L'ALGEBRE, OU L'ECOLE DE LA RAISON

Didier LESESVRE

Résumé : L'algèbre, après avoir été au cœur de l'enseignement des mathématiques modernes, est aujourd'hui abordée de plus en plus tard, sinon occultée dans les programmes. Pourtant l'algèbre, bien au-delà d'une discipline particulière, est le fondement de l'enseignement des mathématiques, et peut-être même le modèle de la raison scientifique et de la rigueur de la pensée. Nous souhaitons rendre à l'algèbre une juste place dans l'éducation de l'esprit, et de fait dans l'enseignement. Nous argumentons en ce sens, non pas d'un point de vue didactique, psychologique ou pratique, de telles études ne manquant pas, mais de manière plus théorique, nous intéressant aux caractéristiques et aux raisons d'être de l'algèbre dans l'enseignement avant de nous pencher sur son enseignement effectif. Un bref retour sur la genèse de l'algèbre permet un constat épistémologique important concernant le parcours de la pensée vers l'abstraction et la nature particulière de l'algèbre, ce qui nous permet de dégager une vision de son enseignement plus proche de la démarche historique de l'algébrisation, qui n'est autre que le sens normal de tout travail en mathématiques, en sciences, et plus généralement de tout travail critique.

Des premières conceptions abstraites de la notion de nombre jusqu'à l'éclosion de l'algèbre au sein du monde arabe médiéval, de l'avènement du calcul différentiel jusqu'aux formalisations de la logique au XXe siècle, passant par ce que l'on retient comme la révolution cartésienne, nous soulignons le mouvement lent et difficile, mais fructueux, de la pensée vers l'abstraction et la formalisation syntaxique. Le mouvement de la pensée s'est d'abord fait de manière rationnelle, allant des objets particuliers vers les formes algébriques générales avant d'aller dans l'autre sens, et de redescendre de manière logique d'une théorie générale aux situations particulières comme la présentent les enseignements actuels. Ce constat historique nous interpelle quant au cheminement particulier qu'est celui du scientifique lors de l'utilisation de l'algèbre et de l'avancée vers l'abstrac-

Remerciements : Cet article doit beaucoup à Hadrien Batmalle, qui a su y dissiper bien des brumes en y apportant d'heureuses formulations où, parfois, notre pensée peinait à s'exprimer hors d'un système épistémologique précis. Qu'il en soit ici sincèrement remercié.

tion. C'est ce cheminement qu'il nous semble important de faire suivre aux élèves quel que soit leur niveau, car lui seul permet de comprendre non seulement la portée de l'algèbre, mais aussi et surtout sa raison d'être. Plus qu'une simple branche des mathématiques, l'algèbre apparaît alors comme une méthode de modélisation des problèmes qui n'a cessé de gagner du terrain à travers les siècles, pour aujourd'hui dominer très largement non seulement les mathématiques, mais toujours plus les autres sciences. C'est la raison pour laquelle l'on ne peut ni ne doit l'isoler comme une discipline à part, au risque de la dénaturer profondément et de la condamner à l'incompréhension. Ce sont cette démarche et ce point de vue qui nous semblent les mieux adaptés pour faire de l'enseignement de l'algèbre non seulement un enseignement plus efficace dans le seul cadre des mathématiques, mais également pour développer l'initiative et l'autonomie des élèves, leur culture scientifique et leur esprit critique, et c'est en ce sens que nous abondons en formulant quelques idées pour renforcer et améliorer l'enseignement de l'algèbre et son impact pour chacun.

I. — Introduction : l'algèbre au cœur des mathématiques, des sciences, de la pensée

1.1 *L'algèbre, clé de voûte de la pensée scientifique moderne*

L'algèbre est le cheminement de l'esprit des situations particulières vers l'abstraction, vers leur formalisation sous des notations opératoires s'affranchissant de toute information superflue à la réflexion. En cela, l'algèbre est l'essence même des mathématiques. Au-delà de n'être qu'un outil de base du mathématicien ou un moyen de représenter les problèmes du scientifique, l'algèbre est, et c'est là bien plus important, l'architecture générale sur laquelle se construit petit à petit chaque raisonnement, en un mot un canon moderne de la pensée. Si l'algèbre est fondée sur un aspect essentiellement calculatoire qui, lui, n'est pas universel, elle comporte également un aspect critique à travers la réflexion sur les modélisations qui, trop souvent méconnu et incompris des élèves, pourrait justement les réconcilier avec les mathématiques et surtout leur enseigner la dialectique scientifique, leur apprendre à penser. C'est cette algèbre très générale, qui relève plus de la démarche que de l'outil final, que nous voulons présenter ici, cette algèbre dont l'histoire est celle de la science en train de se faire, cette algèbre dont la compréhension est de fait si primordiale à l'enseignement des mathématiques et plus encore à l'éducation de l'esprit, puisqu'elle n'est autre que l'école de la raison.

1.2 *Une disparition progressive et inquiétante de l'algèbre des programmes*

Voilà peu de temps, le tout algébrique dominait l'éducation. Le milieu du XXe siècle reste marqué par l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement élémentaire et secondaire, dogme caractérisé par la formalisation des notions dès le plus jeune âge, l'omniprésence explicite des structures algébriques et l'axiomatisation des théories, suivant ainsi l'influence bourbachique dominante et fructueuse dans les plus hautes sphères mathématiques : la géométrie et l'intuition délaissées au profit de l'algèbre formelle la plus pure, la théorie des ensembles mise aux fondements en lieu et place de l'arithmétique [1].

À l'inverse, les dernières réformes des programmes de mathématiques prennent sûrement

1 Pour plus d'informations sur le contenu de ce nouvel enseignement des mathématiques qui émerge dans les années 1960, plus ou moins artificiellement imposé par la commission Lichnerowicz, le lecteur peut consulter le petit manuel d'introduction de Warusfel, qui développe parfaitement l'esprit de ce nouveau programme d'enseignement.

le contre-pied de cette tendance, et mènent à une disparition progressive de l'algèbre de l'enseignement général, même dans les filières scientifiques. À tel point que les fondements les plus élémentaires de l'algèbre ne s'enseignent désormais que pendant les premières années d'université, hormis quelques vestiges qui demeurent tant bien que mal dans un cadre qui ne permet plus de les traiter correctement, et qui restent donc incompris. Ainsi, en l'espace de quelques décennies, l'algèbre semble avoir perdu tout attrait, sinon tout crédit, au point que certains responsables politiques évoquent la possibilité de s'affranchir de ces mathématiques bien inutiles dans les filières qui ne s'y spécialisent pas. L'enchantement des révolutions mathématiques du début du XXe siècle et l'immense rayonnement intellectuel de Bourbaki laissent alors place, au sein d'une génération qui a désormais été éduquée au sein de cette école moderne des mathématiques, à des mauvais souvenirs qui tournent au dégoût plutôt qu'à l'impression d'une réussite, ou même d'une culture acquise. Il suffit pour s'en rendre compte d'interroger son entourage sur ses souvenirs des bancs de l'école : souvenirs angoissés d'avoir désespéré des heures durant à plancher sur des problèmes tant insolubles qu'impénétrables pour certains, visions de simples délires de mathématiciens déconnectés de toute réalité et de tout intérêt pour d'autres, luxe de l'enseignement peu justifié et peu justifiable pour chacun, si ce n'est comme outil suprême de sélection des élites.

Ces symptômes flagrants trahissent un manque de conscience général de l'importance de l'algèbre. Si elle est aujourd'hui si malmenée, c'est qu'elle est pour l'essentiel incomprise et peut-être jusque par ceux qui décident des programmes. Et cela touche également certains professeurs qui, non contents de n'avoir jamais vu en l'algèbre autre chose qu'un outil, certes puissant, soit la biaisent et s'en détournent autant que possible pour éviter de faire endurer leurs anciens calvaires aux élèves, soit la présentent comme un simple outil dont l'autorité n'est pas à remettre en cause et dont les résultats sont la seule justification. Et que leur reprocher sur ce point, alors que les programmes ne sont constitués que de chapitres qui se succèdent sans guère de cohérence, dont les seules connaissances exigibles sont des formules algébriques bien identifiées, où le seul fruit est l'appropriation irréfléchie de méthodes ? ou plutôt d'astuces, car qu'est-ce qu'une méthode sans compréhension ? Et comment espérer qu'il en soit autrement, alors que l'utilité et l'applicabilité de ces enseignements est mise en cause en tout lieu, des hommes politiques aux parents même ?

1.3 *La nécessité de changer de cap et de renforcer la présence de l'algèbre*

L'algèbre est pourtant non seulement une immense évolution des mathématiques qui continue sans cesse depuis les premières traces de la notion de nombre abstrait et son utilisation dans chaque civilisation antique, mais c'est également un mode de pensée complet et rigoureux, dont la puissance se prête tant aux mathématiques qu'aux autres sciences, plus généralement à toute réflexion. La tristesse de voir cette magnifique école de l'esprit s'effondrer dans des programmes de plus en plus incohérents ne peut que frapper tous ceux qui ont compris la portée du raisonnement algébrique. Cet enseignement actuel, étrange reste d'un tout algébrique auquel on retire tout ce qu'il avait d'algébrique, s'il va dans le sens d'une incompréhension générale de l'algèbre, demeure pourtant celui qui est enseigné dans les écoles et les lycées aujourd'hui, et est celui qui teintera les générations de demain d'un dégoût évident pour l'algèbre et, par extension, pour les mathématiques, peut-être même pour les sciences en général. Or l'enseignement a pour objectif de libérer l'élève, en ce qu'il lui donne les connaissances nécessaires tant à la compréhension du monde dans lequel il vit qu'à la critique nécessaire à un esprit libre ; et nous défendons que les sciences, et tout particulièrement les mathématiques, sont l'un des meilleurs moyens pour parvenir à ces objectifs, ainsi qu'il apparaîtra tout au long de ces réflexions sur l'algèbre. C'est la raison pour laquelle une réhabilitation de l'algèbre dans l'enseignement ne saurait se faire attendre alors qu'elle se trouve au bord de la disparition.

Alors que l'enseignement semble aller à contre-courant de la science, celle-ci est en plein essor. Les anciennes barrières de préjugés préscientifiques tombent et, la physique comme la biologie, l'informatique comme l'économie, toutes les disciplines se fondent toujours plus sur les mathématiques et sur la formalisation – par essence algébrique, nous le verrons – des théories et des modèles [2]. La diversité des domaines scientifiques et les incessantes évolutions du monde moderne sont d'ailleurs le fait d'une explosion du nombre de places dans les universités, de la diversité des formations toujours plus spécifiques, ainsi que du perpétuel échange existant entre les savants et tous les acteurs du monde. Or, c'est l'algèbre qui apporte une formalisation permettant la communication interne au monde scientifique ; c'est l'algèbre qui fournit des outils puissants et généraux de modélisation et de résolution des problèmes ; c'est l'algèbre qui permet une méthode de travail, de réflexion, de recherche ; c'est l'algèbre qui est la clé de voûte invisible qui permet à cet immense édifice, toujours grandissant, de rester cohérent et structuré. Alors comment peut-on envisager un avenir où de plus en plus l'algèbre se perd, jusque dans ses parties les plus élémentaires, jusque dans les enseignements les plus fondamentaux ? La situation est des plus préoccupantes, pourtant elle ne semble pas inquiéter au-delà des sphères de l'enseignement et de la recherche. Or, ne sommes-nous pas témoins d'une pénurie croissante de professeurs de mathématiques, ainsi que d'un désintérêt, sinon d'un désamour, croissant pour la science ? Faute de prise en considération des réflexions sérieuses sur le sujet, l'abâtardissement de l'enseignement de l'algèbre mène lentement à une régression de la qualité de l'enseignement des mathématiques, donc à une régression de sa compréhension et de sa considération, et donc naturellement à un recul des vocations professorales ainsi qu'à une incapacité des élèves, de la nation de demain, à comprendre un monde profondément scientifique, à raisonner droitement et consciemment surtout.

1.4 *Une démarche historique et critique*

Avant de nous pencher sur l'aspect actuel de l'enseignement de l'algèbre, en théorie comme en pratique, il nous paraît nécessaire de nous attarder sur la signification de l'algèbre, qui semble incertaine jusqu'au sein même du monde scientifique, et sa portée. Pour cela nous commençons par retracer quelques aspects majeurs et significatifs de son développement au fil de l'histoire. L'algèbre n'est pas réduite à des règles et des symboles, ainsi qu'on la présente lorsqu'une fameuse équation est mise en avant dès qu'il s'agit de caricaturer un savant – toujours fou et vivant en ermite. Nous commencerons d'emblée par souligner et expliquer pourquoi l'algèbre n'est pas une discipline à part entière. Elle ne peut se concevoir, et donc se comprendre, de manière déconnectée du monde mathématique et scientifique dans lequel

2 Nous ne disons aucunement que cette progression vers une mathématisation systématique du monde est une bonne chose, ni qu'elle est justifiée. Toutefois tel est l'état de nombreuses sciences aujourd'hui, et en cela la compréhension de cette démarche est importante dans l'éducation de chacun. Cependant, l'importance de l'algèbre comme modèle de la démarche du raisonnement critique est plus fondamentale encore que cet aspect culturel.

elle vit et qu'elle éclaire autant qu'elle est éclairée par lui. Et notamment les structures algébriques, qui sont au cœur de l'algèbre mais auxquelles on la réduit trop souvent, ne peuvent être étudiées pour elles-mêmes tant que leurs raisons d'être n'ont pas été comprises et n'ont pas légitimé ces études.

À l'idée d'une algèbre aride et irréelle, nous répondons qu'elle est, au contraire, la liberté conquise sur l'aridité et l'irréel des sciences qui la précédèrent, et aucun exemple ne saura plus étayer et développer cette idée que sa propre histoire, d'où nous essayons de faire rejaillir l'essentiel de la valeur rationnelle et épistémique de l'algèbre. Ce constat historique ne manque pas de susciter une réflexion épistémologique sur la valeur de l'algèbre en tant que forme de la pensée, et nous mettons alors en évidence sa place centrale au sein de l'éducation ainsi que ses immenses apports dans la formation d'un esprit véritablement scientifique, d'un esprit critique et conscient des objets et outils qu'il manipule, d'un esprit libre.

