DIVISER EN MULTIPLIANT LES APPROCHES ...

Quand les mathématiques remontent aux sources

Marc MOYON et l'ERR
Histoire des Mathématiques au collège [1]
Irem de Limoges

À la rentrée 2011, a été créée une E.R.R. (« équipe de recherche et de réflexion » de l'Irem de Limoges co-financée par le rectorat de l'Académie) autour de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques. C'est en Corrèze, à Brive la Gaillarde, qu'une équipe d'enseignants de deux collèges différents s'est déclarée volontaire [2]. Ces enseignants, de Mathématiques, d'Histoire et de Français, avaient déjà eu l'occasion de travailler ensemble et leur participation à l'E.R.R. a permis de nourrir une nouvelle réflexion au sein de ces équipes en s'appuyant en particulier sur les travaux de la commission inter-Irem « histoire et épistémologie des mathématiques ». Outre la forte orientation épistémologique que chacun voulait suivre, une des principales motivations était de pouvoir travailler ensemble (enseignants de collège et de l'IUFM) pour échanger nos réflexions sur l'enseignement avec la volonté de lier entre elles les disciplines représentées dans une dynamique affichée de pédagogie par projets.

Les premières séances de notre travail se sont organisées autour d'une série d'exposés à partir de la lecture de plusieurs articles historiques et épistémologiques [1,2,3]. Plusieurs projets ont ensuite été discutés et progressivement mis en place dans les classes avec, entre autres, la création de nouvelles activités mathématiques en sixième et en cinquième ou encore la

1 Les enseignants qui ont participé à ce projet aux côtés de Marc Moyon (IUFM du Limousin) sont Jérôme Dufour (Collège Cabanis, Brive la Gaillarde), Josée Dugal, Chantal Fourest, Corinne Maury et Valérie Rosier (Collège D'Arsonval, Brive la Gaillarde) et Pascal Vilatte (IUFM du Limousin).

2 Nous tenons ici à remercier tous les élèves des collèges Cabanis et d'Arsonval de Brive la Gaillarde qui ont participé à ces travaux. Plusieurs de leurs propres constructions ont servi d'illustrations au présent article.

mise en place d'un projet interdisciplinaire en sixième dont les objectifs pédagogiques s'intégraient dans les programmes scolaires des disciplines concernées. En plus des compétences disciplinaires, nous avions tous présents à l'esprit les objectifs faisant référence aux compétences « transversales » du socle : curiosité et créativité, ouverture aux autres, autonomie dans le travail, prise d'initiatives, engagement dans un projet afin de le mener à terme (exposé, dossier...).

Les différentes étapes ont été proposées dans les classes entre février et mai 2012. Le fait d'inscrire ces actions dans la durée a permis aux élèves de reprendre et d'enrichir au fur et à mesure de l'avancée du programme leurs productions antérieures et de trouver des prolongements. Citons, à titre d'information, un extrait du programme de Mathématiques que nous reprenons ici à notre compte :

> *Pour prendre du sens pour les élèves, les notions mathématiques et les capacités qui leur sont liées gagnent à être mises en évidence et travaillées dans des situations riches, à partir de problèmes à résoudre. (…) Tout apprentissage se réalise dans la durée, dans des activités variées et toute acquisition nouvelle doit être reprise, consolidée et enrichie.* [D1, p. 12]

Il s'est donc agi pour l'enseignant à la fois de réactiver des notions déjà présentées et d'ouvrir des pistes concernant de futures connaissances. Ce modeste article a pour objectif de présenter deux des activités réalisées à partir de la réflexion originale des collègues jusqu'à la mise en place effective dans les classes. Les deux niveaux concernés sont la sixième et la cinquième (11-13 ans) dans le but de montrer une certaine continuité dans les apprentissages géométriques. Mais avant cela, nous proposons une brève présentation historique des problèmes de division des figures qui a fait l'objet d'une conférence à destination des élèves lors de la semaine des mathématiques de mars 2012. Précisons d'ores et déjà que cette conférence n'est pas strictement nécessaire à la conduite des projets pédagogiques présentés ci-après. Elle peut notamment être remplacée par une présentation en classe des principaux éléments du préambule historique qui suit.

