous poursuivrons par l'analyse des programmes de mathématiques du collège pour les classes de 5^e à propos de l'algèbre afin de préciser les savoirs à enseigner et les finalités de l'introduction de l'algèbre à ce niveau-là. Nous analyserons également les documents ressources des programmes 2008 et du socle commun ainsi que deux épreuves de brevet des collèges pour montrer l'évolution de celles-ci. Enfin, nous donnerons quelques éléments d'analyse des manuels des classes de 5^e et 4^e pour les chapitres relatifs à l'algèbre.

1. — Quelques références théoriques

Les travaux sur l'algèbre sont nombreux, ils se placent dans des cadres historique, épistémologique, cognitif ou anthropologique ; nous ne reprendrons ici que quelques résultats. Tout d'abord sur les différents statuts de la lettre : comme il est indiqué notamment dans le document Ressource « Du numérique au littéral », (2008) :

« A l'école élémentaire et au début du collège, la lettre est utilisée comme symbole d'unité (h, m...), pour désigner un objet pré-

 LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
 POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

cis (un point A , le nombre $\pi \dots$), pour désigner une grandeur ou une mesure dans une formule. Elle a alors souvent valeur d'abréviation : dans $A = L \times l$, A est souvent interprété comme une abréviation de aire, L de longueur, l de largeur ; dans $P = \pi \times D$, P est alors interprété comme abréviation de périmètre et D de diamètre. »

Puis au collège, la lettre acquiert de nouveaux statuts. Tout d'abord, elle peut être une variable lorsque les élèves produisent une formule. Elle peut être une inconnue lorsque les élèves l'utilisent pour résoudre un problème. Elle est quelque fois désignée par « indéterminée » et dans ce cas, elle ne représente plus des nombres particuliers, mais des nombres quelconques, comme dans les identités telles que $k(a + b) = ka + kb$ où l'égalité est universellement vraie. Enfin, la lettre peut être un paramètre : par exemple, dans l'expression algébrique des fonctions affines, $f : x \rightarrow ax + b$, x est la variable et a et b sont les paramètres.

Lorsque les élèves utilisent la lettre, ils sont confrontés à des jeux de changement de registres sémiotiques, passage du registre du langage naturel au registre des écritures algébriques par exemple. Chaque registre a son vocabulaire propre, son symbolisme spécifique. Proposer des activités qui permettent à l'élève de changer de registre va aider à la construction de l'objet même si un objet ne se réduit pas à ses représentations dans les divers registres. Cependant ces changements de registre seront source de difficultés car les élèves devront maîtriser les codes spécifiques à chacun de ces registres.

Grugeon (1997) analyse les deux dimensions de l'algèbre élémentaire en se référant à la dialectique « outil-objet » (Douady, 1986). L'algèbre est un « outil » qui permet de résoudre différents types de problèmes, comme par

exemple les problèmes de modélisation ou de généralisation. La dimension « objet » se retrouve dans le traitement formel des expressions algébriques. Deux aspects sont à prendre en compte, l'aspect syntaxique et sémantique. En effet, la manipulation d'expressions algébriques nécessite d'une part de connaître les règles de développement, factorisation et réduction des expressions, c'est l'aspect syntaxique et d'autre part nécessite une vision d'ensemble des manipulations effectuées pour effectuer la « bonne » transformation qui amènera à la réponse attendue. Enfin, il faut également prendre en compte les dimensions structurale et procédurale des objets algébriques. Une expression algébrique peut être considérée comme un enchaînement d'opérations. Par exemple $2x + 1$ peut être traduit par : on choisit un nombre, on le multiplie par deux puis on ajoute un. C'est le caractère procédural de l'expression. Mais une expression littérale peut être également considérée comme une expression qui caractérise la forme générale d'un nombre. Dans ce dernier cas, $2x + 1$ est la forme générale d'un nombre impair. On parle alors du caractère structural de l'expression.

Enfin, Assude et al. (2012) montrent que l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège subit une « atomisation et une réduction ». Cette évolution est encore accentuée, puisque dans le socle commun, seule la compétence « utiliser une expression littérale » est attendue. Cette contradiction avec l'insistance sur la résolution de problème risque de provoquer une réduction du temps nécessaire au travail sur l'algèbre et en particulier sur l'utilisation des équations. Les auteurs pensent également « *qu'il est important de redonner une place explicite aux éléments théoriques en algèbre par la mise en œuvre régulière des types de tâches de justifications qui permettent aussi de redonner des finalités à l'enseignement de l'algèbre.* »

En conclusion, nous pensons qu'il faudrait donner à l'enseignement de l'algèbre au collège une place importante dans le curriculum officiel afin de laisser du temps aux élèves pour s'approprier les différents aspects et de les préparer au mieux aux enseignements du lycée. Chevallard (1999) a montré que « les premières rencontres » avec une notion sont des moments importants pour les élèves. « *L'idéal serait évidemment de proposer un problème tout semblable à ceux que l'arithmétique permet en principe de résoudre, mais d'une complexité telle que les seules lumières de l'arithmétique nous laissent impuissants à la résoudre effectivement ; d'en donner alors une solution par le moyen de l'algèbre !* » (Chevallard, 1985).

2. — Savoir à enseigner et savoir enseigné

Nous allons maintenant analyser les programmes actuels de 5^e, les documents ressources du collège en recherchant ce qui relève de l'algèbre dans les différentes parties puisque, rappelons le, ce n'est plus un domaine des programmes à part entière. Puis nous proposerons une classification des activités figurant dans un choix de manuels de 5^e afin de dégager les choix didactiques faits par les auteurs. Nous porterons une attention particulière à tout ce qui concerne les programmes de calcul.

2.1 Les programmes 2008 et les documents ressources pour le collège

Dans l'introduction commune des programmes de l'enseignement des mathématiques (MEN 2008), il est rappelé « *qu'au terme de la scolarité obligatoire, les élèves doivent avoir acquis les éléments de base d'une pensée mathématique. Celle-ci repose sur un ensemble de connaissances solides et sur des méthodes de résolution de problèmes et des modes de preuves (raisonnement*

déductif et démonstrations spécifiques) ». De plus il est explicitement précisé dans l'introduction des programmes de 2008 (p. 11) que les preuves en algèbre doivent être travaillées :

« La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer. » (MEN, 2008)

Dans le programme de 5^e, dans la première partie « Organisation et gestion de données, fonctions », on trouve dans la colonne « Connaissances », le terme « expressions littérales ». Il est demandé de travailler deux tâches : utiliser une expression littérale et produire une expression littérale dont on indique qu'elles sont liées à de nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine « Grandeurs et mesures », qui fournit des situations dans lesquelles l'élève aura à établir des formules.

Dans la deuxième partie « Nombres et calculs », on peut lire que la résolution de problèmes a, entre autres, pour objectifs :

- « de familiariser les élèves aux raisonnements conduisant à des expressions littérales ;
- d'apprendre à choisir et interpréter l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation,
- d'apprendre à effectuer des transformations simples d'écriture ;

LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

— d'initier à la notion d'équation. »

La propriété de distributivité est explicitement citée et doit être introduite, même si, dans le cadre du socle commun, son utilisation, en classe de 5^e, se restreint à des exemples numériques. Enfin on trouve une référence à l'initiation à la notion d'équation qui doit se faire au travers d'activités permettant de tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques. Dans la partie « Grandeurs et mesures », on note que la manipulation des formules d'aire et de volume est à faire en liaison avec le calcul littéral.

En conclusion, parallèlement au travail sur le calcul littéral, des activités permettant de mettre l'accent sur l'outil algébrique au service de la résolution de problèmes doivent être proposées dès la classe de 5^e afin d'illustrer l'apport de ce nouvel outil. Cependant, comme l'avaient noté Assude et al., 2012, on constate un certain morcellement des notions qui relèvent de l'algèbre élémentaire en classe de 5^e, ce qui risque de générer, dans les pratiques, de types de tâches isolées ou sans finalité.