II. — Éléments d'histoire de l'algèbre

2.1 *Une première définition*

Avant toute discussion il convient de poser plus précisément ce que nous entendons par algèbre. Plus qu'une branche des mathématiques spécialisée, telles le calcul variationnel et l'analyse réelle, l'algèbre est ici prise dans la large acception de mouvement de l'esprit dans le sens de l'abstraction rationnelle d'une situation dans un système formel. Autrement dit l'algèbre est la *démarche* adoptée lors de l'étude de situations dont on relègue la sémantique au second plan, pour ne plus laisser place qu'à une structure abstraite munie d'un ensemble de règles formelles applicables, de sorte que la réflexion puisse alors ne s'appuyer que sur ces règles indépendamment de la situation particulière l'ayant motivée. Elle est donc une démarche rationnelle de généralisation formelle, démarche bien plus fondamentale que les seules structures formelles qui en résultent et que les seuls résultats qui en naissent, qui ne sont que des fruits de cette démarche, des fruits de l'algèbre.

Voilà donc une définition, certes large, de l'algèbre. Le bien fondé et la cohérence de cette définition apparaîtront tout au long du développement, et plus encore dans un regard réflexif sur sa pratique mathématique ou scientifique, plus généralement intellectuelle, et nous y reviendrons, mieux avertis au terme des quelques constats historiques que nous dressons. Mais c'est à notre sens l'âme des mathématiques, l'essence des réflexions fructueuses qui, tout au long de ses développements au cours des siècles, n'a cessé de croître et de gagner en importance et en clarté, en devenant toujours plus formelle, toujours plus systématique, toujours plus consciente d'elle-même. C'est donc à travers quelques arrêts [3] sur cette histoire marchant inlassablement dans le sens de l'algèbre que nous illustrerons et légitimerons dans un premier temps cette vaste conception qui en fait un élément si central dans les mathématiques de tous temps. Il n'est pas question de déceler les moindres évolutions de l'aspect algébrique des mathématiques et si, pour cause de complétude du récit, les grandes étapes de l'histoire sont mentionnées et leurs rôles dans le développement de l'algèbre brièvement commentés, nous

3 Arrêts malheureusement trop brefs pour l'importance que ces idées ont pour les mathématiques. Nous espérons citer une bibliographie suffisamment complète pour que chaque thème abordé, ainsi que d'autres périodes et lieux centraux dans le développement de l'algèbre qui sont seulement effleurés ici, puissent trouver une fontaine à laquelle les curieux pourront étancher leur soif. Nous avons également tâché de la garder suffisamment succincte pour encourager le lecteur à se pencher plus avant sur cette histoire des mathématiques qui est une honorable part de l'histoire de l'esprit humain.

nous attachons à mettre en évidence la démarche et la nature algébriques de trois périodes qui nous semblent particulièrement significatives : l'apparition de l'idée de nombre dans les civilisations archaïques ; la codification de la forme et la mise en évidence des raisonnements généraux avec les mathématiques grecques ; et l'entrée dans le monde formel avec les mathématiques arabes[4].

2.2 *L'émergence de la notion de nombre*

Une première démarche d'abstraction peut être vue dans l'apparition du nombre en tant qu'entité mathématique idéale et non plus en tant que nombre *de* quelque chose, autrement dit dans le passage du nombre attaché à son objet au cardinal abstrait. Dès le VIIIe millénaire avant notre ère, certaines civilisations mésopotamiennes utilisent des jetons pour le commerce, mais si ces jetons sont une représentation des objets qu'ils dénombrent, ils leurs restent attachés : dans une situation donnée, ils ne sont que la simple transposition d'un seul objet particulier. Ce n'est qu'avec l'émergence de l'écriture, au IVe millénaire au sud de l'actuel Irak, et avec les besoins de la comptabilité, pour le commerce comme pour l'organisation sociale, que commence le passage progressif des jetons aux marques abstraites représentant les quantités. Cette évolution se fait petit à petit, mais reste encore en premier lieu un moyen de comparaison, un moyen terme nécessaire à tout équilibrage d'échange de marchandises ou de contrôle de la taille d'un troupeau, d'un chargement[5]. Ce n'est qu'une fois un tel système comptable formel établi que le nombre abstrait apparaît comme un symbole dénué de sens, en ce qu'il n'est attaché à aucune réalisation, mais doté de propriétés, à savoir les propriétés communes à tous les représentés. Le système de numération se développe alors, notamment sous l'empire d'Hammourabi. C'est ce qui rend possible l'apparition des premiers problèmes imaginaires, bien qu'ils fassent intervenir des opérations et des figures encore floues et très liées à la pratique et à l'expérience sensible.

L'essentiel premier pas vers l'algèbre est franchi, le nombre ayant acquis une existence en tant que tel, représenté par des symboles qui lui sont propres, pratiqué systématiquement quel que soit l'objet auquel il se rapporte. Malgré les apparences et surtout malgré l'habitude de chacun à considérer les nombres abstraits, cette première algébrisation du monde n'a rien de naturel et est déjà l'aboutissement d'un lent procédé de maturation de l'idée de nombre à travers son usage, essentiellement commercial, dans les civilisations archaïques. En effet c'est bien un mouvement contre nature que de subsumer la quantité de deux hommes, de deux chevaux et de deux dalles de marbre sous un même concept abstrait de « 2 ». Des entités si différentes et absolument incomparables a priori se retrouvent dénuées de toute leur identité pour ne laisser place qu'à un concept abstrait, à un cardinal qui n'a plus rien de commun avec l'origine de son idée, sinon ses propriétés opératoires.

4 Lorsque nous ne citons pas de source particulière, nous suggérons pour les détails historiques et une bibliographie plus spécialisée l'ouvrage collectif très complet dirigé par Bartocci et Odifreddi. L'évolution à travers l'histoire de la conception mathématique et de la signification des méthodes, que nous essayons de faire ressortir ici, est agréablement présentée dans le petite livre de Gilles Dowek.

5 On peut notamment se rapporter, pour plus de détails concernant ces questions, aux nombreuses études anthropologiques consacrées à l'émergence de la forme du nombre, notamment les travaux de Levy-Bruhl. Pour une histoire complète, richement documentée et illustrée d'exemples, qui souligne la percée lente et hésitante du nombre des premières pratiques comptables jusqu'aux différents systèmes de numération, on renvoie à l'Histoire universelle des chiffres de Georges Ifrah.

Voilà la démarche que l'on constate tout au long de l'histoire des mathématiques et qui apparaît toujours plus clairement dans les exemples que nous présentons par la suite : l'idée en tant qu'idée abstraite identifiée succède aux particularités l'ayant motivée, sinon nécessitée[6]. Ainsi, « il n'y a pas d'expression abstraite qui n'ait commencé par être une dénomination concrète » selon la très juste phrase de Léon Brunschvicg dans ses *Étapes de la philosophie mathématique*. Cette lente percée de l'idée de nombre, ce que nous pouvons oser voir comme la première manifestation de l'algèbre dans l'histoire, est le fruit d'une lente évolution de ces balbutiements élémentaires et utilitaristes jusqu'à l'arithmétique générale des Grecs. Nous ne nous attardons pas plus sur ce fascinant sujet de la genèse de l'idée de nombre, déjà clairement exposé par exemple dans le premier livre de l'ouvrage précédemment cité de Léon Brunschvicg ou dans l'histoire de Ifrah, mais nous souhaitons soulever dès ce stade élémentaire cette démarche algébrique, constante mais bien peu naturelle, d'assimilation d'une certaine structure générale comme abstraction de situations particulières du monde ou de l'esprit. C'est en cette démarche que réside le sublime de l'évolution des mathématiques, des sciences et de la pensée scientifique, plus qu'en son seul résultat, allant dans le sens de notre définition de l'algèbre.

2.3 *De nombreuses mathématiques archaïques*

À partir de l'émergence de l'écriture, les balbutiements du nombre et les premiers problèmes ou réflexions mathématiques se généralisent dans toutes les grandes civilisations. Ainsi les mathématiques babyloniennes et mésopotamiennes sont marquées par un intérêt tout particulier pour les résolutions d'équations et les approximations numériques. C'est une première apparition des manipulations du nombre déconnecté de ses manifestations pratiques, dans des problèmes de l'esprit, fussent-ils architecturaux, plutôt qu'une simple utilisation immédiate du nombre et de son abstraction pour le commerce. Cela souligne déjà une dimension nouvelle offerte par l'abstraction du nombre, qui va de pair avec le développement de l'art conscient, construit, recherché comme tel.

Les nombres, qui n'étaient jusque là que des intermédiaires motivés de manière a posteriori par une situation, apparaissent pour la première fois dans leur potentiel a priori, pouvant susciter et résoudre des problèmes qui ne sont pas des situations effectives immédiates, mais des problèmes dont on prévoit l'existence. Ce nouveau champ des possibles est la porte ouverte à l'assimilation progressive du nombre comme idée entièrement abstraite et autonome. Mais ces travaux et les calculs retrouvés ne mettent pas en avant un quelconque raisonnement formalisé et général permettant d'aboutir aux résultats. Bien que les méthodes exposées soient clairement des méthodes applicables à tous les nombres, et semblent bien présentées comme des méthodes particularisées mais implicitement générales, leur généralité n'était pas plus exploitée que dans l'intuition qu'elle pouvait donner. Qu'un raisonnement général fondant ces méthodes pré-

6 Et cela, sans que l'on n'ait à s'avancer sur le problème de savoir si cette idée est créée proprement à cette occasion comme intermédiaire de l'esprit, ou si elle se manifeste ; débat non moins intéressant, pour lequel on pourra par exemple consulter les études de Louis Couturat, qui défend un concept abstrait (la notion d'infini) comme forme de la raison, contre Kant qui le défend comme accessible à l'intuition et dont les arguments sont soigneusement examinés. Mais les positions sont nombreuses et l'on ne pourrait manquer de citer le réalisme platonicien à ce propos, qui se distingue nettement des deux positions précédentes. Le problème est bien évidemment le même concernant toute structure algébrique, concernant tout modèle.

sentées dans des cas particuliers ait existé et n'ait pas été entièrement révélé [7], ou qu'il ait été moins conscient, l'absence de toute justification ainsi que de volonté de le transmettre dans sa généralité fait des mathématiques d'alors une science encore essentiellement empirique, ou au mieux expérimentale. En effet, si la manipulation du nombre marque une évolution par rapport aux précédentes civilisations archaïques, aucun accent n'est porté sur la formalisation du nombre, ni surtout sur la formalisation du raisonnement.

La civilisation égyptienne développe parallèlement un système numérique plus maniable, et il s'y trouve des manipulations fréquentes de fractions, même si les notations comme les raisonnements restent fastidieux. Les notations des nombres deviennent ainsi suffisamment intégrées et naturelles pour permettre la représentation des rapports de nombres et une méthode effective de calcul entre ces rapports. De nombreux papyrus retrouvés contiennent des problèmes arithmétiques et géométriques pratiques, notamment concernant les constructions de pyramides, en exploitant ces nouvelles idées qui sont déjà suffisamment maîtrisées pour servir d'outils. Si les nombres sont encore un simple outil, ils paraissent déjà fournir des méthodes systématiques résolvant des problèmes réels, et non des moindres, compte tenu de l'importance divine des pyramides : il n'y a donc plus d'hésitation quant au statut général du nombre et à son utilisation systématique. La Chine antique est aussi le berceau d'une vaste tradition mathématique, s'étendant entre le IIe millénaire avant notre ère et le IIe millénaire, qui se transmet notamment à travers les *Neuf chapitres sur l'art mathématique*, ouvrage qui compile de nombreux problèmes résolus de manière détaillée et didactique. Si plusieurs papyrus égyptiens témoignent de la volonté de sauvegarder cette technique nouvelle, les *Neuf chapitres* vont plus loin en cherchant à compiler les savoirs acquis en tant que savoirs, l'accent étant surtout mis sur la transmission intelligible et didactique des mathématiques, dont le caractère peu naturel semble donc déjà conscient. L'Inde et les Incas méritent également leur place dans cet aperçu de la mathématisation des problèmes. Peu de choses sont aujourd'hui connues des mathématiques indiennes avant notre ère, bien que nous soyons assurés d'une pratique de la manipulation des nombres ; et les Incas semblent avoir mis au point des mathématiques assez fines pour leur cosmologie, notamment en matière arithmétique. Dans toutes ces civilisations se développent donc les nombres et leur pratique, jusque dans l'architecture, les arts, l'éducation. L'outil abstrait le plus élémentaire semble dès lors assimilé dans son universalité, ouvrant la voie à de plus vastes développements.

2.4 *La méthode mathématique grecque*

En cela, les mathématiques qui émergent en Asie mineure avec Thalès et qui éclosent dans la Grèce classique sont une nouvelle révolution épistémique que l'on peut estimer être la première période au cours de laquelle les mathématiques commencent à avoir conscience d'elles-mêmes et de leur portée universelle, en séparant définitivement l'objet concret de son idée abstraite. Non seulement les mathématiques sont considérées comme modèle régissant le monde [8], mais surtout les acteurs d'alors manifestent une forte volonté d'énon-

7 Ainsi il ne serait pas absurde de penser que les auteurs de ces problèmes résolus n'aient présenté que des illustrations, pour conserver le primat de la méthode générale dans toute sa richesse. Nous savons bien la volonté de certaines écoles grecques de cacher la généralité, de la réserver aux seuls initiés et de ne pas perdre leur suprématie, ainsi chez les pythagoriciens.