A. — Préambule historique : La division des figures planes.

La division ou le découpage des figures planes est un chapitre géométrique ancien. Il s'agit de couper une figure ou de la partager selon des contraintes géométriques fixées *a priori* sur les grandeurs (longueurs et surfaces) ou sur les figures à obtenir après découpage. En particulier, nous retrouvons ce type de problèmes résolu par les scribes paléo-babyloniens au IIe millénaire avant l'ère chrétienne [4]. Ce chapitre n'est pas abandonné dans le *corpus* de la Grèce antique qui nous est parvenu. Il est illustré, à notre connaissance, par deux des plus grands noms des mathématiques grecques : Euclide avec son ouvrage *Sur la division* (aujourd'hui perdu dans sa version originelle), et Héron d'Alexandrie avec ses *Métriques*.

Nous sommes naturellement conscients de l'importance des deux traditions précédentes mais ici, notre propos est d'offrir à notre lecteur quelques témoignages de mathématiciens des pays d'Islam et du Moyen Âge latin qui seront utilisés dans la suite de l'article [1,2,3]. Dans les mathématiques rédigées en arabe, la division des figures planes appartient au chapitre du *ᶜilm al- misāḥa* [science du mesurage] dans lequel les mesures de lignes, de surfaces et de volumes occupent une grande place. Dès le IXe siècle, à Bagdad, al-Khwārizmī (m. vers 850) contribue à développer le mesurage des figures planes en rédigeant l'ouvrage fondateur de l'algèbre : *Kitāb al-mukhtaṣar fī l-ḥisāb al-jabr wa l-muqābala* [Abrégé du calcul par l'algèbre et la restauration]. En effet, il y insère un *bāb al-misāḥa* [chapitre de mesurage] dans lequel il montre comment certains problèmes géométriques peuvent être résolus par l'algèbre. Il est intéressant de lire à quels types de personnes l'algébriste de Bagdad destine son ouvrage :

> *J'ai voulu qu'il [son ouvrage] enferme ce qui est subtil dans le calcul et qui en lui est le plus noble, ce dont les gens ont nécessairement besoin dans leurs héritages, leurs legs, leurs partages, leurs arbitrages, leurs commerces, et dans tout ce qu'ils traitent les uns avec les autres lorsqu'il s'agit de l'arpentage des terres, de la percée des canaux, de la mensuration, et d'autres choses relevant de ses sortes.* [5, p. 94]

À travers ces mots, il est manifeste que les mathématiques d'al-Khwārizmī s'adressent aux hommes dans certaines de leurs pratiques quotidiennes. De nombreuses corporations d'artisans sont ici visées. C'est ainsi que plusieurs juristes sont aussi mathématiciens ou que des géomètres tentent de résoudre des problèmes artisanaux avec en particulier le découpage des figures. L'un des meilleurs représentants de ce dernier groupe est probablement le mathématicien et astronome persan Abū l-Wafā' al-Būzjānī (940-988). Il rédige, entre autres, le *Kitāb fī mā yahtāju ilayhi as-sānī^c min a^{c}māl al-handasiya* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en construction géométrique] dans lequel il s'intéresse aux pratiques géométriques des artisans décorateurs, ou encore des répartiteurs d'héritage. Il est ainsi amené, au sujet du découpage de carrés, à distinguer les géomètres des artisans :

> *Un groupe de géomètres et d'artisans se sont trompés au sujet de ces carrés et de leur composition, les géomètres à cause de leur peu d'expérience dans la pratique et les artisans à cause de leur dénuement dans la science de la démonstration; et ce parce que <pour> le géomètre, lorsqu'il n'a pas d'expérience dans la pratique, il lui est difficile d'approcher, selon les conceptions de l'artisan, ce qui est, pour lui, juste à l'aide des démonstrations à l'aide des lignes. Ce que vise l'artisan c'est ce qui lui facilite la construction et lui montre la justesse de ce qu'il voit par les sens et l'observation; et il ne se soucie pas de la démonstration de la chose imaginée et <de la justesse> des lignes. Le géomètre, <lui>, dès lors que la démonstration de la chose imaginée est établie, ne se soucie pas de la justesse de cela par l'observation alors qu'elle n'est pas exacte.* [6, p. 144-154 d'après 7]

Ainsi, Abū l-Wafā' expose plusieurs problèmes de décomposition et recomposition du carré qui illustrent cette tension entre géomètres et artisans. Il débute par la construction d'un carré à partir de deux carrés quelconques (*cf.* annexe 1a), pour se concentrer ensuite sur la construction d'un carré à partir, par exemple, de deux, cinq (*cf.* annexe 1b) ou encore neuf carrés égaux. La construction d'un carré à partir de trois carrés égaux sera l'occasion de mettre face à face deux procédures géométriques expertes et deux procédures d'artisans qui sont géométriquement erronées mais « justes à l'œil » (*cf.* figures 1 et 2).