Analysons maintenant quelques documents ressources publiés par le ministère, qui donnent des indications diverses sur les contenus à enseigner. Commençons par celui intitulé « Raisonnement et démonstration » (MEN, 2009). Ce document analyse les objectifs attendus pour les quatre années du collège. Un paragraphe est consacré au calcul littéral, marquant la volonté des auteurs de ne pas focaliser le raisonnement sur la géométrie.

« Le calcul littéral constitue en lui-même un mode de raisonnement, grâce auquel on dépasse le stade de l'investigation sur quelques cas particuliers pour accéder au niveau de la généralisation. C'est par exemple une démarche

naturelle pour s'assurer de l'exactitude d'une conjecture émise dans le cadre d'un programme de calcul.

Le calcul littéral permet de démontrer certaines propriétés arithmétiques (la somme de deux nombres pairs est paire, etc.).

Il donne par ailleurs la possibilité d'activités spécifiques amenant à un travail sur les notions de propriété directe et de réciproque, en particulier lors de la résolution d'équations ou d'inéquations. »

On voit donc là l'insistance mise sur les activités de preuve en algèbre, bien présentes au côté des preuves en géométrie, qui permettent de mettre en œuvre différents types de raisonnements mathématiques.

Dans le document d'accompagnement « Du numérique au littéral » (MEN, 2008), les auteurs proposent des activités variées permettant de mettre en évidence les différents usages de la lettre (variable, indéterminée, inconnue et paramètre) afin que les élèves rencontrent ces différents statuts et puissent les distinguer. Une progression sur l'algèbre est donnée à la fin du document dans laquelle les auteurs proposent d'aborder le rôle de la lettre d'abord en tant que variable dès la classe de 6^e en s'appuyant sur la production de formules dans les chapitres consacrés au travail sur les grandeurs. Puis, pour la classe de 5^e, il est précisé que les activités de preuve, en particulier la généralisation, sont des supports privilégiés pour travailler la lettre comme « indéterminée. » :

« Utilisation et production d'expressions littérales à l'occasion de l'élaboration de formules ou de la traduction d'un programme de calcul. »

« Travail sur l'aspect structural d'une expression, traduction du fait qu'un nombre est le suivant d'un nombre, qu'un nombre est multiple de 7... »

« Justification de l'égalité (au sens de l'identité) de deux expressions littérales. »

En revanche, dans le socle commun de connaissances et de compétences, inscrit dans la loi depuis 2005, on peut noter une certaine frilosité vis-à-vis de l'algèbre : « *les exigences du socle ne portent que sur les expressions du premier degré à une lettre et ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue.* » (MEN, 2008). Pour gérer cette double exigence du socle commun et du programme, le document intitulé « Document ressource pour le socle commun dans l'enseignement des mathématiques au collège », (MENJVA/DEGESCO, 2011) propose, par exemple, d'introduire la résolution d'équation en classe de 4^e à l'aide d'une activité comportant plusieurs programmes de calcul. Ce type d'activité permet, en faisant varier les valeurs numériques de l'énoncé, de passer d'une démarche empirique à une démarche algébrique. En conclusion de cette activité, les auteurs précisent :

« En amenant les élèves à comparer les deux types d'approche, il est possible de :

- valoriser des aptitudes qui relèvent du socle,
- montrer les limites de la résolution empirique (tout en lui reconnaissant une efficacité),
- plaider plus honnêtement et plus efficacement pour des méthodes mathématiques rigoureuses ».

On peut constater que les programmes de calcul sont bien présents dans les documents d'accompagnement même s'ils ne sont pas explicitement mentionnés dans les programmes. Il nous semble donc intéressant de regarder la place occupée par l'outil programme de calcul dans le savoir enseigné. Pour cela, commençons par quelques exercices proposés au Brevet des collèges.

2.2 Les épreuves de brevet

Il faut bien être conscient que les épreuves de Brevet pilotent l'enseignement en classe de 3^e et en deçà. Or celles-ci ont évolué depuis la session de 2007. Dans les sessions antérieures à 2007, les exercices utilisant l'algèbre, étaient des exercices de développement et de factorisation. Par exemple, dans la session de juin 2006 (Groupe Est) on peut trouver l'exercice ci-dessous qui était un exercice classique de Brevet :

Exercice 2

On considère l'expression : $E = (3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x + 2)$.

1. Développer et réduire l'expression E .
2. Factoriser E .
3. Calculer la valeur de E pour $x = -2$.
4. Résoudre l'équation $(3x + 2)(5x - 3) = 0$. Les solutions de cette équation sont-elles des nombres décimaux ?

Figure 1 : Brevet des collèges 2006 (Groupe Est)

LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

Le but général de cet exercice, est la résolution d'une équation produit. Par des questions très guidées, on amène les élèves à transformer l'expression algébrique pour retrouver la forme factorisée qui permettra cette résolution. Notons qu'il n'y a pas d'exploitation de cette équation produit pour la résolution d'un problème, les questions sont peu finalisées pour d'autres buts que développer ou factoriser. En cela, ce type d'exercice était assez représentatif des exercices proposés en calcul littéral au début des années 2000 car le travail sur la technique occupait une place importante dans les classes même si les programmes de 2005 orientaient le travail sur l'aspect outil. C'est ce que soulignait déjà Chevillard dès 1989 :

« La manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage organisé au collège, en effet, n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même

la source de ses propres exigences. Aussi les « règles » de cette manipulation sont-elles standardisées (développer, factoriser, etc.) »

Voici maintenant des exercices posés à partir de 2007 qui montrent l'évolution vers des problèmes moins guidés dans lesquels l'algèbre est un outil pour atteindre la solution.

L'exercice ci-dessous est constitué d'un programme de calcul, ce qui était nouveau en 2007 dans un sujet de Brevet. Le but général est d'établir que le programme de calcul renvoie toujours le carré de la somme du nombre choisi et de deux. La première question demande de vérifier que le programme de calcul renvoie la valeur 0 lorsque le nombre choisi est le nombre (-2). Cette question, complètement fermée, doit permettre aux élèves de s'approprier le fonctionnement du programme de calcul. Dans la deuxième, les élèves doivent tester le programme avec le nombre 5 mais on ne leur

Exercice 2

On donne un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 4.
- Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi.
- Ajouter 4 à ce produit.
- Écrire le résultat.

1. Écrire les calculs permettant de vérifier que si l'on fait fonctionner ce programme avec le nombre -2 , on obtient 0.
2. Donner le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi est 5.
3.
 - a. Faire deux autres essais en choisissant à chaque fois un nombre entier et écrire le résultat obtenu sous la forme du carré d'un autre nombre entier (les essais doivent figurer sur la copie).
 - b. En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul? Justifier la réponse.
4. On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ?

Figure 2 : Brevet des collèges 2007 (Métropole)

donne pas la réponse dans l'énoncé. Enfin dans la question 3, ils doivent tester le programme avec deux nombres de leur choix. On voit bien la progressivité des questions. L'énoncé amène les élèves à faire une constatation sur quatre exemples avant de leur demander de généraliser dans la question 3b). Cette dernière question donne ainsi aux élèves, une occasion d'exprimer leur capacité à raisonner et à généraliser. Cependant, dans ce cas précis, certains élèves peuvent avoir des difficultés à faire une constatation à la suite des quatre exemples car la reconnaissance des carrés des nombres entiers n'est pas immédiate chez les élèves. La question 3a), en les obligeant à écrire leur réponse sous forme d'un carré, les aide à faire l'observation attendue. L'utilisation de la lettre n'est pas proposée aux élèves, ce qui est assez peu classique. Par contre la lettre est indispensable pour justifier correctement. L'expression obtenue, est une expression du second degré. C'est une difficulté supplémentaire car les élèves ne pensent pas à mobiliser les identités remarquables pour factoriser les expressions. Enfin la dernière question peut-être résolue par une mise en équation soit par une méthode essais-erreurs. Là encore aucune procédure de résolution n'est proposée aux élèves.