8 Par exemple la société et son organisation sont pour Platon à rapprocher de nombreux modèles mathématiques de sections géométriques, ainsi que le développe Jules Vuillemin.

cer ce que pour la première fois on appelle « théorème » [9], autrement dit des vérités générales. Ces théorèmes peuvent certes s'illustrer par des cas particuliers, mais se prouvent par des raisonnements généraux sur des objets généraux, a priori et non particularisés, marquant là une algébrisation allant jusqu'au raisonnement, dont la logique est mise en avant ainsi que l'exploite largement Aristote avec les syllogismes. Cette émergence des mathématiques nouvelles, si liée au développement d'un mode de pensée philosophique également plus abstrait et général, est caractérisée par le règne du raisonnement et de la justification rationnelle. Un degré supérieur dans cette abstraction est atteint lorsque les *Éléments* d'Euclide compilent les travaux antérieurs en un traité qui est toujours le modèle – quant à sa structure logique – des traités actuels, un traité qui pose clairement les axiomes admis initialement [10], puis qui font découler de ces axiomes tous les autres résultats à partir de raisonnements fondés sur des règles de déduction logique strictes et des définitions explicites de nouveaux objets, dont la justification relève également d'une réflexion métamathématique. C'est de cette époque que datent la première mise en forme unifiée de résultats aussi généraux qu'utiles dans la pratique, que sont par exemple les théorèmes de Thalès ou de Pythagore, ou encore les propriétés élémentaires des triangles.

Cet âge d'or grec si souvent loué, et qui pour certains condense déjà tous les développements ultérieurs de l'algèbre [11], souffre pourtant d'un handicap immense comparé à l'algèbre d'aujourd'hui, et même du XVIe siècle : comme chacun s'en convainc en lisant la moindre propriété des *Éléments*, l'absence de notations systématiques et de vocabulaire précis pour désigner les propriétés et les situations font que la moindre réflexion devient un lourd exercice de style, et l'effort reste plus porté sur la compréhension de la représentation des objets que sur la réflexion sur leurs propriétés. Il importe de bien comprendre le manque immense de formalisation des mathématiques grecques : les lettres sont au mieux des étiquettes, et aucunement des symboles pour représenter des objets, moins encore des symboles sur lesquels ont peut opérer, en témoignent les nombreuses lettres différentes qui désignent un centre de cercle ou un isobarycentre de triangle dans les *Éléments*.

La formulation est grandement handicapée par cet encombrement des descriptions qui surviennent lorsqu'il faut désigner une figure ou un point particuliers dans une construction. Si les mathématiques grecques sont un grand pas dans l'algébrisation des mathématiques, le gouffre les séparant de la période cartésienne et moderne est encore immense. Ainsi aujourd'hui, chacun reconnaîtra dans un contexte assez général en n un entier, en x une variable numérique, en f une fonction, en K un corps, etc. Cependant nulle uniformisation systématique de la sorte n'existe encore dans la pratique mathématique de l'Antiquité, et l'expression algébrique claire et maniable d'aujourd'hui est bien loin des formulations d'alors. Or, la réflexion ne peut être que lourdement handicapée par une telle lourdeur descriptive, ainsi que le serait le plus riche des rêveurs et le plus inventif des poètes s'il peinait à trouver les mots pour s'exprimer. Chacun saura en juger sur

9 Étymologiquement il s'agit d'une « contemplation », preuve supplémentaire de la volonté de croire en la réalité représentée par ces mathématiques, qui apparaissent comme une algébrisation — en notre sens — du monde.

10 Et dont la justification relève alors du domaine de la philosophie, par exemple fondés sur la raison, sur l'intuition, ou encore sur la nature.

11 Ainsi des historiens renommés tels Heath, Tannery et van den Waerden, parmi tant d'autres, y voient déjà en germe l'essentiel de l'algèbre moderne, notamment les premiers pas de la géométrie algébrique.

l'exemple de la proposition IV du livre II des *Éléments*, que l'on traduirait aujourd'hui par l'identité remarquable

$$\forall(a,b) \in \mathbf{R}^2 ,\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

et qui pour Euclide se formule ainsi :

« *Si une ligne droite est couppée comme on voudra ; le quarré de la toute est égal aux deux quarrez des parties, et à deux fois le rectangle d'icelles parties.* » (*trad.* D. Henrion, 1632)

en notant qu'il s'agit là fort probablement d'une version déjà remaniée. Si cette formulation peut encore se comprendre d'un seul souffle, ses limites apparaissent rapidement pour des propriétés à peines plus complexes, telle la proposition XII du livre II, aujourd'hui connue sous le nom de théorème d'Al-Kashi :

$$\forall(A,B,C) \in (\mathbf{R}^2)^3,$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC.AB\ cos\hat{A}$$

qui se trouve exprimée sous la forme :

« *Aux triangles ambligones, le quarré du costé qui soustienne l'angle obtus, est plus grand que les quarrez des deux autres costez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris d'un des costez contenant l'angle obtus, et celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire et de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire et l'angle obtus.* » (*trad.* D. Henrion, 1632)

et les preuves requièrent encore davantage d'efforts de style et de force de conviction pour le mathématicien, de capacité de concentration pour le lecteur. En cela, les traductions et copies des travaux grecs au cours des siècles qui suivirent ont contribué à un formatage évolutif des textes pour en simplifier la consultation en uniformisant le langage, et cette initiative trop longtemps ignorée a déjà été un immense pas vers l'algébrisation des mathématiques, un langage purement formel commençant à se voir attribuer une valeur sémantique et la forme étant reconnue comme l'un des aspects primordiaux des textes scientifiques [12]. C'est une surinterprétation constante des écrits grecs qui a mené à ces considérations dangereuses et anachroniques qui ont pu masquer les barrières dues à l'absence de forme algébrique dans les mathématiques de l'époque [13], handicap bien réel pourtant.

2.5 *L'éclosion de l'algèbre au sein du monde arabe*

Ce n'est que très lentement que la prise de conscience de la similarité des objets et des situations pouvait gagner à être représentée de manière unifiée, et ce sont les travaux de plusieurs siècles de mathématiciens, de physiciens et de philosophes qui permettront la réalisation de cette mutation. C'est dans les écoles et les cours arabes, à Damas notamment, que naît un calcul littéral conscient et exploité. Si les mathématiques arabes héritent sans aucun doute des idées et des problèmes grecs, elles n'en sont pas moins extrêmement novatrices et sont la source d'une profusion de concepts et de méthodes

---

12 Sur le sujet de l'impact des copistes et des bibliothécaires de l'Antiquité et du Moyen-Âge, on invite à consulter les travaux de Reviel Netz et sa notion de texte deutéronomique.

13 Concernant ces surinterprétations déviant le contenu mathématique réel en prenant le risque d'interpoler jusqu'à de la géométrie algébrique dans des textes d'Euclide, la critique d'Unguru est d'une juste sévérité, et met notamment le doigt sur l'étrange tendance qu'ont les mathématiciens à se faire passer pour historiens de leur domaine, opérant de fait un illégitime transfert d'autorité qui aboutit à bien des absurdités dues à un aspect historique traité avec bien trop de liberté, déformant les pensées d'hier pour les remettre aux normes d'aujourd'hui. Nous espérons attirer l'attention, à défaut de pouvoir le développer plus avant et de présenter des exemples ainsi que nous le faisons avec les *Éléments*, sur la longue et continue évolution de cet aspect des mathématiques entre les premières traces d'abstraction jusqu'à nos jours, et surtout jusqu'à la période cartésienne.

sur lesquelles se fondent les mathématiques des siècles futurs, notamment consacrées par la révolution cartésienne. L'historien Roshdi Rashed dégage, au cours de son parcours du paysage mathématique arabe, le cœur de la révolution classique souvent attribuée exclusivement à Viète et à Descartes, et tout ce que le classicisme occidental doit à cette féconde période orientale. Le développement du monde arabe permet une évolution particulière des mathématiques, à l'extrême opposé de ce qu'elles étaient dans la tradition grecque. La science mathématique est considérée dans son aspect purement formel, comme un ensemble de règles syntaxiques sans sémantique particulière. Il n'y a pas de distinction profonde identifiée et exhibée entre science et art et, si la science rationalise les pratiques, l'art peut également résoudre des problèmes. Ce mariage et cette vision des mathématiques sont rendus nécessaires entre autres par la volonté d'établir clairement les lois coraniques, et de se mettre à l'abri du flou qui englobe les textes sacrés et qui délaisse la loi pour laisser place aux interprétations. C'est bien la preuve de l'acceptation de la déconnexion entre la formalisation et l'immédiat sensible, qui donne accès à un calcul algébrique naissant, aspect non moins important de l'algèbre que nous connaissons, aspect entièrement étranger aux mathématiques grecques.

La première apparition du terme d'« algèbre » remonte à Al-Khwarizmi, dans un ouvrage qui est mathématiquement très simple et que l'on pourrait considérer comme une simple réécriture d'idées et de méthodes déjà connues des Grecs, mais qui cache une profonde révolution conceptuelle, celle-là même que l'on n'hésite pas aujourd'hui à attribuer à Descartes : la formalisation algébrique. Cette simplicité est assumée de la part d'Al-Khwarizmi, l'important étant de pouvoir tout ramener aux règles simples qui y sont explicitées. Bien des concepts qui fondent l'algèbre moderne y sont présents et exploités tels qu'ils le sont encore aujourd'hui : opérations élémentaires, équations, formes normales d'équations, classification de problèmes par leur degré et résolutions algorithmiques. Si les preuves sont essentiellement géométriques, comme dans la tradition hellène, l'idée novatrice d'Al-Khwarizmi est de ne pas s'y limiter : là où les Grecs n'utilisaient des symboles que comme simples étiquettes pour désigner des objets, il va jusqu'à affirmer que l'inconnue n'a *pas de nature* et que les problèmes ne dépendent pas de la géométrie particulière dans laquelle on les insère : la sémantique omniprésente chez les anciens laisse place à la pure syntaxe algébrique. Là où les Grecs avaient achevé la prise de conscience de l'abstraction du nombre, les Arabes ont fait un pas de plus dans cette abstraction en introduisant dans leurs problèmes des inconnues opératoires, soumises aux mêmes règles que les nombres déterminés. Quelle libération ! Là où les Grecs perdaient toute possibilité d'envisager des nombres négatifs ou irrationnels, ne pouvant se les représenter comme des grandeurs géométriques comparables, les Arabes calculent avec les mêmes règles sans se soucier du statut du nombre. L'impact sur les contemporains est immense, et la recherche algébrique ainsi née peut se poursuivre dans un essor croissant : l'essence de l'algèbre dont le principe a été soulevé en introduction trouve ici son origine, dans le retrait de l'importance sémantique devant l'aspect syntaxique et dans l'aisance qui en découle à effectuer des calculs dans un cas général.

Le mathématicien Thabit Ibn Qurra s'attache au parallèle entre l'algèbre et la géométrie tout en les distinguant clairement quant à leur réalité, mais les confondant dans les manipulations mathématiques que l'on en peut faire. Cette première période créatrice des mathématiques arabes est marquée par l'arithmétisation des travaux grecs, essentiellement géométriques. Ainsi les *Arithmétiques* de Diophante sont entièrement revisitées dans le langage d'Al-Khwarizmi, puis Al-Karaji cherche à étendre l'arithmétique usuelle sur les entiers à des objets ressemblant beaucoup à ce que nous appellerions des polynômes formels. Son ouvrage est repris, maintes fois développé, et les fonctions élémentaires bien connues des modernes — telles les puissances, les factorielles et les coefficients binomiaux — apparaissent ainsi que l'extension, purement syntaxique, des règles de calcul aux irrationnels, en lesquels les Grecs avaient trouvé la limite de leur conception du nombre. La question concernant les extractions de racines polynomiales de petits degrés est posée par Al-Sulami et résolue dans les cas élémentaires, ce qui n'est pas sans rappeler le même effort de la part de l'école italienne plusieurs siècles plus tard. C'est ainsi près d'un millénaire qui s'écoule, au cours duquel les mathématiques n'avancent guère en occident, mais trouvent dans le monde arabe le berceau d'un renouveau en profondeur. Les travaux de Roshdi Rashed décrivent avec précision la lente maturation des idées algébriques au cours de tout ce millénaire médiéval pendant lequel les mathématiciens arabes ont mis sur pied l'immense édifice algébrique, qui pénètre à nouveau en Europe notamment par l'intermédiaire de Léonard de Pise au XIIe siècle. C'est de cette algèbre dont Viète et Descartes ont été les héritiers, le calcul littéral indifféremment appliqué à l'arithmétique ou à la géométrie achevant alors de prendre en essence sa forme moderne avec leurs travaux.

2.6 *La révolution cartésienne*

Ces développements de l'algébrisation des mathématiques et du monde culminent avec l'avènement de l'algèbre en tant que calcul fonctionnel, c'est-à-dire purement syntaxique et opératoire, achevant ainsi le programme commencé par les penseurs arabes. Si Viète, Harriot et Oughtred développent l'aspect opératoire de l'algèbre, introduisant des notations adéquates et entièrement formelles, c'est avec la géométrie de Descartes que le support visuel et intuitif est entièrement mis de côté une fois le problème formalisé, une fois les figures géométriques lues en termes de coordonnées dans un repère. Ces coordonnées ne sont alors plus de simples étiquettes attachées aux points qu'elles représentent, mais sont les nouveaux termes du problème algébrisé. Les résultats sont alors naturellement interprétés en termes géométriques initiaux, mais la résolution effective du problème se fait désormais dans un univers entièrement déconnecté, dans un formalisme algébrique abstrait et calculatoire. Ce sont les débuts de la géométrie analytique, toutefois encore handicapée par des notations lourdes et une utilisation incertaine des raisonnements algébriques, mais dont la puissance ne fait déjà plus de doute, ainsi qu'on le voit lors de la résolution par Descartes, en quelques lignes, de certains problèmes du sixième degré à l'aide de coefficients indéterminés.