Arrêtons-nous maintenant sur l'une des deux constructions, géométriquement justes, que propose Abū l-Wafā'. Son énoncé et la figure correspondante (*cf.* figure 3) sont :

> *Nous divisons deux carrés en deux moitiés selon les diamètres, et nous appliquons chacune d'elles à l'un des côtés du troisième carré, en mettant l'angle demi droit de chaque tri-*

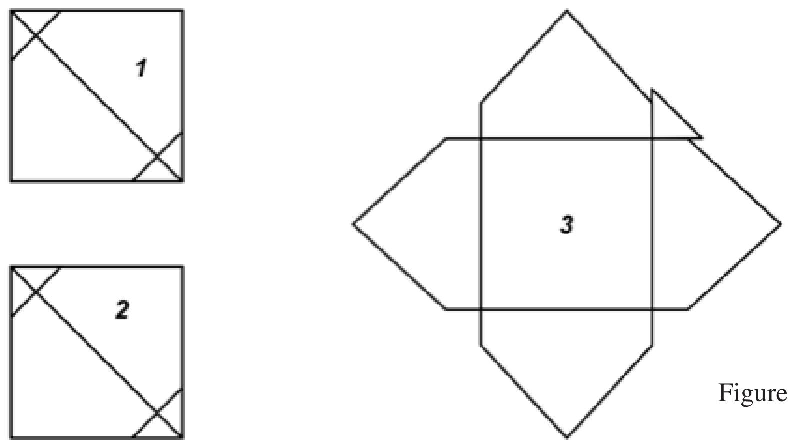


Figure 1

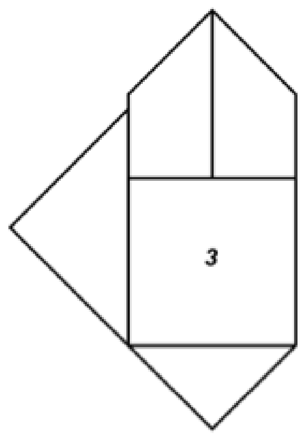


Figure 2

angle sur l'un des angles du carré et sa diagonale sur le côté du carré. Alors une partie du triangle dépasse du côté de l'autre angle du carré. Puis nous joignons les angles droits des triangles à l'aide de lignes droites. Ce sera le côté du carré cherché. Alors, de chaque grand triangle, se sépare un petit triangle que nous coupons et que nous déplaçons vers le triangle apparaissant sur l'autre côté. [6, p. 144-154 d'après 7]

Si, ici, c'est le lien entre le géomètre et l'artisan qui est illustré. Là, c'est l'interaction des mathématiques avec le domaine juridique du partage des terrains à la suite d'un héritage ou d'un partage entre copropriétaires. Les terrains prennent alors des formes géométriques, du carré au trapèze en passant par le triangle. Pour mieux comprendre ce type de problème, lisons une de ces constructions :

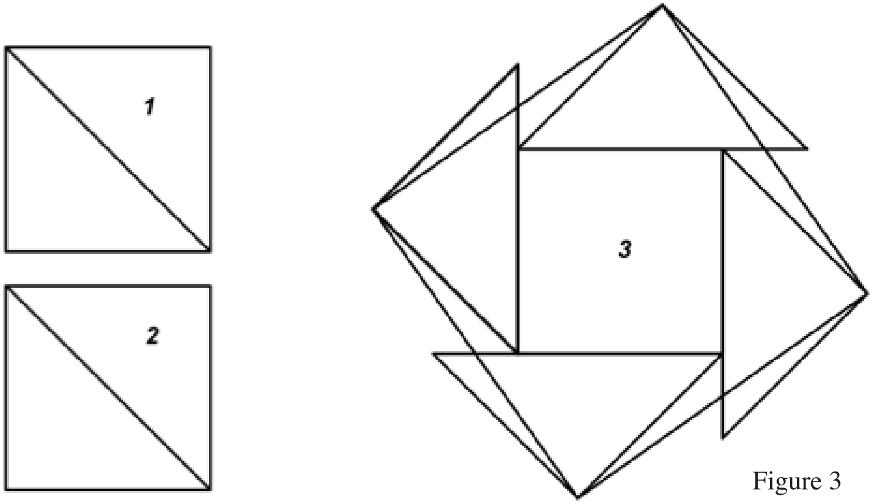


Figure 3

Et si on nous dit : comment diviser le carré ABDG en deux moitiés et aménager un chemin de largeur DH. Nous prolongeons GA jusqu'à M et nous construisons AM égal à GH. Et nous prolongeons AB jusqu'à L et nous traçons un cercle à partir du centre G et avec le rayon GM. Le cercle coupe la droite BA au point L. Et nous relions LG. Et nous coupons LK <de LG> égal à GH. Et nous traçons la droite KETR parallèle à la droite BAL. Et nous traçons HT parallèle à la droite DB. Il y a donc la surface HE égale à la surface EB. Et voici sa figure. [6, p. 131-132]