Comme nous l'avons dit, c'était la première année que ce type d'exercice était proposé au Brevet. Les deux dernières questions de cet exercice sont deux questions ouvertes qui devraient favoriser la prise d'initiative des élèves. La réponse à la question 3b) n'est pas facile à formuler et la lettre n'est pas introduite dans l'énoncé. Nous pensons que cet exercice a dû déstabiliser un grand nombre d'élèves et de professeurs.

Cette évolution se poursuit depuis 2007. L'ensemble du sujet n'a pas été bouleversé mais dans chaque sujet, nous avons pu trouver au moins un exercice qui demande aux élèves

de prendre des initiatives et de structurer un raisonnement. Comme nous l'avons dit précédemment, cette modification est cohérente avec la volonté affichée dans les programmes de faire évoluer l'enseignement des mathématiques, enseignement qui reste encore trop souvent centré sur l'apprentissage de techniques.

Les exercices avec prise d'initiative au Brevet des collèges sont des exercices dont la procédure experte est souvent une procédure algébrique mais comme les attendus du socle commun sont peu ambitieux en ce qui concerne l'algèbre, d'autres procédures sont possibles. On peut également constater que les programmes de calcul sont bien présents au Brevet des collèges, ce qui pourrait inciter à en proposer en amont en cours de formation. On retrouve bien les directives présentes dans les documents d'accompagnement des programmes. Au collège, les types de tâches ont donc évolué d'un travail sur la technique avec les tâches « développer » ou « factoriser » vers des tâches liées à l'aspect outil de l'algèbre « prouver » ou « mettre en équation et résoudre ».

Nous allons maintenant nous intéresser au savoir enseigné dans le domaine de l'algèbre au collège. Pour cela nous analyserons les exercices proposés dans des manuels scolaires de 5^e et nous nous intéresserons particulièrement à la présence des programmes de calcul et aux rôles qui leur sont attribués.

2.3. Analyse de manuels

Nous ne donnerons ici que quelques conclusions sur l'analyse de manuels de 5^e et 4^e. Nous avons tout d'abord analysé les problèmes présentés dans ce que les manuels désignent par « activités d'introduction » à l'algèbre élémentaire, puis les exercices d'application en essayant de mettre en évidence les choix explicites ou implicites qui ont été

LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

faits par les auteurs. Nous avons cherché les activités de preuve, si les programmes de calcul étaient présents dans ces activités d'introduction et pour quels types de tâches et nous avons tenté de déterminer quelle était la finalité de la production de formules.

Nous avons choisi cinq manuels de 5^e et de 4^e qui nous semblent les plus utilisés dans les classes (éditions 2010 pour 5^e et 2011 pour 4^e) : Phare Hachette, Prisme Belin, Transmath Nathan, Triangle Hatier et Sésamath. Dans chacun d'eux, nous avons tout d'abord constaté qu'un voire deux chapitres étaient consacrés à l'enseignement de l'algèbre. Nous avons ensuite analysé les activités d'introduction et les exercices de réinvestissement en utilisant la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) notamment avec les notions de types de tâches et les techniques associées. Nous avons classé les principaux types de tâches en trois grands thèmes :

- Travail sur les expressions algébriques :
 - « Etablir une formule à partir de situations diverses »
 - « Calculer pour $x=$ » ou « Remplacer x par ... dans la formule »
 - « Transformer une expression littérale »

- Preuve :
 - « Prouver un résultat général à partir de constatations »
- Résolution des équations :
 - « Mettre un problème en équation et le résoudre »
 - « Résoudre une équation »

Les manuels Prisme et Phare proposent moins d'activités d'introduction que les autres manuels, celles-ci consistent en la production de formules qui ne sont pas exploitées par la suite ou de calculs d'expressions algébriques pour des valeurs particulières. Il n'y a pas de programme de calcul ni d'activité de preuve.

Les manuels Triangle, Transmath et Sésamath proposent des exercices plus variés mais, après analyse, ils nous semblent tout de même insuffisants pour monter tout l'intérêt de l'utilisation de la lettre. De plus, ils ne comportent que des questions très fermées. Ils demanderaient à être complétés par de véritables problèmes de recherche qui donneraient tout son sens à la lettre. Là encore pas d'activités de preuve. Nous n'avons trouvé que deux programmes de calculs dans des activités qui, de plus, n'exploitent pas tout le potentiel de cet outil. On peut donc considérer qu'avec seulement deux acti-

Thèmes et types de tâches	Phare	Prisme	Transmath	Triangle	Sésamath
Travail sur les expressions algébriques					
Etablir une formule	2	2	5	4	5
Substituer un nombre dans une formule		3	4	5	8
Transformer une expression littérale	4	1	2	4	2
Résolution d'équations					
Résoudre une équation	1	1	3	1	2
Calcul littéral et démonstration					
Prouver un résultat					

Figure 3 : tableau récapitulatif partie activité d'introduction manuels 5^e

Phare	Prisme	Transmath	Triangle	Sésamath
En 5 ^e				
Trois exercices en approfondissement dont un utilisant un programme de calcul	Aucun exercice de preuve	Un exercice en approfondissement	Un exercice en approfondissement	Cinq exercices de preuve dont un utilisant un programme de calcul
En 4 ^e				
5/60	5/110	7/106	8/109	8/68

Figure 4 : tableau récapitulatif partie exercices, manuels 5^e et 4^e

vités contenant des programmes de calcul sur trente-trois au total, ceux-ci sont sous-utilisés. En 4^e la situation est assez peu différente dans le chapitre « Calcul littéral » : on trouve deux activités de preuve dans Transmath et Sesamath et une dans Triangle.

En ce qui concerne la partie exercices de ces manuels, nous pouvons constater qu’il y a très peu d’activités de preuve dans les deux classes (voire pas en 5^e). Nous supposons que les auteurs de manuels ont fait le choix de ne pas ajouter à la difficulté de l’entrée dans l’algèbre, la difficulté de comprendre les règles de la preuve en mathématiques. Cependant, ce choix limite les situations dans lesquelles la lettre montre tout son intérêt et ne permet pas aux élèves d’avoir une activité mathématique qui se rapproche de l’activité du « mathématicien ».

3. — Expérimentation

Nous avons choisi un problème différent de ceux rencontrés dans les manuels analysés et nous avons expérimenté un programme de calcul dont l’objectif est de prouver une conjecture. Pour le recueil des données, nous avons

placé une caméra pour filmer le travail des élèves et les moments de mise en commun. Lors des travaux de groupes, la caméra filmait les échanges des élèves et lors des mises en commun, elle était pointée sur le professeur. Nous avons distribué à chaque élève un document sur lequel était écrit l’énoncé de l’activité. Les élèves devaient répondre directement sur ce document que nous avons collecté à la fin de la séance. Pour analyser les procédures des élèves nous avons utilisé les travaux de Balacheff (1987) sur la preuve que nous développons maintenant.