L'algèbre subit ainsi une immense évolution de son statut épistémologique, et devient pour la première fois un moyen de preuve entièrement autonome, dépassant le simple support de raisonnement qui trouvait sa justification et ses arguments ailleurs, typiquement dans la géométrie, ainsi qu'elle l'était jusqu'alors. C'est l'achèvement d'une prise d'indépendance de l'algèbre, des mathématiques, de la pensée même, par rapport au monde immédiat et aux problèmes sensibles : la puissance avérée du raisonnement algébrique mène à une formalisation totale de nombreux problèmes classiques, ainsi que le fait Fermat en arithmétique, et à un intérêt porté désormais essentiellement sur ces nouveaux problèmes formels. S'instaure alors la certitude de la fiabilité de la transcription algébrique, qui apparaît comme enfermant la difficulté des raisonnements et l'imprécision des preuves dans un simple formalisme calculatoire. Si cet espoir a ses limites, ainsi qu'on le constate avec l'incapacité encore actuelle à formaliser entièrement les problèmes scientifiques, ne serait-ce que la physique, il est justifié en ce qu'il porte ses fruits quand bien même le problème ne serait que formalisé localement, dans ses parties les plus techniques, peut-être les plus clairement conçues de sorte à ce qu'une « bonne » formalisation [14] puisse soulager le raisonnement, le tenir à la rigueur, l'éclairer parfois. Et c'est bien l'espoir avoué de Descartes qui publie sa *Géométrie* à la suite du *Discours de la méthode*, comme si elle était le passage et l'outil nécessaires à l'achèvement de sa philosophie de la pensée, espoir qui rayonnera jusqu'aux philosophes des Lumières. La méthode calculatoire se développe alors, donnant à l'algèbre toute sa puissance et délivrant le raisonnement des lourdeurs de notations du temps de Descartes et de Viète, évolution vers les méthodes formelles que l'on peut considérer comme achevée dans sa forme calculatoire moderne avec les travaux de Gauss. L'algèbre achève ainsi sa constitution essentielle, étant enfin munie de l'outil calculatoire entièrement réalisé et autonome, tout en étant consciente de son potentiel et de son fonctionnement. La voie est dès lors ouverte à l'essor de l'algèbre dans de multiples directions mathématiques et scientifiques qui naîtront ou renaîtront à travers leur algébrisation.

2.7 *Un essor fulgurant du calcul différentiel*

Les traductions de problèmes et de situations classiques en termes purement algébriques donnent son plein essor à ce nouveau calcul, laissant entrevoir déjà les infinies possibilités de l'algèbre et son grand pouvoir unificateur dont Leibniz a sans nul doute été l'un des premiers adeptes, voyant là une porte d'entrée vers son rêve d'une *characteristica universalis* dans laquelle s'exprimeraient toutes les vérités scientifiques.

Dès lors, l'algèbre n'a cessé de conquérir tous les domaines des sciences, allant même jusqu'à dépasser très largement les mathématiques, avec son utilisation fructueuse par Pascal et Newton au XVIIe siècle pour la modélisation des phénomènes physiques. C'est l'école anglaise qui devient alors le berceau du calcul différentiel, se développant autour de Wallis et culminant avec Newton, qui réduit notamment l'étude des courbes — vues comme courbes cinématiques, traces d'un mobile physique — aux connaissances de certaines quantités, en termes modernes : des dérivées de la position. Ce développement de l'algébrisation à l'extérieur des mathématiques est à porter au crédit de la généralité de la méthode algébrique, qui permet non seulement de résoudre des problèmes de la physique, mais aussi et surtout de mettre au point les propres outils qui serviront à leur résolution, ainsi les notations différentielles.

2.8 *L'algèbre, berceau de l'analyse*

Si l'algèbre permet dès le XVIIIe siècle de traiter d'innombrables problèmes d'analyse formelle, le langage algébrique se précise avec les analystes du XIXe siècle tels Cauchy puis Dirichlet, qui établissent un nouveau standard de rigueur qui se rapproche des pratiques actuelles concernant la précision des énoncés et des preuves. Les structures formelles commencent alors à se dégager, ainsi les réflexions ne se font plus sur les objets mais de plus en plus sur des structures plus générales qui regroupent toutes les propriétés dont il est besoin, et les

14 Peut-être est-ce là la grande difficulté algébrique : si les outils sont puissants, encore faut-il une formalisation en adéquation avec le problème, et soit des outils adéquats à la formalisation, soit une formalisation adéquate aux outils disponibles. C'est ce qui motive, dès cette période cartésienne, une diversification des méthodes et des outils, et plus récemment une prolifération des structures algébriques et des tentatives d'unifications entre forme, outil et objet.

exemples fourmillent. Les groupes apparaissent inconsciemment dans les travaux de Lagrange, pour être très largement explorés par Galois avant une pleine formalisation générale par Cayley. Les problèmes d'arithmétique gagnent beaucoup à s'exprimer grâce à la notion d'idéal introduite par Kummer. L'utilisation géométrique des nombres complexes en arithmétique par Gauss est l'événement déclencheur de leur efficacité et de leur compréhension profonde, aboutissant notamment au théorème de D'Alembert-Gauss [15]. La géométrie et la théorie des systèmes linéaires se développent petit à petit en la *Théorie de l'extension* de Grassmannn, entièrement axiomatisée par Peano peu après en l'algèbre linéaire que nous connaissons. L'algèbre touche ainsi tous les domaines et toutes les écoles en tirent profit, aucune direction ne résistant à la formalisation et à la mise en place de nouveaux concepts et de nouvelles structures. L'algèbre pousse donc à l'exploration critique et raisonnée des possibilités de formalisation, ouvrant la voie à une diversification des concepts et des points de vue.

2.9 *Vers une unification des géométries*

En 1872 survient ce que Dieudonné considère comme l'algébrisation ultime de la géométrie, qui est l'essence du *programme d'Erlangen* proposé par Felix Klein. Il s'agit d'une vision unificatrice des différentes géométries qui émergent depuis le XVIIIe siècle, la géométrie n'étant plus réduite à une axiomatique extérieure mais vue comme l'action d'un groupe sur un ensemble donné. Cette algébrisation permet d'éclairer d'un jour nouveau les rapports entre géométries, notamment la richesse de la géométrie projective, ainsi que d'ouvrir la porte au développement de nouvelles géométries, notamment différentielle. Inversement, si l'algèbre forme à la liberté et à la diversification, elle cherche naturellement l'unification, sa nature formelle mettant au jour certaines similarités calculatoires poussant à la généralisation. C'est la pratique intense, réflexive et critique qui permet une telle unification, ainsi les géométries dans le programme d'Erlangen.

2.10 *L'algébrisation de la logique*

Si la logique est depuis Aristote profondément intégrée à l'esprit scientifique, c'est toutefois un immense renouveau qu'elle connaît avec son algébrisation par Boole, qui en fait un véritable calcul algébrique. Puis sa formalisation axiomatique totale par Frege puis Russell, bien qu'elle se solde par des échecs dans sa visée universelle, ouvre la voie à l'idée d'une algébrisation des mathématiques à un autre niveau que celui connu jusqu'alors, allant cette fois jusqu'à formaliser la pensée mathématique même, donnant ainsi naissance à la logique formelle. Toute la révolution ensembliste et logique qui s'en suit, au confluent des XIXe et XXe siècles, marque profondément les mathématiques d'aujourd'hui [16], et devient un thème central en informatique théorique depuis la mise en évidence de l'équivalence entre preuve mathématique et programme informatique, que constitue la correspondance de Curry-Howard. L'algèbre s'empare donc du métaraisonnement, prouvant son potentiel réflexif, se prenant toujours plus comme propre objet.

Le potentiel apparemment sans limite de l'algèbre continue ainsi à étendre sa domination pendant le XXe siècle, le groupe Bourbaki étant l'un des grands artisans d'une algébrisation ordonnée des mathématiques et de la

15 Sur l'évolution de la conception des nombres complexes et les méthodes pour arriver au théorème fondamental de l'algèbre, preuve majoritairement achevée par Laplace, on peut se référer à Une histoire de l'imaginaire mathématique de Dhombres et Alvarez.

16 Sur cet incroyable chapitre de l'histoire de la pensée, on peut consulter la somme *From Frege to Gödel : A Source Book in Mathematical Logic*.

définition de nombre de structures et objets très généraux dès qu'ils pouvaient se révéler avoir des propriétés particulières, remplaçant par exemple les notions les plus géométriques de l'analyse par la topologie. Parallèlement, la théorie des catégories de Mac Lane et Eilenberg sous-tend de plus en plus les points de vue modernes, notamment la très géométrique topologie algébrique, offrant une possibilité d'unification nouvelle et surpassant la théorie des ensembles bourbachique.

Ainsi l'algèbre s'épanouit petit à petit depuis l'aube des mathématiques, pour n'être peut-être aujourd'hui que l'embryon de ce qu'elle sera demain — les développements modernes de la formalisation des structures et le formalisme de la théorie des catégories étant les meilleures preuves du potentiel toujours immense que l'abstraction formelle, en d'autres termes l'algèbre, conserve. Tous ces fruits et bienfaits de l'algèbre, qui tendent à dominer et à unifier les mathématiques et les sciences, sont développés avec élégance et compétence par les ouvrages de vulgarisation générale de Dieudonné. Une fois l'algébrisation en marche, l'histoire nous fournit des myriades d'exemples de sa puissance et de la toute généralité des idées épurées par l'algèbre. Insistons sur la démarche constante de l'algébrisation qui est apparue à travers ces quelques points historiques : à partir de problèmes mathématiques spécifiques, voire même de situations concrètes, l'esprit s'approprie progressivement le problème en l'algébrisant, par abstraction et formalisation croissantes. C'est cette algèbre, une fois élaborée, qui permet d'éclairer le problème initial en mettant en évidence des propriétés nouvelles ou en unifiant des propriétés a priori distinctes d'objets a priori sans rapport. Mais le chemin ne s'arrête pas là, et tant les problèmes qui demeurent que les rapprochements modernes de nombreuses branches des mathématiques mènent à constater que l'algébrisation ouvre toujours la voie à des généralisations plus vastes encore, où les structures algébriques deviennent elles-mêmes objets particuliers appelant une abstraction structurelle de degré encore supérieur. Ce panorama, bien que trop succinct, donne cependant quelque matière pour réfléchir à la valeur épistémologique de l'algèbre et d'examiner de plus près ses caractéristiques.

III. — Conséquences et interprétations épistémologiques

3.1 *L'algèbre, entre calcul et critique*

Profitons de ces quelques éclairages historiques pour illustrer et préciser ce que nous avons avancé concernant l'algèbre au début de la partie précédente. Notre définition s'oppose aux définitions usuelles de l'algèbre, traduisant l'opposition entre notre conception de l'algèbre comme démarche critique et unificatrice, et la conception commune de l'algèbre comme simple calcul formel, qui découle de la mauvaise idée véhiculée par l'enseignement de l'algèbre. Cette opposition n'est pas en soi justifiée, car il ressort de ces développements plurimillénaires de l'algèbre qu'elle n'est pas plus une démarche de raisonnement critique qu'une boîte à outils calculatoires. Elle est incontestablement les deux, chacun de ces aspects étant nécessaire à l'autre et apportant de la valeur et de la puissance au raisonnement mathématique. La formalisation et le calcul algébrique permettent une liberté de mouvement sans pareille dans le raisonnement, tout en contribuant à mettre à l'abri des illusions et du manque de rigueur. Parallèlement, l'aspect critique de l'algèbre est la condition de possibilité et d'amélioration de ce calcul. Si nous insistons sur l'aspect critique au point d'y sembler réduire l'algèbre, c'est bien parce que l'algèbre est depuis trop longtemps dénaturée par un excès de formalisme et réduite au calcul le plus abscons dans la totalité des enseignements : voilà qui ne peut que détourner les élèves des mathématiques et des sciences, mais aussi et surtout les priver de l'aspect le plus formateur de l'algèbre. C'est l'échange permanent entre la réflexion critique et la puissance calculatoire qui fait les fruits de l'algèbre. Et pour ce faire, pour tirer l'algèbre vers son côté critique de sorte qu'elle puisse revenir à son équilibre vertueux entre critique et calcul, rien ne sera plus efficace que de délaisser un calcul qui n'est que trop mis en avant pour ne plus défendre ici que l'aspect critique, de sorte qu'il revienne à la lumière du jour.

Ainsi, l'Académie française [17] définit l'algèbre comme « la branche des mathématiques dans laquelle, les grandeurs et les nombres étant représentés par des lettres, les problèmes sont résolus par des formules », mettant l'accent sur l'aspect calculatoire de l'algèbre et sur l'aspect encapsulé et prêt à l'emploi des résultats, donnés par des formules qui semblent immuables, ainsi que le déclare Alain dans ses *Propos* lorsqu'il constate que « l'algèbre est déjà une sorte de machine à raisonner ; vous tournez la manivelle, et vous obtenez sans fatigue un résultat auquel la pensée n'arriverait qu'avec des peines infinies ». Ces aspects formel et mécanique, dynamique et souple, sont bien évidemment une grande force de l'algèbre, nous l'avons déjà souligné, mais l'enseignement visant à l'éducation de la raison plus qu'au seul apprentissage de techniques et de résultats prêts à l'emploi, il ne doit pas être uniquement fondé sur ces fruits de l'algèbre, mais aussi sur son aspect instructif pour le raisonnement, sur sa démarche. C'est l'enfermement de l'algèbre dans son aspect le plus calculatoire, aride et sans aucune raison d'être apparente, qui fait qu'elle demeure incomprise et signe d'incompréhension, parfois même d'incompréhensible, en témoigne l'acception au sens figuré de l'algèbre comme « chose à laquelle on ne comprend rien », selon l'Académie.

3.2 *La spécificité algébrique : une démarche plutôt qu'une essence*

La pratique réelle de l'algèbre est aussi et surtout, si tant est qu'on veuille la comprendre et s'en servir pour résoudre des problèmes, le cheminement de la pensée qui permet d'aboutir à de tels résultats. Ainsi nous préférons amplement la définition de l'algèbre proposée par le Trésor de la langue française, plus proche tant de la pratique mathématique de l'algèbre que des qualités requises pour un bon enseignement, de « branche des mathématiques ayant pour objet de simplifier et de résoudre au moyen de formules des problèmes où les grandeurs sont représentées par des symboles, et d'en généraliser les résultats ». Là où l'Académie préférerait insister sur les mots « formules » et « symboles », nous soulignerions dans cette définition les mots « simplifier » et « généraliser ».