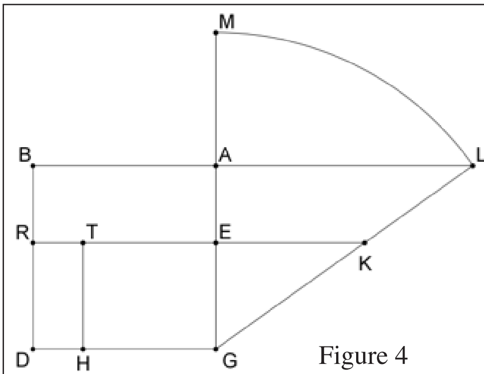


Figure 4

De nombreux autres auteurs des pays d'Islam vont contribuer à développer ce chapitre mathématique notamment en donnant des résolutions algébriques à ces problèmes de partage.

Ce sera en particulier le cas d'al-Karajī (m. vers 1029) qui propose, entre autres, le problème suivant :

Si on te dit, tu as un quadrilatère de longueur 20 bāb [3] *et de largeur 10* bāb*, divise-le entre trois personnes : la moitié pour l'un d'eux, le tiers pour un autre et le quart pour un autre de sorte qu'il y ait, en son centre, une route de largeur 2* bāb *à laquelle aboutissent, par la longueur, les entrées des trois quote-*

3 Le *bāb* est une unité de mesure utilisée en pays d'Islam aussi bien en Orient qu'en Occident.

parts, l'une par le devant, l'autre par la droite et l'autre par la gauche, de sorte que la quote-part du propriétaire du tiers soit à l'avant, selon cette figure.

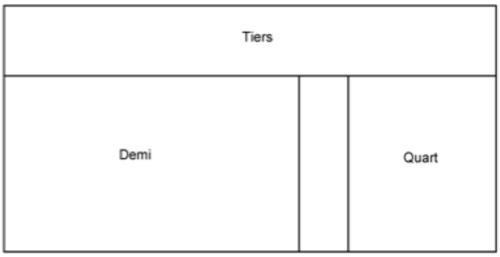


Figure 5

La procédure pour cela est que l'on pose la longueur de la route comme la chose. Et tu la multiplies par la largeur de la route, et ça donne deux choses et ceci est la surface de la route. Et tu poses le dix-huit qui reste, <à diviser> en deux parties entre les propriétaires de la moitié et du quart parce que ceux-ci vont prendre leurs parts à partir de la droite de la route et de sa gauche. Une des deux parts est 12. Ceci est la largeur de la part du propriétaire de la moitié. Et le six qui reste est la largeur de la part du propriétaire du quart. Et la longueur de chacun est la longueur de la route, et c'est la chose. La surface de la part du propriétaire de la moitié est douze choses. La surface de la part du propriétaire du quart est six choses. Et à partir de cette règle-là, il faut que la surface de la part du propriétaire du tiers soit huit choses. Et la surface de la route est deux choses, et le mesurage total de cette surface est vingt-huit choses. Et ceci est égal à deux cents. Et la chose seule égale sept bāb *et un septième d'un* bāb. *Et ceci est la longueur de la route. Et il reste la largeur de la part du propriétaire du tiers à partir de la largeur totale de dix* bāb *: deux* bāb *et six-septièmes d'un* bāb. [8, p. 202-204]

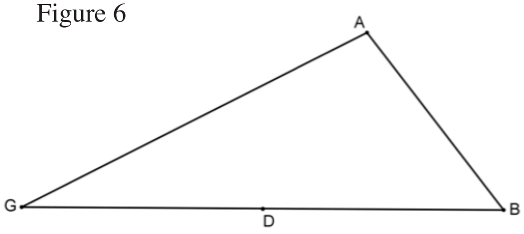
Autrement dit, si la longueur de la route est x, la surface totale est $12x + 8x + 2x + 6x = 28x$ et on aboutit trivialement à l'équation linéaire $28x = 200$, qui donne $x = 200/28 = 7 + 1/7$ comme solution. Le partage en demi, tiers et quart peut étonner dans un premier temps, mais il se retrouve régulièrement dans les textes liés aux partages successoraux en pays d'Islam respectant ainsi certaines règles coraniques. Le partage se fait alors effectivement dans le rapport qui est donné par ce que 2 est à 3 et est à 4.