3. 1 Preuve pragmatique et preuve intellectuelle

Nous avons décidé de nous intéresser aux situations de preuve en algèbre pour « *montrer que « faire vivre » dans la classe une des pratiques caractéristiques des mathématiques (la façon de valider des propositions) est aussi un moyen de développer une dimension « outil » de l’algèbre* » (Barallobres, 2004) et ainsi donner envie aux élèves de s’engager dans la démarche algébrique. L’hypothèse principale de Balacheff (1987) sur les situations didactiques

LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

visant l'apprentissage de la démonstration est que les démarches de validation doivent apparaître aux élèves comme un moyen fiable et efficace pour établir la vérité d'une proposition. Balacheff (1987) décrit les caractéristiques qui différencient l'explication de la preuve et la preuve de la démonstration. La preuve se différencie de l'explication par le fait que le discours validant la proposition a changé de statut et a été accepté par une communauté. La démonstration est un type de preuve particulier : c'est un raisonnement organisé dans lequel s'enchaîne une suite d'énoncés en respectant des règles déterminées. Balacheff (1987) a proposé une classification des processus de preuve observés dans les procédures des élèves. D'une part, on trouve les preuves pragmatiques qui sont liées à la situation et sont fondées sur l'action effective des élèves dans cette situation et d'autre part, les preuves intellectuelles qui sont détachées de l'action et sont fondées sur la formulation des propriétés en jeu. Pour Balacheff (1987), l'évolution des preuves pragmatiques vers les preuves intellectuelles peut s'observer par l'évolution des deux caractéristiques. La première est du côté du langage que les élèves utilisent pour produire la preuve, passage d'un langage familier basé sur la description de l'action à un langage fonctionnel basé sur la réflexion vis-à-vis de la connaissance. La seconde est du côté du statut de la nature de la connaissance, passage d'une connaissance liée à la situation à une connaissance élément d'une théorie qui sera la référence. Balacheff (1987) affine sa classification en mettant en évidence trois types de preuves pragmatiques, l'empirisme naïf, l'expérience cruciale et l'exemple générique et trois types de preuves intellectuelles, l'expérience mentale, le calcul sur les énoncés et la démonstration :

Les preuves pragmatiques :

L'empirisme naïf : « Nous rattachons à ce type les démarches marquées par l'absence d'indices d'un processus de validation. Les conjectures sont tirées de l'examen de peu de cas, le problè-

me de validité n'est pas abordé. En revanche, les élèves montrent dans les faits ou par leurs propos leur confiance en ces assertions ».

L'expérience cruciale : est un procédé « qui consiste à vérifier une proposition sur un cas pour lequel on ne se fait pas de cadeau en affirmant que si cela marche alors cela marchera toujours. [...] Ce type de validation se distingue de l'empirisme naïf en ce que l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaît pour aussi peu particulier que possible. »

« **L'exemple générique** consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformation sur un objet présent, non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe ».

Les preuves intellectuelles :

« **L'expérience mentale** invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre, ce qui était le cas pour l'exemple générique ».

« Dans notre étude, pour désigner les preuves des élèves qui iraient au-delà de l'expérience mentale, mais que nous ne pourrions reconnaître véritablement comme des démonstrations, nous parlerons de **calcul sur les énoncés** ». « Nous retenons ici des preuves qui ne doivent rien à l'expérience. Ce sont des constructions intellectuelles fondées sur des théories plus ou moins formalisées, plus ou moins explicitées, des notions en jeu dans la résolution de problème. Ces preuves apparaissent comme le résultat de calcul inférentiel sur des énoncés. Elles s'appuient sur des définitions, ou des propriétés caractéristiques explicites ».

La démonstration qui est, comme nous l'avons développé précédemment, la seule preuve acceptée par la communauté des mathématiciens.

Balacheff fait l'hypothèse que le désir de certitude est le moteur des processus de preuve. Pour cela il faut trouver des « problèmes motivants » c'est-à-dire des problèmes qui sont suf-

faisamment intéressants pour que les élèves acceptent de les chercher. On peut distinguer trois types d'activités dans lesquelles il faut faire une preuve : une preuve pour décider, une preuve pour convaincre ou une preuve pour comprendre.

3.2 Description et analyse de la situation retenue

La situation proposée se réfère au cadre des situations didactiques de Brousseau (1998) qui propose de déterminer des situations fondamentales pour l'apprentissage des notions mathématiques. Les situations proposées doivent permettre de donner un sens aux objets mathématiques enseignés. Elles doivent également permettre aux élèves de surmonter les obstacles, de remettre en cause leurs connaissances antérieures et de s'appropriier le savoir visé par l'enseignant. Pour cela, les connaissances des élèves doivent être insuffisantes ou peu économiques (car l'objectif est l'acquisition d'une nouvelle connaissance). La connaissance à acquérir doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème (au niveau considéré). Les interactions entre les élèves et le milieu sont le moteur du processus d'apprentissage. Pour faire évoluer les conceptions des élèves, il faut un milieu riche qui permette des rétroactions. Or dans le cas de la production de preuves intellectuelles, qui sont comme nous l'avons dit des preuves détachées de l'action, « *le milieu ne pourra pas être matériel* » (Barallobres, 2004). Les élèves devront décider entre eux des règles du débat.

« Comme il n'y a pas de milieu matériel, dans notre travail, il faut identifier les critères de validité sur lesquels l'élève peut s'appuyer pour valider ce qui a été produit pour résoudre la contradiction. » (Ibid.).

La difficulté réside dans le fait que dans le processus d'apprentissage de la preuve, ces

critères de validité sont justement en cours de construction chez les élèves. Pour Balacheff (1988), c'est « *l'interaction sociale qui est le moteur des processus de validation* ». Le rôle du professeur est, dans ces situations, primordial. En effet, c'est le professeur qui connaît les critères de validité. Les élèves n'ont pas de connaissances antérieures qui pourraient leur permettre de juger de la validité de ces critères. C'est donc l'enseignant qui va modifier le milieu pour donner du sens à ces critères. Mais il faudra proposer « *un flux suffisant de situations nouvelles* » (Brousseau, 1976) pour faire acquérir à ces critères le statut d'outil nécessaire pour établir une preuve.

3.3 Analyse a priori du problème

Voici l'énoncé du problème choisi (adapté de l'activité 8 p 10 Magnard 5^e édition 2002)

1. Appliquer le programme de calcul ci-dessous avec le nombre 4 puis le nombre 10.

Choisir un nombre.
Ajouter 3 à ce nombre.
Multiplier le résultat obtenu par 2.
Soustraire le nombre choisi au départ.
Soustraire 6.

2. Applique ensuite ce programme de calcul avec trois autres nombres de ton choix.

3. Que remarques-tu ?

4. Est-ce vrai pour n'importe quel nombre choisi au départ ? Justifie ta réponse.

Figure 5 : Problème retenu pour l'expérimentation

Le but est d'amener les élèves à ressentir le besoin de produire une preuve pour comprendre

LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

et expliquer la conjecture établie à la question 3). Pour cela, nous avons identifié plusieurs critères à prendre en compte.

- Tout d'abord, les élèves doivent pouvoir s'engager dans l'activité sans la connaissance visée. Les trois premières questions respectent ce choix. En effet les pré-requis nécessaires pour faire fonctionner le programme de calcul avec des valeurs numériques sont l'addition, la soustraction, la multiplication et les règles de priorité (si les élèves écrivent le programme en une seule expression).
- En revanche, la solution ne doit pas être complètement accessible. La réponse à la dernière question nécessite la production d'une preuve, qui sans l'utilisation de la lettre, sera difficilement formulable et c'est cette difficulté qui sera exploitée pour le passage à une preuve algébrique.
- La lettre ne doit pas être introduite dans l'énoncé et l'utilisation de la lettre doit permettre de produire une preuve plus explicite que les preuves élaborées sans elle.

Nous avons volontairement laissé l'énoncé dans le format classique des activités comportant un programme de calcul et nous reviendrons plus tard sur les difficultés que cela a occasionnées. Nous allons maintenant justifier le choix des questions posées dans cet énoncé :

- *Question 1* : Nous avons imposé les valeurs numériques avec lesquelles les élèves doivent tester le programme pour favoriser l'appropriation du problème. Nous proposons les mêmes valeurs pour tous afin de faciliter la mise en commun. Les nombres choisis sont différents des nombres qui interviennent dans l'énoncé du programme ce qui permettra en cas d'erreur de situer plus facilement celle-ci. De plus les calculs sur les nombres entiers permettent d'obte-

nir rapidement des résultats et limitent les erreurs de calculs plus fréquentes avec des décimaux ou des rationnels qui feraient perdre l'objectif poursuivi.