Ce choix de définition est fondamental pour ce qu'il permet de mettre au jour concernant l'algèbre. Il existe bien évidemment une branche algébrique des mathématiques, ainsi que nous l'entendons lorsque nous parlons de théorie des groupes ou d'algèbre linéaire, et nous sommes bien capables de reconnaître un domaine algébrique et le distinguer d'autres domaines. Mais il ne s'agit plus là d'*une* branche algébrique, d'*une* algèbre, mais de *plusieurs*, et l'on ne peut se suffire de cela pour justifier une telle dénomination commune, même en relevant que leur intersection n'est jamais vide. En effet, est-ce parce que les représentations permettent d'étudier des groupes au travers des espaces vectoriels, ou parce que les groupes sont intimement présents dans leur forme la plus triviale

17 Les références concernant les définitions de l'algèbre proviennent de la neuvième édition du dictionnaire de l'Académie française et du Trésor de la langue française.

au fondement de ces espaces, ou encore parce que des groupes linéaires émergent naturellement, que l'on peut les associer comme identiques ? assurément non, sinon la géométrie cartésienne mettrait un terme à toute distinction entre analyse et géométrie, et à ainsi raisonner il n'y aurait plus de distinction à faire qu'entre théories mathématiques et théories extérieures, et cette distinction ne serait plus vraiment tenable non plus. Les domaines « algébriques » ont des particularités, qui sont le résultat de la démarche d'abstraction algébrique, qui laisse place à des structures formelles que l'on étudie en soi : si chacune est différente des autres, elles ont toutes la même genèse et la même motivation, sont toutes semblables dans leur forme en tant que donnée d'objets munis de relations, autrement dit de structures algébriques, ont toutes la même approche systématique à partir de mathématiques plus particulières qu'elles permettent d'élever à de plus grandes généralités et de découvrir plus en profondeur. C'est en cela qu'elles sont algébriques, non en ce que leur objet est par essence algébrique, mais en ce qu'elles sont le fruit de l'algèbre. Voilà la raison pour laquelle il serait plus raisonnable de délaisser la question stérile de savoir ce qui est de l'algèbre et ce qui n'en est pas, ce qui ne peut rien apporter de plus que l'appauvrissement dû à un cloisonnement hermétique, pour plutôt s'intéresser à la démarche scientifique apportée par l'algèbre.

3.3 *La dialectique de la science*

L'algèbre est donc plus un cheminement complet de la pensée qu'un domaine délimité par des thèmes. Le traitement algébrique d'un sujet commence par sa manipulation naïve et la familiarisation avec le comportement de ses objets, qui laissent apparaître une discrimination entre ce qui relève du comportement commun de ces objets et de leurs relations, et ce qui n'est que traces de la nature particulière de l'objet que l'on a choisi pour la manipulation ainsi qu'il apparaît dès l'émergence de la notion de nombre. De cette familiarisation, il ressort que seules certaines propriétés des objets régissent leurs comportements, du moins ceux auquel on porte l'intérêt actuel, et de fait elles seules méritent d'être étudiées dans l'optique du traitement du problème : voilà l'apparition de la notion si naturelle, intuitive, et aussi si essentielle au raisonnement, d'objets isomorphes. Ainsi, d'un regard historique sur l'algèbre ressort la dialectique unificatrice et critique des mathématiques, qui est jusqu'à la « structure du progrès de la science » selon François Russo : à partir de développements séparés de théories et de problèmes particuliers, le constat de la similarité entre les objets et les relations mène à un rapprochement des situations pour en dégager les structures déterminantes dans la théorie. Cela aboutit à une unification mettant en évidence certains caractères algébriques essentiels, qui permet d'explorer sous un jour nouveau ces théories et problèmes particuliers à la lumière de nouvelles définitions et d'un nouveau point de vue valorisant l'utilisation de ces caractères.

Mais ces unifications n'ont rien de cristallisations, et forment bien au contraire des points de vue toujours en mouvement, qui évoluent avec les problèmes posés et les propriétés que l'on souhaite faire intervenir ou ignorer. Une fois dégagés ces caractères pertinents pour un problème, se met en place une structure formelle – « algébrique » dit-on – qui consiste en des symboles, qui représentent les objets ; des règles de syntaxe, qui représentent les manipulations usuelles qui donnent les propriétés et les comportements des objets manipulés et qui sont donc les manipulations que l'on s'autorise à faire avec ces objets ; et des règles de réécriture, qui représentent les relations qui existent systématiquement entre les objets. Les propriétés de certains éléments distingués parmi les objets initiaux sont formulées sous forme d'axiomes ou de définitions. La structure algébrique modélisant l'ensemble initial est donc exactement un système logique, dont on espère que l'étude sera plus aisée que l'étude des objets particuliers en présence initialement : à défaut de pouvoir appréhender le réel dans toute sa complexité, on préfère raisonner sur des objets dont seules les propriétés intéressantes sont considérées plutôt que sur des objets trop richement habillés et dont on ne saisit plus l'essentiel. On espère alors que cette étude plus générale permettra de mettre au jour des résultats nouveaux ou du moins mettre au jour des manipulations qui ne seraient pas apparues naturellement en ayant conservé les objets initiaux. Voilà là une autre notion naturelle : l'oubli de structure ou de propriétés. Mais ce n'est aucunement un oubli inconscient, une défaillance de la mémoire, mais bien au contraire un oubli conscient et éclairé, justifié par la familiarité avec les objets et par la démarche rationnelle de l'algèbre. Il ne s'agit pas d'oublier ou de trahir les objets initiaux, mais de changer d'objets pour mieux les voir : par exemple parce que les simplifications que nous avons toujours tendance à faire avec les objets particuliers que l'on manipule ne sont que fortuites et conséquences des choix faits lors de la sélection des objets censés représenter la généralité d'une classe, choix toujours trop particuliers malheureusement — il suffit de mettre en évidence la difficulté de constater la fausseté de certaines propriétés des triangles, car il est difficile de dessiner spontanément un triangle sans propriété particulière.

La réalisation d'une telle entreprise de la pensée permet non seulement d'éclairer le problème initial en en révélant des structures sous-jacentes, mais peut également être source de généralisation à d'autres problèmes vérifiant des propriétés semblables. Notons que le choix d'une structure de représentation est toujours un appauvrissement de la situation initiale, et il ne faut pas perdre de vue que l'objectif, même s'il est atteint, peut souvent être amélioré de maintes manières, que ce soit en affaiblissant les hypothèses de la structure, ce qui permet d'obtenir des résultats parfois identiques dans des cas plus généraux et a priori inattendus ; ou que ce soit en spécialisant la structure, en ajoutant des hypothèses qui sont apparues comme naturellement intéressantes lors du développement formel du modèle ou qui étaient des propriétés délaissées initialement lors de la modélisation des objets en structure algébrique. C'est la comparaison permanente entre le modèle — structure modélisant — et le modèle — objet modélisé — qui permet tant d'accroître la connaissance des objets particuliers, en en découvrant des propriétés nouvelles, que d'affiner la structure qui sert de modèle, en réévaluant de manière dynamique l'adéquation entre les deux. Ainsi, c'est dans une remise en question constante que la pensée algébrique évolue, jusqu'à atteindre une structure adéquate à un problème et à des exigences données, mais sans jamais se figer comme un modèle achevé et parfait. En d'autres termes, la pensée algébrique n'est autre que la critique organisée de ses propres modèles au cours de leur exploitation.

3.4 *L'algèbre comme modèle de réflexion critique*

La puissance de l'outil algébrique est donc utilisée également par les physiciens, depuis Newton et ses calculs algébriques de fluxions jusqu'à la physique moderne, qui est pour une grande part une physique mathématique, et qui a su éclairer le monde par l'algébrisation des lois, des entités, de l'espace même. L'algèbre ne manque pas d'être exploitée pour sa puissance jusque par les philosophes, ainsi les raisonnements logiques chers à Aristote, l'usage axiomatique en vigueur chez Spinoza, ou encore l'empirisme logique du cercle de Vienne sont autant d'infiltrations de la logique formelle dans le domaine de la pensée pure. Plus récemment, Jules Vuillemin a fondé l'application des méthodes de l'algèbre à la philosophie, et réciproquement la philosophie arrive à dialoguer avec l'algèbre grâce à l'ouverture critique de chacun de ces deux domaines de l'esprit qui se réfléchissent l'un sur l'autre, ainsi que le développe de manière très optimiste Maximillien Winter dans ses travaux [18]. Ainsi, dans de multiples situations où les méthodes a priori particulières laissent paraître, au fur et à mesure de la pratique et de la compréhension de leur fonctionnement, une certaine similarité, c'est la recherche de généralité qui mène à une représentation standardisée des objets similaires du point de vue des propriétés observées. Mais cette évidence moderne est une véritable révolution épistémique et nul ne peut affirmer le naturel qu'il y a à considérer deux objets différents, par exemple le centre O_1 de tel cercle C_1 et le centre O_2 de tel autre cercle C_2, comme essentiellement le même : le centre O d'*un* cercle générique C.

La capacité à s'affranchir des particularités n'influant pas sur les propriétés observées est la base de l'algèbre et résulte d'un acte fort d'abstraction, qui requiert avant tout une compréhension – nécessairement sur des cas particuliers – des propriétés à observer et de celles qui sont moins importantes. L'outil de l'algébriste qu'est le calcul littéral n'a donc pu trouver sa réalisation que dans la compréhension de la possibilité de généralisation d'une situation, car c'est cette compréhension qui lui insuffle toute sa fécondité, et ce calcul n'est aucunement un donné mais un construit. La remise en question permanente des hypothèses fondant le modèle et des données qui y sont superflues est ainsi nécessaire à l'avènement et à l'utilisation de l'algèbre, et c'est cet état d'esprit proprement critique qui fait de l'algèbre non seulement un outil puissant pour les mathématiques, et de fait pour tous ses domaines d'application et toutes les sciences, mais également l'outil privilégié de tout raisonnement.

L'algèbre possède ainsi bien des qualités qui échappent aux dangers de biais et de facilité dans le raisonnement scientifique que Gaston Bachelard dénonce au travers de ses obstacles épistémologiques [19]. En d'autres termes, l'algèbre est un garde-fou contre bien des dérives inconscientes, de sorte que le formalisme algébrique et le raisonnement mathématique réalisent heureusement un modèle sain de raisonnement scientifique. Si l'autonomie et le caractère autocontenu de la preuve mathématique mettent à l'abri de tout argument d'autorité, c'est bien à la formalisation et à l'esprit algébrique que les mathématiques doivent le respect des trois autres impératifs bachelardiens : se libérer des illusions et des opinions, ainsi qu'on le constate dès la géométrie analytique et la formalisation de la physique ; être toujours prêt à revenir sur ses conceptions et ses modèles, ainsi que la formalisation axiomatique puis le nouveau point de vue apporté par Klein sur les géométries l'ont fait pour les géométries non euclidiennes ; enfin, faire preuve d'esprit critique, ainsi que le requiert l'essence de l'algèbre, la dialectique algébrique, sans quoi l'algèbre ne serait pas supportable, sans quoi elle serait un jeu syntaxique stérile et inhumain, une simple application d'un système syntaxique sans motivation, sans justification, sans aboutissement. Ce sont ces qualités qui font de la dialectique algébrique un modèle de pensée résistant aux obstacles épistémologiques. La non-immédia-

18 Qui sont tous publiés dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, notamment des réflexions sur l'utilité et la nécessité de la philosophie en mathématiques.

19 La théorie des obstacles épistémologiques et leur exploration ordonnée, qui ne pourront pas être présentées trop en détails ici faute de place, sont présentées dans *La Formation de l'esprit scientifique*.

teté de son objet, sinon son caractère idéal ou définitivement inaccessible en tant que réel, met à mal les obstacles matérialistes de l'expérience première et de la substance. La critique imposée par sa démarche, sinon la conscience de la tension permanente entre la volonté d'unification et la recherche de précision, permet de surpasser les obstacles de la connaissance générale et du verbal [20]. Un tel modèle, efficace tant en théorie que porteur de fruits en pratique, mérite donc l'intérêt des éducateurs.

3.5 *La nécessité et les bienfaits d'un enseignement de l'algèbre*

Avant de se matérialiser en un calcul littéral redoutable, l'algèbre est donc un raisonnement qui doit être suffisamment ouvert et libre pour tisser des liens entre des domaines et des objets a priori distincts. Cette dialectique scientifique est fondamentale, non seulement parce qu'elle est la démarche scientifique, mais parce qu'elle est également un modèle du dialogue critique le plus théorique et le moins soumis à l'illusion des sens. C'est donc un modèle de pensée qui dépasse le seul cadre des mathématiques pour devenir l'outil de la liberté de l'esprit. Enseigner l'algèbre participe donc à enseigner tant le raisonnement rigoureux propre aux mathématiques que l'ouverture d'esprit et la critique nécessaires à un raisonnement complet et mettant à mal tout présupposé sur les concepts manipulés, car imposant une redéfinition permanente des termes et un contrôle incessant du bien-fondé de ces définitions, passant toujours par un examen de leurs limites [21]. En ce sens, penser à bannir à petit feu et sans plus de procès l'algèbre des programmes des collèges et des lycées, et y arriver de plus en plus notamment dans les filières non scientifiques, revient à priver l'enseignement de l'un des meilleurs professeurs. L'algèbre est la démarche dans toute modélisation de situations, dans toute résolution de problèmes, et participe donc à la formation de chaque citoyen et à l'enrichissement de chaque esprit, et en cela elle mérite une place de choix dans les programmes d'enseignement, c'est-à-dire dans le socle commun de connaissances que la nation veut pour son peuple. Et si l'algèbre a pour principal fondement et outil le calcul littéral, on ne peut ni ne doit oublier qu'elle est avant tout une discipline proprement mathématique qui émerge sous la plume de mathématiciens, et c'est donc au sein des mathématiques que doivent émerger les idées de l'algèbre et que doit se développer sa place dans l'éducation. En effet, il n'est pas de terrain plus libre de tout préjugé, de toute habitude, de toute sensibilité, permettant de développer le plus aisément et le plus naturellement la pensée pure. Et c'est incontestablement au sein des mathématiques que se trouve le statut ontologique idéal, le plus maîtrisé et maîtrisable, pour exercer le raisonnement. C'est donc à l'enseignement des mathématiques qu'il incombe la tâche d'apporter à l'esprit la rigueur et la généralité si propres à l'algèbre, si universelles pourtant.