Au XIIe siècle, lorsque l'Europe latine va s'approprier une grande partie du savoir et des pratiques scientifiques des pays d'Islam notamment grâce aux traductions arabo-latines, le chapitre des divisions des figures ne fera pas exception. Des mathématiciens, comme Fibonacci (XIIIe s.), Jean de Murs (XIIIe s.) ou encore plus tard Christophorus Clavius (m. 1612) et Simon Stevin (m. 1620), vont à leur tour s'emparer de ce type de problèmes et les développer à leur manière dans leur « géométrie pratique ». Les artisans décorateurs et les répartiteurs d'héritage ne seront pas mentionnés mais les problèmes mathématiques restent bien dans le même esprit. Terminons donc cet aperçu historique par un problème proposé et doublement résolu par Fibonacci.

C'est alors l'arithmétisation des grandeurs qui est en jeu dans la démonstration alternative du mathématicien pisan avec l'utilisation de la formule $\dfrac{base \times hauteur}{2}$.

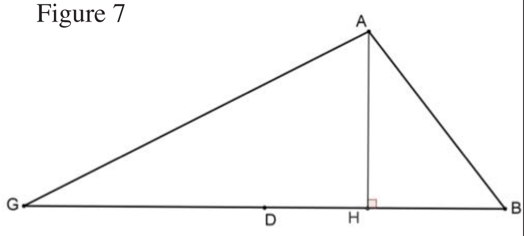
Lorsque tu veux diviser quelque triangle que ce soit en deux parties égales à partir d'un sommet, trace une ligne à partir de ce sommet jusqu'au milieu du côté étendu sous celui-ci ; et tu auras ce que tu désires. Par exemple, nous voulons diviser le triangle ABG en deux [parties] égales à partir du point A.

Figure 6



*Que soit divisé le côté BG en deux [parties] égales au point D (*cf. *figure 5) et que soit tracée la droite AD. Je dis que le triangle ABG est divisé en deux triangles égaux. En effet, les deux triangles ABD et ADG sont égaux l'un à l'autre, puisqu'ils sont sur des bases égales, et sous la même hauteur qui est la hauteur menée de A sur la ligne BG. En effet, deux triangles construits l'un et l'autre sous la même hauteur sont comme les bases d'après le début du sixième Livre [d'Euclide]*[4]*. C'est pourquoi, BD est à DG comme le triangle ABD est au triangle ADG. Comme la base BD est égale à la base DG, alors les deux triangles ABD et ADG sont égaux l'un à l'autre comme ce qui a été dit précédemment.*

Figure 7



*Ou bien si nous traçons la hauteur issue de A sur la ligne BG (*cf. *figure 6), elle-même sera de toute façon la hauteur de chacun des deux triangles ABD et ADG. La multiplication de la moitié de la hauteur par les bases BD et DG égale la multiplication de la moitié de cette même hauteur par la base BG. Comme de la multiplication de la moitié de la hauteur par les bases BD et DG provient l'aire des triangles ABD et ADG. Alors il est démontré que le triangle ABD est égal au triangle ADG.* [10, p. 110]

4 Il s'agit ici de la première proposition du Livre VI : « Les triangles et les parallélogrammes qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases. » ; [9, vol. 2, p. 155].

B. — Genèse et réalisation d'un projet interdisciplinaire en sixième (11-12 ans) : « De l'ornementation à la géométrie… de l'artisan au géomètre… »

Même si la lecture s'en trouve moins fluide, nous avons choisi de présenter tour à tour les éléments disciplinaires du projet pour mieux comprendre comment les enseignants de Mathématiques, Français et Histoire ont articulé, dans leur propre discipline, le projet dans sa globalité.

B1. *Le travail de l'enseignant de Mathématiques*

Les séances de Mathématiques se sont articulées autour de deux problèmes. Le premier, « Comment reconstituer un carré à partir de deux carrés identiques ? », peut être vu comme préparatoire au second qui demande plus de réflexion. Ce dernier se propose d'énoncer des procédures pour reconstituer un carré à partir de trois carrés identiques. Les activités présentées répondent aux objectifs disciplinaires suivants [D2, Palier 3 /Compétence 3, p. 35] :

— Manipuler : puzzle en bois, découpages sur papier quadrillé, assemblages, pavages, collages.