- *Question 2* : Nous laissons aux élèves le choix de trois nombres afin de leur permettre d'autres essais et d'enrichir les échanges au moment de la mise en commun. Ils devraient observer que quel que soit le choix des valeurs numériques, le programme renvoie toujours le nombre choisi au départ. On peut s'attendre à ce que les élèves se contentent de faire fonctionner le programme avec des nombres entiers, domaine numérique qui est aussi un domaine de confiance pour eux. C'est précisément cette « confiance » que nous pourrions questionner. Au moment de la mise en commun, nous pourrions alors réexpliquer les critères de validation en mathématiques et insister sur le fait que des essais ne suffisent pas pour prouver. Par contre, nous risquons d'observer l'effet inverse, c'est-à-dire que cela risque de conforter les élèves dans l'idée que des essais suffisent puisqu'il n'y a pas de contre-exemple à cette affirmation.
- *Question 3* : Nous demandons une formulation de la remarque. Le programme de calcul renvoie toujours le nombre choisi au départ. On peut donc s'attendre à des remarques en toutes lettres comme : « on revient au nombre de départ ». Cette conjecture nous semble facile à constater et donc à formuler. On peut donc penser que les élèves seront convaincus et que le besoin de preuve, s'il existe, portera davantage sur la recherche d'explication (pourquoi a-t-on ce résultat ?). Nous devons cependant être particulièrement attentif au travail des élèves qui ne retrouveraient pas le nombre de départ dans les questions précédentes : erreurs de calcul, erreurs dans le respect des priorités

pour les élèves ayant écrit le calcul en une seule expression, dans la compréhension de la consigne dans la mesure où exprimer que l'on est revenu au nombre de départ peut être déroutant : c'est tellement simple que ça ne peut pas être ça !... Le résultat du programme de calcul est une variable importante. En effet, trouver le nombre choisi au départ, permettra une interprétation simple de l'expression algébrique finale.

- *Question 4* : C'est dans cette question que nous pourrions appréhender à la fois le sens que les élèves donnent à la généralisation de leur conjecture et au type de preuve qu'ils y associent. Nous pourrions voir comment ils gèrent la conviction qu'ils ont de leur conjecture et les moyens qu'ils mettent en œuvre pour la transmettre à leurs camarades.

En réponse à cette dernière question, on devrait retrouver dans les productions des élèves, les types de preuve définis par Balacheff :

- *L'empirisme naïf* : les élèves se contentent des cinq premiers calculs et sont convaincus de la véracité de leur remarque pour tous les nombres.
- *L'expérience cruciale* : les élèves essaient sur un nombre « compliqué » (ou très grand) et pensent que si ça « marche » pour ce nombre là alors ça « marche » tout le temps.
- *L'exemple générique* : les élèves produisent des phrases du type, « on ajoute 3, on multiplie par 2. Puis après on soustrait 6 donc ça s'annule. Et pour le nombre, par exemple, on choisit 7, on le multiplie par 2 donc 14, puis après on soustrait 7. Donc on retrouve 7, le nombre choisi au départ ».
- *L'expérience mentale* : les élèves essaient de traduire les opérations par des phrases du type « on a ajouté 3 puis multiplié par deux donc ça fait 6. Ensuite on enlève 6 donc

ça fait zéro. Et pour le nombre choisi, on le multiplie aussi par deux puis on le soustrait une fois, donc il reste une fois » ou utilisent une expression littérale.

Nous pouvons nous demander si l'introduction de la lettre par les élèves est envisageable dans ce problème. Dans le chapitre précédent, la professeure a traité le chapitre sur les aires des parallélogrammes. Cela a permis un travail sur les formules, en particulier la formule a été présentée comme un « moyen » pour écrire une propriété vraie pour tous les parallélogrammes. Pour ce programme de calcul, la professeure va demander aux élèves de trouver un moyen d'expliquer pourquoi la remarque est vraie pour tous les nombres.

Certains élèves peuvent faire le parallèle et essayer d'écrire une formule. Mais l'établissement de l'égalité $(x + 3) \times 2 - x - 6 = x$ pour tout x représentera une vraie difficulté pour les élèves car ils ne maîtrisent pas encore les règles de réduction d'écriture littérale même si la distributivité de la multiplication sur l'addition a déjà été vue et travaillée sur des exemples numériques (par exemple en calcul mental). Ainsi le développement de $(x + 3) \times 2$ devrait être facilité mais cela constituera un vrai enjeu de cette situation. On voit bien ici le problème d'enseignement qui avait déjà été soulevé par Chevillard (1985). Pour pallier à la difficulté des manipulations d'écriture, celui-ci proposait également d'introduire l'algèbre par son aspect « outil », mais en précisant : « *mais le commençant ne maîtrisant pas l'outil algébrique-par définition-, ils [les auteurs de manuels] doivent s'en tenir à un problème de structure assez simple pour que l'introduction du langage et des procédures algébriques demeurent aisément compréhensibles* ».

Nous avons choisi un programme de calcul de structure simple à quatre étapes. Les

LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

élèves ont à effectuer une addition puis une multiplication et enfin deux soustractions. Le fait de soustraire x à l'avant dernière étape devrait compliquer la formulation des phrases pour les élèves produisant une preuve relevant de l'expérience mentale. Cette difficulté sera un argument de plus dans la perspective de donner du sens à l'utilisation de la lettre. Enfin le choix d'un programme qui renvoie le nombre choisi au départ, rend l'interprétation de l'expression algébrique finale particulièrement simple.

Nous avons proposé un énoncé comportant quatre questions séparées car d'une part, cela correspond au format classique de ce type d'activité et d'autre part, cela permet une appropriation rapide du programme de calcul afin de laisser plus de temps pour la question de la généralisation qui est le but de l'activité. Par contre, cela va entraîner une résolution pas à pas qui masque l'objectif général en mettant au même plan les différentes questions alors que c'est bien la question 4 qui est l'enjeu de l'activité.

On peut donc dire que cet exercice a un potentiel didactique qu'il nous a semblé intéressant d'expérimenter. Nous allons maintenant présenter les conditions dans lesquelles nous avons mis en œuvre cette situation dans une classe de 5^e.

3.4 Analyse de l'expérimentation

L'expérimentation s'est déroulée au collège Fauriel à Saint Etienne dans une classe de 5^e au

mois de mai 2012 avec une professeure volontaire. L'effectif est de 24 élèves issus de milieux sociaux très différents, l'établissement accueillant des élèves nouvellement arrivés en France.

La professeure a programmé le travail sur l'algèbre à la suite du travail sur la distributivité avec des valeurs numériques et du chapitre sur les aires des figures usuelles. La lettre a donc déjà été introduite mais elle a été vue comme variable. Les élèves n'ont pas encore abordé les réductions d'écriture.

La séance a débuté par une lecture collective de l'énoncé et l'explication du programme de calcul puis un premier temps de recherche individuelle pendant lequel les élèves se sont approprié le problème, ont testé le programme pour les nombres 4 et 10 et, pour les plus rapides avec d'autres nombres. La professeure a circulé dans les rangs pour répondre aux questions des élèves. Les questions portaient sur le passage du registre du langage naturel au registre numérique. Après une dizaine de minutes de travail individuel, la professeure a demandé aux élèves de se mettre par deux ou trois et d'échanger leurs résultats. Il y avait onze groupes répartis de la façon suivante selon le tableau ci-dessous.

La professeure a fait ensuite une première mise en commun qui a permis d'énoncer la conjecture. Puis elle a demandé aux élèves de répondre à la question 4 en insistant sur le fait qu'il fallait pour dire pourquoi c'était toujours

Nom du groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nom des élèves	A et D	F et G	B, I et L	J et K	L et M	H et N	O et P	E et Q	R et S	T et U	C, V et W

Fig 6 : les groupes d'élèves

vrai. Il s'en est suivi un temps de travail par groupes d'une quinzaine de minutes, puis une deuxième mise en commun lors de laquelle les groupes devaient exposer leur production.

Les trois premières questions nous ont permis d'observer si les élèves s'approprièrent

facilement le programme de calcul. La question 4 nous a permis d'observer les types de preuves présentées spontanément par les élèves ainsi que l'apparition de la lettre et le sens que les élèves lui donnent à ce stade de l'apprentissage. Nous pouvons classer les justifications en quatre catégories selon la typologie de Balacheff.