IV. — Réflexions sur l'enseignement de l'algèbre

4.1 *La caverne de l'enseignement : des conditions nécessaires à l'éducation*

Attachons-nous désormais à la problématique centrale de l'enseignement de l'algèbre,

20 Les obstacles restant tombent sous le coup de la non matérialité de l'objet mathématique, voire même de son caractère nouménal, non phénoménal.

21 Et en cela l'utilité de l'algèbre comme école de l'esprit critique est flagrante, à l'image de ce qu'en dit Comte-Sponville : « Définir, c'est établir la compréhension d'un concept [...] et permettre par là de le comprendre. On se souviendra pourtant que les concepts ne sont pas réels, et qu'aucune définition ne saurait tenir lieu de connaissance [...] En quoi définir est un exercice d'humilité : c'est assumer, sans être dupe, notre lot de sens et d'abstraction ».

de l'éducation à et par l'algèbre. Un immense défaut de l'enseignement des mathématiques est son caractère non pas abstrait, mais abstrait *et* autoritaire. Quel peut bien être en effet l'intérêt d'enseigner des théorèmes, aussi difficiles et féconds soient-ils, à des élèves qui au mieux s'en souviendront jusqu'à l'examen, souvent l'oublieront, mais toujours ne sauront ni pourquoi ils les connaissent, ni pourquoi ils sont vrais, ni surtout pourquoi ils ont un intérêt, une nécessité d'être. C'est le défaut que nous reprochons à un enseignement qui ne met pas suffisamment en évidence la démarche de la pensée qui sous-tend les mathématiques, et plus généralement tout domaine de la connaissance. Ce point s'illustre cependant particulièrement bien avec les mathématiques, et ces défauts coûtent également particulièrement cher à leur enseignement, car de science libre et incitant à la réflexion et à la construction par la pensée, elle devient devant les élèves un simple fascicule de résultats plus ou moins utiles. L'enseignement idéal doit permettre à chacun de comprendre les idées. Pour cela, il faut aider l'élève à traverser deux épreuves, qui sont celles apparues au cours du constat historique que nous avons esquissé.

Premièrement, Pour reprendre l'image platonicienne de la caverne [22], l'élève doit sortir de la caverne. Cela signifie que c'est son esprit qui doit sortir et que ses yeux doivent s'habituer petit à petit à la lumière de sorte qu'il puisse de mieux en mieux voir – c'est-à-dire comprendre — les idées. Il ne s'agit donc pas de le mettre devant un théorème qui lui paraîtra artificiel et l'aveuglera, avant de le relâcher sans qu'il n'ait rien appris, en lui faisant conserver comme unique souvenir de l'algèbre une expérience traumatisante de victimisation et d'incompréhension. L'élève se sauve malgré tout de son calvaire car il réussit à décrocher la moyenne, au prix d'un immense effort artificiel et frustrant d'apprentissage mécanique et sans aucune compréhension satisfaisante de ce qui a été retenu [23].

Puis, l'élève doit être capable, une fois revenu auprès de la société qui demeure dans la caverne, de voir le monde à la lumière de son esprit, désormais plus éclairé. Or cela nécessite que les idées aient réellement pénétré l'esprit, et la séparation est fine entre celui qui a réellement compris l'idée comme la démarche, et celui qui s'est contenté de retenir une ombre. Il est alors du devoir du professeur de faire en sorte que l'élève comprenne, et ne reste pas dans l'obscurité de l'ignorance et de l'incompréhension, quand bien même devrait-il affronter des théories et un formalisme difficiles — et il le doit. Mais la tâche n'a rien d'aisée. Cette pénétration se fait mieux lorsque l'idée est déjà recherchée par l'esprit, si elle est la lumière que désirait l'élève suite à de nombreux problèmes et à de nombreux questionnements, restés insolubles ou résolus de manière peu satisfaisante. Pour ce faire, il faut donc

22 Nous prenons ici cette image, tirée de *La République*, pour son éloquence et nous ne disons pas que nous souscrivons à la thèse du réalisme platonicien, le statut ontologique des résultats mathématiques n'influant pas sur l'image ni surtout sur la situation immédiate de l'élève face à une théorie inconnue et a priori sans intérêt ni raison d'être, et nous ne nous prononçons donc pas à ce propos. Il faut donc comprendre notre caverne non pas comme celle de l'ignorance des idées mais comme celle de l'ignorance par les élèves des connaissances que l'on cherche a leur enseigner. Ceci justifie en particulier le rôle primordial du professeur dans ce cheminement, car lui seul est hors de la caverne, au moins de la caverne dans laquelle sont les élèves.

23 Et lorsque l'on constate les objectifs chiffrés à l'avance des taux de réussite au baccalauréat, on comprend bien que cette réussite n'est qu'apparente, et on n'espère sûrement pas que les élèves aient appris et compris le minimum du programme nécessaire pour avoir la moyenne. Ils en ont simplement *retenu* une portion suffisante, celle correspondant aux exercices tombant aux épreuves depuis maintes années. Et cela suffit, tout étant fait pour réduire la raison d'être de l'enseignement secondaire au seul baccalauréat.

au moins que l'élève ait été confronté à la difficulté, à l'impossibilité d'avancer dans une réflexion faute d'idées et d'outils assez clairs, à l'erreur même, car c'est la seule qui met en évidence le manque de méthode et de logique [24]. Ce n'est qu'à cette condition qu'il pourra accepter les théorie qu'on lui présente, et qu'il pourra les comprendre vraiment.

4.2 *Un enseignement de l'algèbre artificiel et incohérent*

Attachons-nous alors à préciser ce que nous entendons par ce schéma d'apparence simpliste de l'enseignement de l'algèbre, et ce que nous tirons de ces nécessités qui en apparaissent à la raison concernant l'enseignement actuel. Chacun s'accordera pour dire qu'un bon enseignement apportant la compréhension des idées ne doit pas être un enchaînement artificiel de chapitres, de définitions, de propriétés et de démonstrations sans plus de lien apparent que leur logique — que l'élève ne comprend pas, car il ne sait pas ce que c'est — et leur présence imposée par le cours — qu'il ne peut alors voir que comme manifestation de l'autorité du professeur. Or que fait-on lorsque l'on pose brutalement à des élèves de quatrième la formule de double distributivité avant d'expliquer pourquoi on expose de manière si formelle et à quoi peut bien servir une chose qui n'a jamais servi d'une manière ou d'une autre lors de la manipulation de chiffres concrets ? que fait-on lorsque l'on impose à des élèves de troisième la définition d'une fonction avant d'en donner des exemples, d'en faire des études et d'en comprendre l'utilité, le caractère général et éclairant ? que fait-on lorsque l'on commence l'année en donnant à des élèves de seconde la définition d'un vecteur ou encore les formules de résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues avant qu'ils n'aient jamais croisé ces objets en situation, alors que chacun pense déjà qu'une seule équation linéaire à une inconnue est un artefact bien inutile n'existant que dans les exercices ? que fait-on lorsque l'on encadre devant des élèves de première la formule donnant les racines d'un polynôme du second degré ou encore les formules de dérivation des fonctions polynomiales, avant même qu'ils sachent ce qu'est un nombre dérivé ? que fait-on lorsque l'on fait apparaître comme par magie devant des élèves de terminale l'exponentielle comme la solution d'une certaine équation différentielle avant toute rencontre avec une situation nécessitant rationnellement l'existence de cet objet ou l'utilisation d'objets ayant ces propriétés ? qu'est-ce donc que cette situation si ce n'est l'enfermement des élèves dans un monde de plus en plus mystérieux, laissant pour seul goût celui d'un diktat de la pensée ? C'est exactement les éblouir en leur demandant de regarder de force la lumière, de retenir par cœur et sans rien avoir compris, en somme c'est les gaver au lieu de les instruire. Et qui plus est les gaver mal, car qu'en restera-t-il ? on ne le constate que trop bien en demandant à n'importe quelle personne qui a des souvenirs assez précis de ses cours de mathématiques du secondaire : des images apprises mais non comprises, des formules étranges qui avaient pour seul et unique objectif d'apporter suffisamment de points pour ne pas être puni ou recalé. Ainsi dans les quelques exemples sus-cités, certains sauront encore dériver un polynôme, peut-être même relier le signe d'une telle dérivée au sens de variation de la fonction polynomiale associée, peut-être encore savoir repérer de possibles extremums, mais qui saura ce qu'il est alors en train de faire, et pourquoi il le fait ? Ce ne sont que des fragments d'un tout oublié,

24 Il est à ce propos regrettable que l'éducation actuelle ressemble plus à un culte à l'absence d'erreur, alors que l'école devrait au contraire être le lieu privilégié de l'erreur.

pas l'application d'une théorie comprise et justement utilisée.

L'imagination de chacun saura mettre des couleurs et des formes aux résultats qu'il est censé connaître, malheureusement mais sûrement un simple habillage mnémotechnique, trop rarement sincère. Il ne s'agit nullement d'une condamnation de l'apprentissage par cœur, qui est nécessaire et qui est toujours un heureux bagage d'outils, mais qui ne devient puissant que lorsque des idées l'accompagnent pour les manœuvrer et les utiliser, qui ne devient supportable que lorsqu'il est légitimé par une structure dans laquelle il est un maillon fondamental : tel est le cas lorsque l'élève comprend que la méthode algébrique, qu'il a apprise et comprise, fonctionne et est puissante, lui donne les outils pour résoudre et pour créer, pour penser sans entraves. En somme, on ne retient que ce que l'on comprend, tout du moins ce à quoi on prend part même si la compréhension est toujours partielle, et c'est d'autant plus vrai pour des élèves de lycée. Mais comprendre le fonctionnement de l'algèbre et l'intérêt de l'utilisation de théories formelles, plutôt que de traiter les problèmes dans leur spécificité, est une démarche — bien peu naturelle, nous l'avons déjà vu concernant l'abstraction du nombre — qui nécessite aussi beaucoup de pratique, et une pratique parfois virtuose qui nécessite de l'entraînement. En cela il ne faut ni rejeter la nécessité de l'apprentissage par cœur, ni fuir la difficulté formelle des mathématiques, car c'est l'aspect calculatoire de l'algèbre qui fait sa force, sa souplesse, sa généralité. Cet aspect formel rend plus difficile la pénétration des résultats et des idées, mais doit être compris à travers la grande portée des résultats qu'il permet d'obtenir et la grande facilité de manipulation des objets formels : chacun a l'habitude de remplacer les données d'un problème par des variables pour pouvoir le traiter plus efficacement, et personne ne doute de la puissance de cette démarche, qu'il faut plus que toute autre chose enseigner aux élèves. Or la terrible situation que nous avons décrite sur l'état actuel des comportements des élèves ressemble plutôt à un insuffisant apprentissage par cœur plutôt qu'à un enseignement. C'est la peur de la mauvaise note qui fait faire, et non pas la connaissance [25] acquise par la compréhension du fait. La note, s'il y a, doit servir de tremplin à la motivation, tout apprentissage étant en partie contrainte, d'autant plus si le rythme est imposé par des programmes. Ce doit être un contrôle, une échéance qui force à faire effectivement les parties rébarbatives du travail d'apprentissage, mais sans qu'elle devienne la source de l'intérêt, de la réflexion ou du travail.

4.3 *L'algèbre : enseignement complet, éducation de l'esprit, école de la pensée*

L'algèbre doit donc être enseignée de manière vivante et autonome et non comme un outil abscons qui fonctionne par magie et que

25 Nous parlons de connaissance au sens des conditions au moins nécessaires, sinon suffisantes, que sont une croyance vraie et justifiée, ainsi que le défend le Socrate platonicien dans le *Théétète*. Or si la vérité est un problème accessible en mathématiques – qui est un monde qui possède une ontologie locale permettant de traîter les questions de vérité sans trop d'ambiguïté – il reste le problème de la croyance et celui de la justification. Mais il est bien évident que, pour un élève qui apprend ainsi artificiellement un résultat, il n'y a ni croyance (qui doit être sincère, donc venir de soi et non être imposée par un professeur) ni justification (qui ne se suffit pas de la preuve, mais qui nécessite aussi la mise au jour des nécessités d'être du problème considéré, et ce de manière rationnelle), et encore moins compréhension de la notion de vérité en mathématiques. Ce problème de la connaissance mérite sa place dans le débat sur l'enseignement, car nous osons espérer que l'éducation a toujours pour rôle de transmettre, au moins en partie, des connaissances. La littérature et les traditions ne manquent pas, et à défaut de pouvoir aborder ce vaste domaine, on peut suggérer au lecteur de se reporter au cours de Claudine Tiercelin au Collège de France.

l'on étudie sous l'autorité d'un professeur qui nous teste et nous impose tant d'artifices et d'astuces improbables. Alors comment introduire l'algèbre ? La démarche que l'on prône est en essence la démarche que l'on a dégagée précédemment lors du retour historique sur les développements de l'algèbre. Ce n'est pas tant le caractère historique qui justifie par une quelconque autorité ce choix [26], mais bien le fait que c'est avec cette approche qu'est le mieux soulevée la manière naturelle dont l'algèbre doit être comprise jusque dans son principe et, une fois ce principe compris, l'algèbre n'aura pas besoin d'autre justification que la satisfaction de l'esprit à avoir dominé une situation par un effort d'abstraction. Et combien de telles situations sont possibles à tous niveaux ! Tout problème concret peut servir de tremplin à l'intérêt, susciter l'attention et la curiosité, et il est important que chacun ait été l'artisan d'une modélisation où l'on crée les outils de sa propre réussite, les variables et les objets formels étant intuitivement leurs particularisés originaux, justifiant ainsi les règles de calcul, permettant également un contrôle critique concernant la pertinence des résultats généraux, et montrant toute la puissance de l'algèbre en appliquant a posteriori le raisonnement à d'autres particularisations, du même type ou d'un autre type autorisant les mêmes règles. Ainsi les systèmes linéaires pour la recherche de compromis, la théorie des graphes pour les nombreux problèmes pratiques et omniprésents qui en relèvent, les systèmes dynamiques pour les croissances démographiques et les problèmes épidémiologiques, l'analyse d'une variable réelle pour les problèmes également très variés d'optimisation, la théorie naïve des ensembles pour les probabilités discrètes, et tous les autres sujets des mathématiques comme des autres disciplines [27] sont autant de sources d'inspiration pour une utilisation complète d'un raisonnement algébrique. L'essentiel est de laisser la liberté à l'élève, de modéliser comme de résoudre le problème, et c'est là un objectif bien différent que celui de demander la dérivée d'une fonction donnée, de tous ces exercices qui ne viennent de rien ni ne vont à rien, et qui sont pourtant l'essentiel de la pratique du secondaire. Il ne s'agit pas là de nier l'utilité des exercices élémentaires et ciblés, mais nul ne peut espérer un franc succès avec une liste d'exercices si jamais leur dénouement n'apparaît quelque part, si jamais les élèves n'ont vu l'aboutissement de tout ce travail, si jamais ils n'ont eu besoin de l'outil avant de le trouver.