— Construire : utilisation des instruments de géométrie, tracé sur des supports différents papier (papier quadrillé, Canson).

— Nommer, coder : utilisation du vocabulaire des objets géométriques, des symboles, des notations, des codages de longueurs égales, d'angles.
— Mesurer : des longueurs et des angles.
— Calculer : réintroduction de la « fraction partage » dans un cadre géométrique, fraction de l'unité, écriture d'égalités, calculs avec des fractions d'aires...
— Ecrire : rédiger le texte d'un programme de construction.
— Raisonner
— Revenons maintenant aux problèmes.

Problème n°1 : *Reconstituer un carré à partir de deux carrés identiques.*

Trois séances du cours de Mathématiques lui sont consacrées (environ 2h 30). C'est la manipulation qui occupe la première d'entre elles. La question « Comment reconstituer un carré à partir de deux carrés identiques ? » est posée oralement de manière à permettre un échange de questions et de commentaires au sein de la classe. Elle est finalement écrite au tableau comme tâche à réaliser. Le travail se déroule en binôme à partir de deux carrés identiques découpés dans du papier quadrillé pour faciliter les tracés et le découpage. Après une phase d'essais successifs et de tâtonnement, plusieurs binômes vont assez vite trouver l'une ou l'autre des solutions recherchées. Ils ont majoritairement eu l'idée du découpage des deux carrés suivant les diagonales (*cf.* figure 8), un groupe a trouvé seul, sans aide, l'autre possibilité en conservant un carré (*cf.* figure 9). L'idée de faire apparaître des figures particulières, triangles rectangles isocèles, et non de découper de façon quelconque est assez vite apparue comme très précieuse.

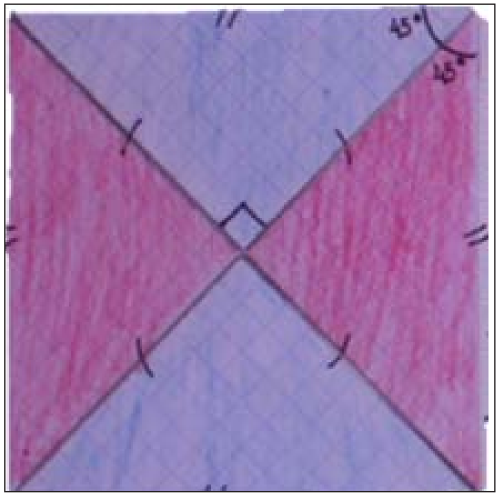
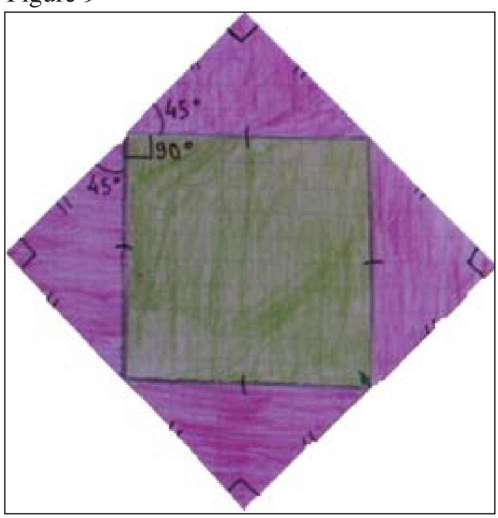


Figure 8

Figure 9



Un groupe découpe ou plie sans aucune réflexion préalable et n'avance pas : l'enseignant lui donne alors un coup de pouce (une indication visuelle) et projette des éléments décoratifs où certains motifs illustrent une solution au problème posé (*cf.* figures 10 et 11). Tous les groupes ont alors des éléments leur permettant de produire une réponse.

Figure 10 : Détail d'une mosaïque de la Mosquée Hassan II, Casablanca (XXe siècle)
[photo personnelle]

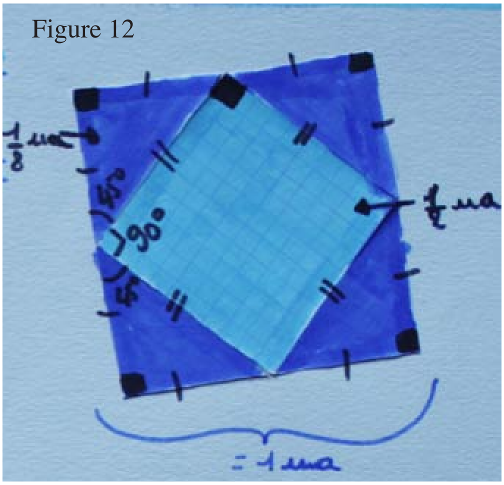
Figure 11 : Détail d'un décor mural, Grenade (IXe -Xe siècles) [11, p. 97].