Empirisme naïf : le groupe 1 a justifié à partir d'un exemple (Elève A) :

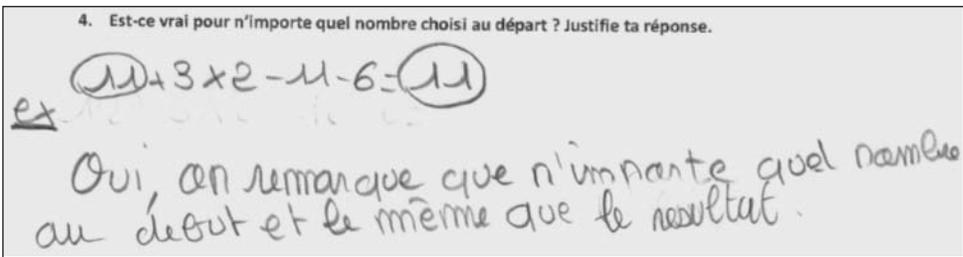


Figure 7 : production de l'élève A du groupe 1 (question 4 après la mise en commun)

Les élèves de ce groupe ont bien compris la relation ; d'ailleurs ils entourent le nombre choisi dans le calcul et dans le résultat mais ils s'arrêtent à cette constatation.

Expérience cruciale : trois groupes (2, 6 et 8) ont produit une preuve relevant de l'expérience cruciale. Un groupe a essayé le nombre 18 999 125 mais n'a pas eu le temps d'expliquer les raisons de ce choix et donc de justifier explicitement la réponse à la question 4.

Un groupe explique qu'il a choisi un grand nombre à virgule et comme la remarque est vraie pour ce nombre, elle sera toujours vraie.

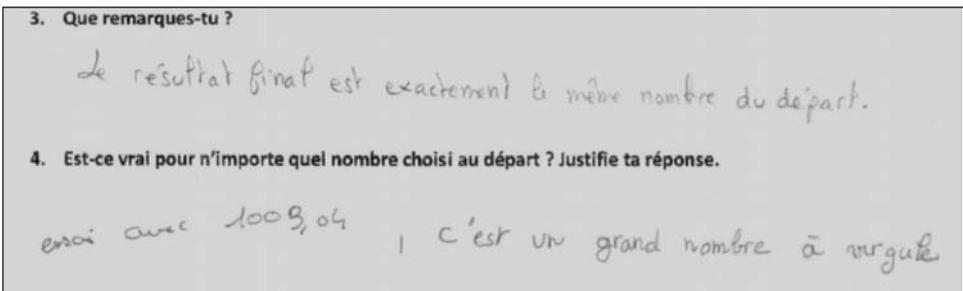


Figure 8 : production de l'élève E du groupe 8 (question 4)

.../...

LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

L'élève E pense avoir trouvé un nombre suffisamment général pour représenter l'ensemble de tous les nombres. Lors du travail individuel, il n'avait testé que des nombres entiers compris entre un et dix. On peut donc dire que le travail de groupe et la première mise en commun lui ont permis d'approfondir sa réflexion même s'il a produit une preuve relevant de l'expérience cruciale. Le groupe 2 qui fait des essais avec des décimaux et le nombre p a trouvé ces valeurs suffisamment particulières car dans la question 4, il justifie à partir du « calcul » qu'il a fait avec π , même s'il a fait des calculs avec la valeur approchée 3,14.

3. Que remarques-tu ?

On remarque toujours sur le nombre de départ peut importe celui que l'on choisit.

4. Est-ce vrai pour n'importe quel nombre choisi au départ ? Justifie ta réponse.

Oui, car π représente une infinité de décimal et que lorsque l'on applique la formule on retrouve π comme au départ.

Figure 9 : production de l'élève G du groupe 2 (question 4)

Nous pensons que pour ce groupe il y a peut-être une confusion entre le fait que l'ensemble des nombres (réels) est infini, ce qui a été rappelé dans la mise en commun, et le fait que p a une écriture décimale avec une infinité de chiffres après la virgule.

L'expérience mentale : nous avons pu observer deux types de preuves relevant de l'expérience mentale.

Tout d'abord deux groupes (4 et 7) ont produit une justification en langage naturel comme nous l'avons anticipé dans l'analyse a priori.

Oui c'est vrai pour tout les chiffre car j'ai essayer avec des nombre paire et impair, à un chiffre et a deux. On obtient le nombre de départ car quant on ajoute 3 puis on multiplie par 2, puis on enlève le chiffre de départ il nous reste le 6(3x2) et enfin on soustrait par 6.

Figure 10 : production de l'élève J du groupe 4 (question 4)

.../...

Oui car si on ajoute 3 a un nombre et qu'on multiplie par 2, cela revient à ajouter 6 que l'on soustrait à l'étape d'après.

Figure 11 : production de l'élève K du groupe 4 (question 4)

Cette preuve relève de l'expérience mentale car pour l'expérience mentale, « les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre, ce qui était le cas pour l'exemple générique. ». Nous pouvons observer dans ces productions la volonté des élèves d'expliquer pourquoi le programme renvoie toujours le nombre choisi au départ. Ce sont des preuves pour comprendre. Les phrases produites sont complexes car les élèves ont des difficultés à exprimer clairement leur raisonnement.

Enfin, un seul groupe, le 5, (figure 9) a utilisé la lettre x . Il a justifié l'utilisation de celle-ci en expliquant que dans le chapitre précédent, les formules générales des aires des figures étaient écrites avec les lettres donc, quand il faut écrire « quelque chose de général », il faut utiliser les lettres.

3. Que remarques-tu ?
 Le nombre que l'on choisit est le même que le résultat.

4. Est-ce vrai pour n'importe quel nombre choisi au départ ? Justifie ta réponse.
 Oui, car $x + 3$
 $(3 + x) \times 2$
 $(3 + x) \times 2 - x$
 $(3 + x) \times 2 - x - 6$

J'ai eu l'idée de x car dans le cahier on l'écrivait pour des formules.

Figure 12 : production de l'élève L du groupe 5 (question 4)

On peut donc classer les onze réponses des groupes d'élèves de la façon suivante :

Type de preuve	Nombres de productions
Empirisme naïf	1
Expérience cruciale	3
Expérience mentale	3
Aucune réponse	3
Contre exemple	1

Figure 13 : types de preuves produites par les groupes (question 4)

LA "PREUVE POUR COMPRENDRE", UN LEVIER
POUR LA CONSTRUCTION DU SENS...

L'élève qui n'avait pas formulé la conjecture attendue s'est regroupé avec deux autres élèves qui n'ont pas répondu à la question 4, nous avons donc classé la réponse de ce groupe dans « aucune réponse ».

On voit que, parmi les élèves qui ont produit une preuve, trois relèvent de preuves pragmatiques et trois de preuves intellectuelles (le souci de preuve était bien présent). Cependant, quatre groupes n'ont pas formulé de réponse, ce qui reste un nombre élevé. On peut trouver une explication dans le fait que la professeure a insisté, lors des mises en commun, sur les différents types de nombres que les élèves pouvaient choisir pour faire fonctionner le programme. Elle voulait faire comprendre aux élèves que des essais avec des nombres entiers compris entre 1 et 10, la plupart du temps, ne suffisaient pas pour affirmer que la remarque était vraie pour tous les nombres, mais cela a eu pour conséquence de focaliser l'attention des élèves sur les essais et non sur les preuves intellectuelles. Il y a donc eu un changement de contrat pour les élèves : ils ne cherchaient plus à montrer que la remarque était vraie pour tous les nombres mais ils cherchaient à trouver différents types de nombres, ce qui a ralenti voire empêché leur travail. Voici un extrait de la première mise en commun (P désigne la professeure, E un élève et Es des élèves) pour illustrer :

P : Ensuite, on vous a laissé le choix de trois nombres. Il est comment l'ensemble de tous les nombres ? Vous me dites toujours qu'il est comment ?

Es Réponses à la volée : différents, infini.