Et grâce à un tel objectif, l'algèbre peut s'enseigner à n'importe quel niveau, l'essentiel étant de rester cohérent avec les acquis. Nous sommes toutefois convaincus de la nécessité de commencer à utiliser un langage algébrique relativement tôt. Par exemple, il ne serait pas déraisonnable d'introduire au début du collège la notion d'équation du premier degré à une inconnue, la traiter avec un support géométrique, imaginer des situations où nécessairement il faut passer par un raisonnement qui est

26 On ne songerait ainsi pas à introduire l'ensemble des nombres complexes comme l'école italienne du XVIe siècle, introduisant des $\sqrt{-1}$ sans se poser plus de questions, mais bien de manière motivée par l'usage géométrique que l'on en veut faire, ainsi que Gauss l'a bien compris, approche rationnelle des nombres complexes défendue explicitement par Louis Couturat.

27 Un autre regret mérite également d'être souligné ici, à savoir celui du manque de cohérence entre les cours, et surtout de l'absence quasiment totale d'interactions et d'interfaces entre les disciplines, lors même que tant de possibilités existent et pourraient motiver les élèves à travailler l'une et l'autre matière, entre mathématiques et autres sciences, mais également avec l'histoire et la géographie, l'éducation physique même. Chaque professeur et chaque élève gagnerait dans de tels travaux, exigeant une approche, une motivation, une méthode, un point de vue différents.

celui de la résolution générale d'une telle équation, et le faire comprendre aux élèves. Repousser la difficulté ne fait que la rendre plus insurmontable encore, et comme nous l'avons déjà souligné, certes cet effort dépaysant est difficile, mais parfois l'abstraction permet de mieux comprendre les objets, que l'on manipulait jusqu'alors plus par habitude que par compréhension des opérations. Les notions pénètrent d'ailleurs mieux un esprit plus jeune, qui aura aussi plus de temps pour les mûrir au long de ses études et des diverses utilisations, toujours moins masquées, des notions. À l'inverse, attendre que les idées et les habitudes soient déjà bien ancrées avant d'enseigner les équations algébriques est une condamnation infligée à chacun, et l'impact est réel : comment un élève qui n'a jamais vu ce qu'est la composition de fonctions, comme c'est le cas de tous les élèves de terminale désormais et donc de tout citoyen n'ayant pas fait d'études supérieures scientifiques, pourra-t-il comprendre, autrement que par une assimilation hasardeuse, qu'un taux d'intérêt annuel de 5% sur deux ans n'est pas un taux de 10% ? comment le même élève, qui ne connaît rien aux fonctions réciproques, peut-il espérer savoir trouver, autrement que par des tâtonnements et une satisfaction intuitive, un prix hors taxes connaissant le prix à l'achat ? pourtant les idées qui se trouvent derrière n'ont rien d'insurmontable, elles sont naturelles, et il s'agit en pratique de résoudre des équations du premier degré !

Soulignons que lorsque nous mentionnons l'utilité et l'application des mathématiques, il est question d'objectifs de la raison et proprement mathématiques, et bien que cela puisse et doive s'appliquer également à des applications concrètes extérieures, lorsque nous parlons de rattacher une théorie au réel et au concret, nous entendons par là souligner sa cohérence rationnelle et la construction par la pensée d'outils permettant de vaincre des obstacles. Si l'utilité pragmatique des mathématiques est indéniable et doit aussi être comprise et pratiquée, elle n'est qu'un fruit parmi d'autres, notamment l'esprit critique et la capacité d'abstraction. Nous suivons les justes mots de Nuccio Ordine concernant les maux de l'absolu utilitarisme de l'éducation, estimant qu' « il serait absurde de contester l'importance de la préparation professionnelle parmi les objectifs des écoles et des universités. Mais la tâche de l'enseignement peut-être vraiment se réduire à la formation de médecins compétents, d'ingénieurs efficaces et d'avocats scrupuleux ? Favoriser exclusivement la professionnalisation des étudiants, ce serait perdre de vue la dimension universaliste de la fonction éducative de l'enseignement : aucun métier ne saurait être exercé en toute conscience, si les compétences techniques qu'il requiert ne sont pas subordonnées à une formation culturelle plus vaste, seule susceptible d'encourager les étudiants à cultiver librement leur esprit et à laisser libre cours à leur *curiositas* en toute autonomie. Mais allons encore plus loin : sans cette dimension pédagogique absolument éloignée de toute forme d'utilitarisme, il serait bien difficile, à l'avenir, de continuer à imaginer des citoyens responsables, capables de dépasser leur égoïsme pour embrasser le bien commun, se montrer solidaires, pratiquer la tolérance, revendiquer leur liberté, protéger la nature, défendre la justice... ». L'histoire prouve bien assez que l'inutilité est la liberté de la recherche et de la pensée, et bien peu de laboratoires de développement peuvent oser croire que leur contribution à l'utilité et à la pratique sont au niveau de sciences bien inutiles en apparence comme l'arithmétique et la théorie des nombres — qui fondent aujourd'hui tous les systèmes de sécurité cryptographiques, ainsi que les sytèmes de détection et de correction d'erreur [28]. Sur ce point, il est donc tout aussi

28 Sans pouvoir développer plus avant la nécessité et l'apport de cette liberté, nous encourageons la lecture de *De l'utilité du savoir inutile*, et du manifeste de Nuccio Ordine, *L'utilité de l'inutile* déjà cité.

malheureux de transcender les mathématiques, en leur retirant toute applicabilité potentielle au monde ainsi qu'aiment à le faire certains puristes, que de les faire sombrer dans l'utilitarisme le plus absolu et totalitaire, ainsi que semblent le vouloir des parents d'élèves et des responsables politiques, bien peu compétents dans l'objet de leurs discours. Les deux positions sont appauvrissantes et nous sommes certains qu'une plus grande ouverture d'esprit et une plus grande liberté des professeurs ne peut être que bénéfique pour cela, car eux seuls ont le pouvoir d'infléchir ces dérives et de donner toute son ampleur et toute sa valeur au raisonnement et à l'éducation par l'algèbre. Si le contenu des programmes regorge de savoirs puissants, de nombreux domaines d'applications, de sources de motivations, c'est ultimement au professeur de mettre en œuvre leur enseignement, devenant ainsi la clé de voûte du système, qui doit tant être conscient de son rôle que jouir de la liberté et de la confiance suffisantes pour mener à bien l'éducation de ses élèves.

4.4 *Le rôle et la liberté du professeur dans un enseignement rationnel*

C'est en ayant éveillé l'intérêt de l'élève, en lui ayant montré l'apparition récurrente d'une forme de situation, d'un certain raisonnement, d'une certaine astuce, une fois qu'il s'y sera petit à petit habitué, que l'autorité – malgré tout nécessaire, nul ne pouvant espérer refaire seul et de manière entièrement rationnelle ce que l'humanité a mis plusieurs millénaires à bâtir, parfois de manière hasardeuse – pourra l'accompagner dans une abstraction progressive et une structuration de la pensée et de la méthode. Ainsi, la résolution d'une énigme est aisément motivante pour les premières années du secondaire ; puis les systèmes linéaires sont une mine de problèmes avec contraintes accessibles dès la fin du collège ; enfin, des problèmes d'optimisation complets sont très abordables dès que la notion de dérivation est disponible, au cours du lycée. Nous ne soumettons pas l'algèbre aux problèmes qu'elle peut modéliser, mais nous défendons que c'est là un tremplin efficace, rationnel et motivant pour des élèves qui, a priori, n'ont aucune envie de faire des mathématiques toute leur vie, ni d'être en cours au moment où ils le sont. Car en effet, ce que l'on apprend le mieux est ce à quoi on prend part — intellectuellement — et qui nous apporte une certaine satisfaction, à défaut de la discipline nécessaire à tout travail et de la volonté de rechercher la connaissance pour elle-même et non pas pour des notes ou des examens, ce que nous ne pensons pas être raisonnable d'espérer de la part d'élèves encore très jeunes. C'est la raison pour laquelle le professeur de mathématiques doit faire comprendre à chaque futur citoyen l'importance de l'algèbre, non seulement en insistant sur sa place particulière dans la démarche scientifique, mais aussi en motivant son enseignement et en suscitant l'intérêt et l'investissement de ses élèves. Mais pour comprendre la portée et le fonctionnement de l'algèbre, l'élève doit comprendre ce qui lui est présenté, il doit le trouver déjà naturel. Ne pas rechercher cet intérêt de l'élève ne peut se faire qu'au risque de déconnecter l'algèbre, et de fait les mathématiques, puis les sciences et peut-être toute l'éducation, de la réalité et de la raison pour ne plus laisser paraître qu'un jeu obscur et sadique des professeurs pour noter les élèves. Et c'est ce travers qui mène à ce que, élèves comme parents, nul ne voit plus les mathématiques que comme un outil de sélection qui doit être subi et traîné, au lieu d'être compris, ne pouvant dès lors que mener au développement d'un certain dépit, sinon un mépris, envers tout scientifique[29].

29 Situation ô combien courante dans un pays où la haute considération des chercheurs n'empêche aucunement de leur nier toute autorité. Ainsi le CNRS est l'institution ayant la plus grande confiance parmi les français

Nous croyons également à ce que peut apporter une contribution de l'histoire des sciences à ce propos. Par exemple, quelle preuve plus éclatante de l'efficacité du formalisme algébrique moderne que la comparaison entre le traitement des mêmes problèmes par les Grecs ou par Viète et Descartes ? De même, l'informatique est un moyen efficace de mettre en application et de faire comprendre les raisonnements syntaxiques et la logique élémentaire.

Il s'agit donc d'éviter absolument l'aliénation par la forme, la réduction de l'algèbre à un jeu syntaxique dénué de sens et de fait stérile, tant pour la raison que pour toute application, mais le faire sans nier l'importance fondamentale de la forme. C'est tout le travail du professeur de faire en sorte que, une fois le terrain préparé et l'élève sensibilisé aux techniques et aux idées dont il va découvrir la forme générale, l'outil algébrique soit l'outil de la liberté et non les chaînes de l'asservissement aux épreuves d'évaluation. Et il est du devoir du professeur de ne pas rester dans l'indifférence des incompréhensions possibles mais au contraire de permettre une compréhension, fût-elle particulière [30]. Certes il y a là l'autorité des exemples et de la compréhension personnelle du sujet ou de l'outil, mais cette autorité est nécessaire et saine en ce qu'elle inculque non pas l'exemple illustratif ou l'interprétation de l'équation, mais la démarche de l'esprit, la compréhension du cheminement suivi et la contemplation de la puissance du résultat. C'est ainsi que l'enseignement de l'algèbre doit se faire pour être compris et reçu par les élèves, et sûrement pas en occultant ce tout qu'est la démarche du mathématicien, du scientifique, de tout penseur, pour la remplacer par des exercices saccadés de questions mécaniquement résolubles, par des raisonnements partiels qui s'intégreront un jour, on l'espère, à un raisonnement complet [31]. Nul n'apprendrait les phrases centrales d'un poème avant de l'avoir lu et apprécié, or il est tout aussi absurde de vouloir faire apprendre des morceaux de raisonnement, des outils partiels et sans motivation ni finalité, plutôt que de faire comprendre, parfois a posteriori, la démarche qui elle seule peut justifier une étude algébrique. Non pas parce que c'est inutile, ces outils pouvant servir par la suite,

après la famille, selon un sondage TNS-Sofres, mais pourtant les scientifiques n'ont guère de poids face à n'importe quel homme politique ou syndicat. Aussi absurde soit-il non seulement les chercheurs sont considérés comme des personnes intellectuellement renfermées puisqu'ils sont toujours considérés comme incompétents hors de leur domaine, mais en plus les situations sont courantes où journalistes et responsables politiques vont même jusqu'à accuser les scientifiques d'erreurs dignes d'un débutant dans leur domaine. Nous ne développerons pas plus, mais bien évidemment cela n'est pas sans lien avec l'image hors du monde des sciences que l'on conserve en sortant de l'enseignement secondaire et qui, semblerait-il, n'a pas tendance à s'améliorer.

30 Et elle l'est nécessairement. Nous suivons Olivier Reboul qui souligne avec insistance le fait que le professeur est et doit être un professeur engagé, c'est à dire engagé dans ce qu'il enseigne, et qu'il ne doit pas transmettre la monotonie d'une théorie uniformisée par des commissions rédigeant des programmes inertes, mais insuffler une âme à ce programme qui permet de transmettre aux élèves une connaissance profonde de son sujet – sa propre connaissance profonde, car de toute manière il n'est d'objectivité en rien — et il faut assumer ce rôle qui est bien évidemment peu incité aux professeurs en France.