A la fin de la séance, après un moment d'échange collectif où l'on évoque le nom de tous les éléments des compositions et les axes de symétrie des deux pavages, tous les élèves sont à même de mettre en forme une fiche avec collage et coloriage de deux puzzles (*cf*. figures 8 et 9). Ils termineront ce travail chez eux.

Les différentes manipulations ont permis à tous les élèves d'être actifs et de s'impliquer dans cette première recherche. Chaque élève a intégré le problème géométrique posé, et il reste maintenant à exploiter les deux puzzles obtenus. Cette exploitation se déroule en deux parties. Pour la première, ce sont les grandeurs et mesures qui sont au programme. Au préalable, les notions d'aire et de périmètre, les fractions « partages » et les « nombres fractions » ont été traités. L'objectif est de comparer les aires de chacun des éléments constituant les deux puzzles différents sans les mesurer. Les réponses des binômes sont projetées au tableau et commentées. Peu d'erreurs apparaissent. Une contrainte supplémentaire est ajoutée : une unité d'aire est fixée, celle du « grand carré ». Ils expriment alors l'aire de chaque figure à l'aide de fractions (*cf*. figure 12). Tous les groupes ont réussi à trouver de bonnes réponses. Ils ont ensuite pour consigne de trouver le maximum d'égalités où interviennent ces fractions. La fraction-partage est ainsi réintroduite dans un cadre géométrique original que les élèves s'approprient très vite car ils ont déjà réfléchi, avec la construction des puzzles, au rapport des aires des figures concernées. Cela donne du sens à leur travail et ils font preuve de beaucoup d'initiatives.

Avec les supports visuels (puzzle / figures / code couleur), tous les groupes parviennent à écrire des égalités où vont intervenir demi, quart, huitième. Les élèves les plus « intuitifs » vont jusqu'à écrire des sommes où figurent des fractions de dénominateurs différents ainsi que des produits de fractions par un entier (*cf*. figure 13). À la fin de la séance, la synthèse des travaux des différents groupes est riche

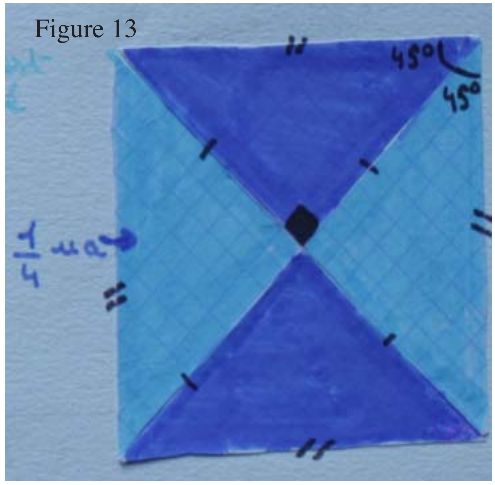
Figure 12



$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 4$$

$$\frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Figure 13



$$1 = \frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

et animée. Toutes les traces écrites des élèves sont complétées, chacun choisissant les relations qui lui « parlent» (plus ou moins élaborées) faisant intervenir les fractions d'aires (*cf*. figures 12 et 13).

Des remarques sont également faites (à l'oral de façon informelle) sur les angles et leurs mesures (90°, 45°) et sur la somme de certains d'entre eux. On évoque des parallèles, des perpendiculaires, des points alignés, etc. Progressivement les productions s'enrichissent encore avec des mesures, des codages... (*cf*. figures 8 et 9, 12 et 13). L'exploitation des deux figures-puzzle est allée ce jour-là au-delà des attentes initiales de l'enseignant.

Tous les élèves sont alors prêts, plusieurs jours après, pour la seconde partie entièrement dédiée à un travail d'écriture. Il s'agit en effet de décrire précisément la façon d'obtenir le carré (à partir des deux autres) à une personne qui ne saurait pas le faire. Le travail s'effectue au brouillon et par binôme. Chaque binôme choisit un puzzle à décrire et a pour consigne de penser à utiliser le vocabulaire des figures géométriques. La séance se termine en plein travail d'écriture et se poursuivra chez eux ou en étude. Le lendemain, au début du cours suivant, les productions sont vidéoprojetées, les principales erreurs (notations, vocabulaire spécifique, syntaxe, étapes à scinder...) sont corrigées en plénière.