P : infini donc vous avez un choix qui est très très large et la plupart d'entre vous s'est confiné aux nombres entre 0 et 100. On peut essayer des nombres

E: très grand

P : si on veut, on peut tester la remarque que vous avez écrite avec un grand nombre. On peut aussi

essayer avec un nombre décimal, est-ce que ça marche encore ?

E : avec un nombre inférieur.

P ; inférieur à quoi ?

E : à 0 .

P : avec les nombres relatifs, on n'a pas encore appris à calculer. Mais on peut essayer avec un nombre inférieur à

E : à 1.

P : oui avec des nombres inférieurs à 1 si vous voulez ; Quel type de nombre vous auriez pu essayer ?

Es : nombre à virgule, nombre négatif

P : sous quelle forme a-t-on vu les nombres ?

E : les nombres pairs et impairs

P : les fractions on a appris à effectuer les opérations avec les fractions, vous auriez pu choisir une fraction. D'accord. Alors ensuite vous pourrez compléter vos calculs avec des nombres différents tout à l'heure. Pour l'instant, il y en a qui ont commencé à mettre leur remarque par écrit. Et essayer de la justifier, de montrer que c'est tout le temps vrai. Vous voulez montrer que c'est tout le temps vrai en disant et oui ça marche on l'a fait 8 fois et vous vous permettez de dire on obtient toujours telle chose ou telle chose. Maintenant on vous demande de trouver un truc pour montrer que c'est vrai pour m'importe quel nombre. Qu'est-ce qu'on pourrait faire pour dire que c'est toujours vrai. Par exemple Marie a fait une phrase.

Voyons maintenant la synthèse que la professeure a faite à partir de la production du groupe 5. Sur la figure 11, nous pouvons observer que l'élève obtient l'expression $(3 + x) \times 2 - x - 6$. Or les transformations d'expressions n'avaient pas encore été abordées ; l'élève ne sait donc pas réduire l'expression et il ne peut pas retrouver le nombre choisi au départ par l'expression algébrique. Le raisonnement en langage naturel est, à ce moment là de la progression, plus convaincant que l'utilisation de la lettre.

La gestion du professeur est ici fondamentale afin que l'utilisation de la lettre devien-

ne pour les élèves l'outil le plus performant. En effet, le milieu, dans une activité de preuve intellectuelle « *ne peut pas être matériel* » (Barallobrès, 2004). Il revient donc au professeur de faire accepter les critères de validité aux élèves. Brousseau (1998) parle « *d'interaction sociale* » comme « *moteur des processus de validation* », interactions entre les élèves et entre les élèves et le professeur. Pour cela, la professeure rappelle aux élèves que l'on voulait montrer que le programme donne toujours le nombre choisi au départ, donc que l'on doit trouver x . Elle effectue alors la réduction de l'expression algébrique en justifiant les transformations avec la distributivité qui a été vue dans un chapitre précédent et en reprenant les formulations sous forme de phrases. Cette référence au langage naturel pour expliquer les transformations d'écriture permet de donner du sens au travail effectué. Quelques élèves suivent les transformations mais d'autres ont des difficultés à comprendre l'objectif de ce travail, ce qui est normal à ce stade de l'apprentissage. Notons que lorsqu'elle termine la dernière réduction et écrit la lettre, plusieurs élèves réagissent positivement. On entend un grand « ah ! » d'admiration.

L'interprétation du résultat du programme ne pose pas de problème d'ordre structural car on obtient x qui est le nombre choisi au départ. Si le résultat avait été, par exemple, $2x$, il aurait fallu en plus que les élèves interprètent l'écriture $2x$ comme étant celle du double de x , ce qui n'est pas évident à ce stade de l'apprentissage. Les élèves ont des difficultés à suivre les étapes de réductions car ils ne connaissent pas les procédures et les modalités de transformations d'écriture et ne peuvent pas imaginer qu'elles permettent d'obtenir x . Mais le fait de constater que l'on obtient x a éveillé leur intérêt.

Pour terminer la séance, la professeure distribue une feuille sur laquelle se trouve une synthèse à trous de ce qui a été fait.

3.5 Conclusion de l'expérimentation

En conclusion, nous pouvons dire que cette situation a permis à tous les élèves de s'engager dans une démarche de recherche et, pour certains, de produire une formulation de la généralisation attendue. Nous avons ainsi observé une véritable activité mathématique ce qui était un objectif de notre expérimentation car, en collège, trop d'élèves n'osent pas produire une réponse par peur de l'erreur. La situation proposée et la gestion de classe leur ont semblé suffisamment rassurantes pour leur permettre de s'engager dans la tâche. Les modalités de travail ont alterné entre travail individuel, travail de groupes, mise en commun puis retour au travail de groupes pour des rétroactions. Ces différents temps de travail ont favorisé les échanges entre élèves ce qui a sûrement permis aux différents types de preuve que nous avons anticipés d'être observées.

L'exploitation des productions des élèves, et en particulier le lien entre la justification en langage naturel et l'écriture algébrique, a permis de donner du sens à ce premier travail avec la lettre. Tout d'abord les élèves ont pris en charge la responsabilité d'expliquer pourquoi le résultat est toujours le nombre choisi au départ et c'est cette recherche d'explication qui a motivé leur implication dans la tâche. On retrouve ici l'une des fonctions de la preuve (la preuve pour expliquer) qui renvoie à l'hypothèse de Barallobrès. Après l'analyse de l'expérimentation, il nous semble que c'est cette fonction qui devrait être privilégiée pour donner du sens à l'outil. En effet la preuve pour expliquer est déconnectée de l'aspect affectif (séduction ou autorité) que l'on peut retrouver dans la production d'une preuve pour convaincre. De plus, les deux groupes qui ont produit des preuves en langage naturel ont exposé aux autres élèves, lors du débat public, les phrases qu'ils avaient produites. Les difficultés de formulations sont

clairement apparues. Comment dire de façon simple ce qu'ils ont observé dans l'enchaînement des calculs ? La confrontation de ce type de preuve avec la preuve produite par le groupe ayant introduit la lettre a permis d'atteindre un premier objectif : l'introduction de la lettre pour traduire le langage naturel en langage mathématique et de définir ainsi l'expression algébrique comme la traduction d'un programme de calcul (Chevallard, 2007).

Le deuxième objectif était de montrer le rôle de la lettre dans la production d'une preuve intellectuelle. Cependant, la difficulté que nous avons envisagée en ce qui concerne les transformations des expressions littérales a bien été constatée. Elle s'est révélé être un obstacle à la production de la preuve attendue. Cependant la réaction très favorable des élèves lorsque les réductions d'écriture ont permis de trouver x laisse penser que les élèves seront motivés à entrer dans la technique pour être plus performants la prochaine fois. Cela nous conforte également dans le choix d'un programme de calcul de structure simple mais pas trop qui renvoie toujours le nombre choisi au départ. Nous pensons que c'est essentiellement le fait de trouver x qui a permis de relativiser les difficultés ressenties lors des réductions d'écritures. De plus nous pouvons espérer que les élèves aient envie de s'engager dans la compréhension des règles de simplification pour pouvoir ensuite réutiliser la lettre dans une autre activité.

Il nous faut réfléchir à une gestion différente de cette activité afin de limiter l'intervention du professeur et de favoriser le travail des élèves dans la phase adidactique pour les amener à la production attendue. Il faut également se poser la question de la production de la nouvelle connaissance dans ce débat public. Dans une phase adidactique, l'observation des stratégies des élèves et en particulier le changement ou l'adaptation de stratégie est un indicateur de la production

d'une nouvelle connaissance. Lors du débat, il est difficile d'évaluer précisément l'apprentissage de chaque élève. Il faudrait donc poursuivre cette recherche et réfléchir aux interventions qui permettraient d'une part de ne pas orienter le travail des élèves vers une procédure de recherche de contre-exemple mais vers la production d'une preuve intellectuelle.

Cette expérimentation a montré que la professeure, en accordant une importance égale à toutes les questions, orientait les élèves vers des essais multiples ce qui n'était pas l'objectif visé. Il faudrait proposer un énoncé différent en proposant directement la question 4. Les réponses des élèves auraient été différentes car ils auraient été plus libres, les essais seraient apparus comme un outil pour se convaincre et la production d'une preuve comme un outil pour comprendre.