31 On ne sait trop quand d'ailleurs, puisque la téléologie du secondaire est toute entière tendue vers le baccalauréat ; or le baccalauréat est justement constitué d'exercices saccadés de questions et de raisonnements partiels sans que l'on attente de l'élève une quelconque synthèse, une quelconque autonomie, une quelconque compréhension. Tout enseignant du supérieur qui a à examiner des dossiers de candidature sait d'ailleurs bien que les informations pertinentes ne sont aucunement dans les résultats au baccalauréat, peut-être est-ce là un signe assez clair du peu de contenu qui s'y trouve.

mais simplement parce que nul ne s'en souviendra suffisamment pour en voir les aboutissements[32]. Or à tous les niveaux il existe de réelles possibilités d'enseignement complet de l'algèbre, complet non pas dans le sens de l'exhaustivité — il ne s'agit pas d'expliquer ce qu'est un anneau euclidien à un élève de primaire qui apprend la division, ou les limites suivant des filtres à un élève qui découvre les suites, ni même penser à explorer toutes les conséquences du théorème de Thalès — mais dans le sens de cohérent et de rationnel, se suffisant à lui-même : c'est de la compréhension profonde de situations simples et particulières que doit se dégager l'idée générale d'une méthode, et cette conviction de généralisabilité étant acquise, cette répétition des mêmes techniques et des mêmes constructions, doit amener à comprendre que tous les problèmes du même type peuvent être traités une bonne fois pour toutes, suffit-il d'oser manipuler un cas général en se disant que les lettres abstraites ne sont que des objets qui vérifient ce que vérifient les nombres par exemple. Introduire l'enseignement de l'informatique nous semble à ce propos être de bon ton pour aider à comprendre l'algèbre. La programmation, au cours de sa pratique, va en effet naturellement vers l'écriture de programmes toujours plus généraux. Une fois le programme fonctionnel, c'est de plus une source indéniable de motivation et de gratification.

4.5 *Des formats d'enseignement*

Tous les défauts ne sont pas à imputer aux professeurs, qui sont les premiers à les déplorer. Une grande part des maux est le fait du contenu des programmes. Nous avons noté la grande nécessité de la liberté du professeur et l'aspect personnel et engagé de son enseignement. D'autre part, nous insistons non pas sur le fait que le professeur doit accompagner les élèves, mais bien sur le fait qu'il doit accompagner leur raisonnement, ou à défaut essayer de leur faire accompagner le sien. Le raisonnement exposé magistralement est une pensée imposée à l'élève qui non seulement ne le comprend pas, mais ne peut en être que frustré. Toutefois, espérer plus est hors de question : comment demander aux professeurs d'enseigner mieux, alors qu'un exposé magistral, qui est beaucoup plus rapide, ne suffit même pas à terminer les programmes à temps compte tenu des volumes horaires actuels ? Les heures de travaux dirigés, les travaux d'initiative personnelle et les devoirs à la maison sont sûrement de bonnes occasions pour développer cela, mais il est un peu triste de devoir fonder une méthode d'enseignement sur ce qui se passe hors des cours, et ce devrait être au professeur d'enseigner les idées et les raisonnements et aux livres d'enseigner les cours et les détails, plutôt que l'inverse. Il nous semble en effet plus dommageable de manquer d'idées et de capacité à raisonner que de manquer d'un peu de pratique ou de technique, celles-ci étant motivées par celles-là, et stériles sans elles.

De cette difficile situation nous pouvons dégager deux solutions. Une possibilité serait de mettre un terme au primat du cours magistral dominant en France, ce qui permettrait de faire plus de travaux de groupe en classe, plus de projets tutorés à l'extérieur, ainsi qu'en Angleterre, et de favoriser de fait la réflexion personnelle, la recherche de solution à un problème : voilà exactement la première étape de la démarche algébrique, si nécessaire à sa compréhension profonde et pourtant absente des enseignements. L'autre possibilité est de conserver le système du professeur omniprésent et central, mais de

32 Et si les mathématiques sont le lieu privilégié pour nourrir les réflexions les plus pures, elles ont aussi le travers d'être des monts dont certains n'arriveront pas à atteindre le moindre sommet, c'est-à-dire la moindre compréhension, faute d'efforts. D'où l'importance cruciale de l'éveil de l'intérêt et de la critique.

lui donner les moyens de faire ce travail avec sa classe, travail qui prend assurément du temps comme tout travail de réflexion : cela veut dire diminuer la taille des classes de sorte qu'un cours basé sur l'échange avec les élèves et sur les travaux en binômes soit possible — comprendre : supportable et gérable — ou alors diminuer la taille des programmes. Nous avons d'ailleurs la conviction que cette dernière solution est tout à fait défendable, à condition de faire des programmes plus cohérents et moins éclatés en des myriades de thèmes plus ou moins disjoints chaque année, de prendre plus le temps de la réflexion avec les élèves au sujet de la signification et de l'enchaînement logique des notions, de faire en sorte que ce qui est enseigné soit profondément compris bien au-delà des exigences pratiques d'un baccalauréat, et enfin de laisser une plus grande part à l'initiative et à la liberté intellectuelle de l'élève, ce qui attisera sa curiosité et permettra de traiter des sujets intéressants en devoir comme en examen. En somme, mieux vaut apprendre deux fois moins chaque année, mais le faire de manière rationnelle et consciente de ce qui est fait, motivée par des mises en situation et excitée par la difficulté d'un problème complet, cohérent et par un travail collectif. Nous sommes profondément convaincus qu'ainsi, ce qui est appris le sera bien plus que deux fois mieux, et assurément pour longtemps.

Nous aurions apprécié pouvoir passer quelques pages à développer un traitement complet d'un sujet simple et aisément accessible, dans cet esprit d'une démarche entraînante et réjouissante pour les élèves, libre surtout, les amenant à comprendre l'algèbre en algébrisant eux-même un problème, puis en le traitant grâce à l'emploi des outils de base dont ils disposent, et dont la solution obtenue est même suffisamment générale pour éclairer d'autres problèmes. Un thème très formateur à notre goût est la théorie des graphes, qui a le mérite de lier vision géométrique, qui va souvent de pair avec biais de raisonnement et illusions des cas particuliers, et problèmes d'algèbre discrète et de combinatoire, tout en étant omniprésent dans nombre d'applications modernes, historiques et ludiques. Cet objectif a été testé devant des classes de lycées, de premières et terminales des filières S et ES, dans le cadre d'une association visant à promouvoir les sciences, et surtout les sciences faites sans en occulter les idées les plus fondamentales, avec un point de vue vivant et en se fondant sur les seuls outils de base possédés au lycée. Les retours ont tous été très positifs et le dynamisme de certains élèves au cours de la présentation a même surpris leurs professeurs : nous espérons qu'il y a là un argument de plus en faveur de notre argumentaire. La présentation consistait en la première partie de l'*Invitation à la théorie des graphes* du GICS, qui a été rédigé dans l'esprit qui a été décrit ici, et s'il n'a pas le dynamisme d'une présentation orale, nous pensons qu'il en possède l'essentiel du contenu, auquel il faudrait naturellement adjoindre beaucoup d'interactivité et de tentatives infructueuses. Nous faisons confiance à la grande culture de chaque professeur pour illustrer notre position par leur propre programme et leurs propres intérêts, mais puisqu'il a fallu faire un choix entre exposé théorique et illustration pratique de notre thèse, et que maints travaux s'attachent à développer la didactique de l'algèbre et l'examen de situations concrètes. Un travail remarquable de réflexion et de synthèse sur la démarche algébrique, sur sa psychologie et sa didactique dans l'enseignement primaire, est mené depuis plusieurs années par le Ministère de l'Éducation de l'Ontario, illustré par de nombreux exemples et de nombreuses mises en situation [33], nous avons sans hésitation préféré

33 Et si les mathématiques sont le lieu privilégié pour nourrir les réflexions les plus pures, elles ont aussi le travers d'être des monts dont certains n'arriveront pas à atteindre le moindre sommet, c'est-à-dire la moindre compréhension, faute d'efforts. D'où l'importance cruciale de l'éveil de l'intérêt et de la critique.

aller plus avant dans le développement théorique de notre argumentaire, qui nous semble être au cœur du problème de l'enseignement de l'algèbre, que nous nous refusons à risquer de travestir en le traitant à partir de seuls exemples.

V. — Conclusion : Comment et pourquoi enseigner l'algèbre ?

La triste situation actuelle d'un désamour général des mathématiques, dans l'enseignement comme dans la société, est plus due à une incompréhension profonde de l'esprit de l'algèbre qu'à une critique éclairée de son bien fondé, qu'il soit pédagogique ou utilitariste. Des premiers balbutiements de l'algèbre jusqu'aux développements les plus récents des sciences, l'algèbre est mue par le même esprit de formalisation, non pas une formalisation qui serait un aboutissement en soi, mais une formalisation motivée en permanence par la conviction que c'est en se libérant des situations trop concrètes que l'on réussit à atteindre la compréhension la plus intime de l'objet étudié, et si ce n'est son essence, tout du moins un modèle fiable et plus exploitable. Et quelle plus belle victoire pour l'algèbre que de voir à quel point des domaines bien distincts des mathématiques ont éclos à la lumière de leur algébrisation. Ainsi la physique relativiste a su exploiter les formalisations géométriques que sont les surfaces de Riemann, ainsi la mécanique quantique s'exprime en termes de théories d'opérateurs, ainsi la logique et la combinatoire sont des pans fondamentaux de l'informatique, ainsi la théorie de la mesure et de l'intégration ont ouvert les portes d'un renouveau en profondeur de la théorie des probabilités, ainsi tant d'autres domaines ont grandi après avoir appris à comprendre l'algèbre, cette idée que l'on appelle algèbre, cette forme générale de la raison qui subsume la pratique et l'intuition sous des raisonnements purement formels.

Quel tort que de ne voir dans l'algèbre que formalisation gratuite, que manipulation insensée, ou encore épreuves absconses d'examens et de concours ! L'algèbre n'est pas réduite à sa seule partie calculatoire et syntaxique, elle est avant tout une démarche rationnelle et critique. Et c'est cette idée, ce constat en permanence renouvelé des fruits de la formalisation critique, qui doit être au cœur de tous les enseignements de l'algèbre sinon de tous les enseignements. L'utilité et les applications pratiques des formules algébriques ne doivent pas être l'unique motivation pour l'élève, et nul ne doit remettre en cause cet enseignement pour son manque d'applicabilité immédiate – dans le temps comme dans la chaîne du raisonnement — sans oublier non plus que les situation concrètes sont une source de motivation et de gratification puissante, inépuisable et captivant l'intérêt. Apprendre l'algèbre, c'est apprendre à raisonner, et maîtriser des outils dont on a compris la portée. L'algèbre est le raisonnement critique le plus pur, et bien plus que le simple outil pour faire des mathématiques, ce qu'elle est aussi indéniablement, elle est la meilleure école de l'esprit, celle qui n'enseigne pas la solution aux problèmes, mais celle qui apprend à les résoudre. C'est au prix de l'effort d'une abstraction et d'une formalisation difficiles et contre-nature que l'algèbre doit être comprise, et c'est à ce prix qu'elle l'a toujours été. Mais si l'idée fondamentale de l'algèbre, qui sous-tend tout raisonnement, est acquise, voilà un prix bien dérisoire pour avoir appris à penser.

Bibliographie

[1] Alain. *Propos*. Gallimard, 1927.

[2] D. Alvarez. *Une histoire de l'imaginaire mathématique*. Hermann, 2011.

[3] G. Bachelard. *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin, 2000.

[4] C. Bartocci and P. Odifreddi. *La mathématique. Les lieux et les temps*. CNRS Éditions, 2009.

[5] L. Brunschvicg. *Les étapes de la philosophie mathématique*. A. Blanchard, 1993.

[6] K. Chemla and G. Shunchun. *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Dunod, 2004.

[7] A. Comte-Sponville. *Dictionnaire Philosophique*. PUF, 2001.

[8] L. Couturat. *De l'infini mathématique*. A. Blanchard, 1973.

[9] J. Dieudonné. *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*. Bordas, 1977.

[10] J. Dieudonné. Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui. Hachette, 1987.

[11] G. Dowek. *Les métamorphoses du calcul*. Le Pommier, 2007.

[12] A. Flexner. *The Usefullness of Useless Knowledge*. Harper's Magazine, 1939.

[13] Groupe pour l'Initiative et la Culture Scientifiques (GICS). *Une invitation à la théorie des graphes*. www.gics.fr, 2011.

[14] G. Ifrah. *Histoire universelle des chiffres*. Seghers, 1981.

[15] F. Klein. *Le programme d'Erlangen*. Jacques Gabay, 1872.

[16] L. Levy-Bruhl. *Fonctions mentales dans les sociétés inférieures*. Alcan, 1918.

[17] Ministre de l'Éducation de l'Ontario. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année. Modélisation et algèbre*. www.atelier.on.ca/edu/resources/guides, 2008.

[18] R. Netz. *Deuteronomic Texts : Late Antiquity and the History of Mathematics*. Revue d'Histoire des Mathématiques, 1998.

[19] N. Ordine. *L'utilité de l'inutile*. Les Belles Lettes, 2013.

[20] Platon. *La République*. GF, 2002.

[21] Platon. *Thééthète*. Gallimard, bibliothèque de la Pléiade, 1950.

[22] R. Rashed. *D'Al-Khwarizmi à Descartes*. Études sur l'histoire des mathématiques classiques. Hermann, 2011.

[23] O. Reboul. *Qu'est-ce qu'apprendre*. PUF, 1980.

[24] O. Reboul. *La philosophie de l'éducation. PUF,* 1989.

[25] C. Tiercelin. *La valeur de la connaissance*. Collège de France, 2010.

[26] TNS-Sofres. www.tns-sofres.com/_ assets/files/2010.01.15-confiance-politique.pdf, 2009.

[27] S. Unguru. *On the need to rewrite the history of greek mathematics*. Archive for History of Exact Sciences, 1975.

[28] J. van Heijenhoort. From Frege to Gödel. *A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931. iUniverse, 1999.

[29] J. Vuillemin. *La philosophie de l'algèbre*. PUF, coll. Épiméthée, 1993.

[30] J. Vuillemin. *Mathématiques pythagoriciennes et platoniciennes*. A. Blanchard, 2001.

[31] A. Warusfel. *Les mathématiques modernes*. « Le rayon de la science », Le Seuil, 1969.

[32] M. Winter. *Du rôle de la philosophie dans la découverte scientifique*. Revue de métaphysique et de morale, 1908.