4. — Conclusion

Il nous a semblé intéressant de réfléchir à une activité d'introduction de l'algèbre par la preuve, car c'est une nouveauté explicite des programmes qui n'est pas encore prise en compte dans les manuels que nous avons analysés. De plus, nous pensons que le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles nécessite un apprentissage spécifique qui doit occuper une place transversale dans les savoirs mathématiques enseignés en classe de 5^e afin de mettre en évidence l'une des finalités de l'algèbre. Pour atteindre cet objectif, nous avons décidé de tester une activité comprenant un programme de calcul, outil qui est peu exploité dans les activités d'introduction des manuels comme nous l'avons constaté dans notre analyse. Mais pour nous, il s'avère que les programmes de calcul sont d'une part, des outils suffisamment accessibles aux élèves pour qu'ils permettent l'investissement de tous et, d'autre part qui leur permettent de s'engager dans les questions de généralisation. Comme l'activité pro-

posée n'est pas une simple activité de production de formule sans aucune exploitation, nous avons pu assister à un travail avec un objectif clairement défini et motivant pour les élèves.

Cependant l'expérimentation a permis de mettre en évidence les limites de cette activité. Tout d'abord, comme nous l'avions prévu, la lettre n'est pas apparue souvent car elle n'est pas encore familière aux élèves. De plus dans le groupe où elle est apparue, les élèves n'ont pas pu conclure car ils ne maîtrisaient pas les transformations algébriques. C'est donc la professeure qui a eu, lors de la synthèse, la responsabilité de l'introduction de celle-ci et qui a justifié les calculs. Il y a là une difficulté liée à ce type de problème où l'on introduit à la fois un nouveau type de tâche, une nouvelle technique avec des éléments technologiques connus dans un autre domaine.

Une seconde difficulté réside dans l'appropriation de cette situation par le professeur. En effet, on a vu que les premières questions qui avaient pour but l'appropriation par les élèves du programme de calcul, puis l'élaboration de la conjecture ont été travaillées pour elles-mêmes alors que c'était dans la dernière question que se trouvait l'enjeu du problème et le nouveau savoir. Deux raisons peuvent expliquer cette bifurcation au sens de Margolinas, 2009. D'une part, on sait que les élèves ont des difficultés sur les calculs numériques, et donc le professeur doit les vérifier. D'autre part, comme les questions sont placées au même niveau, celles-ci ont été traitées avec la même importance par la professeure.

Pour répondre à notre hypothèse de recherche, on peut donc dire que les programmes de calculs sont un outil qui permet de proposer des problèmes dont le potentiel didactique s'est révélé intéressant lors de l'expérimentation. Ils permettent de travailler le passage des

preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles tout en introduisant la lettre.

Nous pensons que les problèmes contenant des programmes de calculs doivent prendre une place importante dans l'enseignement de l'algèbre au collège. Parallèlement, il faut faire travailler les élèves sur les transformations d'expressions littérales. Nous pensons que ces programmes de calculs pourraient être le support d'une nouvelle expérimentation dont l'objectif serait de tester une progression sur ceux-ci (sur le même sujet voir Alves et al., 2013) :

- En classe de 5^e il faudrait débiter le travail sur les programmes de calcul dans le domaine numérique au moment de la découverte des règles de priorité. Ceci permettrait aux élèves de se familiariser avec cet outil. Il faudrait également compléter l'activité expérimentée en proposant ultérieurement des programmes de calcul qui n'offrent aucune généralité pour travailler la notion de contre-exemple et pour ne pas enfermer les élèves dans une procédure qu'ils appliqueraient sans réfléchir.
- En classe de 4^e, nous pourrions proposer des programmes de calculs dont l'objectif serait de retrouver le nombre choisi au départ, connaissant le résultat. Pour travailler les équations, des activités d'équivalence de programmes pourraient être proposées. Nous n'avons là non plus pas eu le temps d'expérimenter ces activités dans le cadre du mémoire. Mais nous en avons déjà proposées à nos propres élèves qui nous ont semblés plutôt intéressés.
- En classe de 3^e, l'introduction à la notion de fonction pourrait être l'occasion de réinvestir le travail sur les programmes de calcul.

Nous pensons qu'un travail de recherche important sur la richesse et les potentialités des programmes de calculs reste donc à faire.

Bibliographie

- ALVES, C., COPPE, S., DUVAL, V., GOISLARD, A., KUHMANN, H., MARTIN DAMETTO, S., PIOLTI LAMORTHE & C., ROUBIN, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. REPERES IREM Spécial Algèbre n° 92.
- ASSUDE T, COPPE S & PRESSIAT A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In Recherches en didactique des mathématiques Hors série. Enseignement de l'algèbre élémentaire Bilan et perspectives. Coordonné par Coulange, Drouhard, Dorier & Robert. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BALACHEFF N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches en Didactique des Mathématiques. , La Pensée Sauvage : Grenoble. Vol 3/3. 261-304.
- BARALLOBRES G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. Recherches en Didactique des Mathématiques. , La Pensée Sauvage : Grenoble. Vol 24, n° 2.3, pp 285-328
- BOMBRUN NIGON C. (2012). Etude d'une situation d'enseignement utilisant un programme de calcul pour l'introduction à l'algèbre en classe de Cinquième. Mémoire de Master HPDS, Université Lyon 1.
- BROUSSEAU G. (1998). Théorie des Situations Didactiques. La Pensée sauvage : Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1991-1992). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. Petit x n° 30 IREM de Grenoble pp. 5 à 15.
- CHEVALLARD Y. (1985) « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège ». Première partie. Petit x n°5 IREM de Grenoble. p.51-94.
- CHEVALLARD Y. (1989) « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège ». Deuxième partie. Petit x n°19 IREM de Grenoble, p.43-75.
- CHEVALLARD Y. (1990) « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège ». Troisième partie. Petit x n°30 IREM de Grenoble, p.5-38.
- CHEVALLARD Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques. ,La Pensée Sauvage : Grenoble. Vol 19(3) pp 221-266.
- CHEVALLARD Y. (2002) Séminaire PLC2, année universitaire 2001-2002.
- CHEVALLARD Y. (2007) Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf

- CONNE, F. (1993). Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie : une démarche caractéristique en didactique des mathématiques . In Sens des didactiques et didactique du sens P. Jonnaert, P. et Y. Lenoir, Sherbrooke, Éditions du CRP, Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke. pp. 205-261.
- DOUADY R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des Mathématiques. , La Pensée Sauvage : Grenoble. Vol 7, n°2, pp 5-31.
- GRUGEON B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. Recherches en Didactique des Mathématiques. , La Pensée Sauvage : Grenoble. Vol.17, n°2, pp167-210.
- MARGOLINAS C. (2005). Les bifurcations didactiques : un phénomène révélé par l'analyse de la structuration du milieu. In Balises en didactique des mathématiques, Mercier A. et Margolinas Eds. La Pensée Sauvage : Grenoble.
- MEN . Programme du collège. Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008
- MEN. Document d'accompagnement : Raisonnement et démonstration. 2009.
- MEN. Document d'accompagnement : Du numérique au littéral. 2009.
- MEN. Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.

Les manuels

- BRUALT R., DARO I., FERRERO C., PERBOS-RAIMBOURG D., TELMON C. (2010), 5^e et 4^e Collection Phare, Edition hachette.
- CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2010) Mathématiques 5^e et 4^e Collection TRIANGLE, Editions Hatier.
- JACOB N., SITBON A., XOUAL I., VISSIO J. (2010), 5^e et 4^e Collection Prisme, Edition Belin.
- MALAVAL J., COURBON D., MAZE M., PLANCHAT C., PUIGREDO F., SERES P. (2010), 5^e et 4^e Collection Transmath, Edition Nathan.
- Sesamath (en ligne) : <http://manuel.sesamath.net/>