Tous les éléments sont traités et mis en commun, cela renforce les échanges entre eux et installe un climat de respect mutuel. Ce travail, qui s'inscrit dans la progression de sixième après des exercices plus simples de recherche

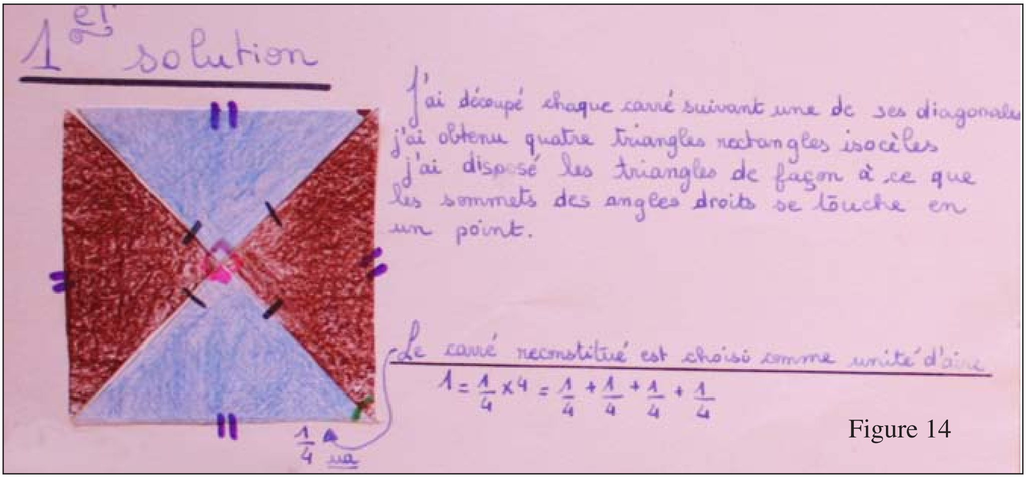


Figure 14

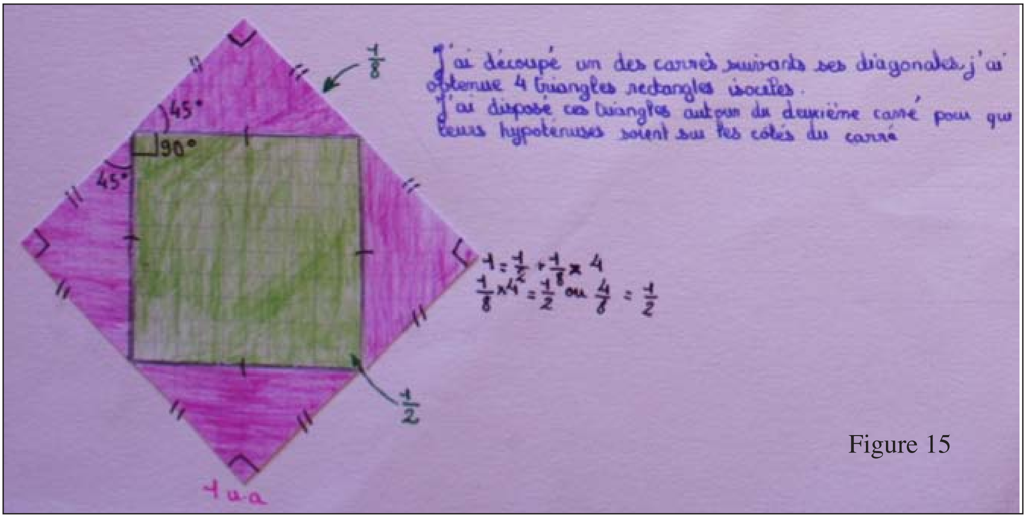


Figure 15

de programmes de construction, a permis à certains de réviser le vocabulaire de géométrie et surtout de travailler sur la chronologie des étapes de la construction. Un groupe « testeur », constitué des élèves qui avaient le plus de mal à rédiger un programme de construction, est chargé de vérifier si les deux textes contiennent bien les consignes nécessaires et suffisantes en faisant les figures sur Canson avec les données rédigées par leurs camarades.

Les textes « validés » sont recopiés et complètent la fiche (*cf.* figures 14 et 15) où figurent maintenant de nombreuses informations !

Problème n°2 : *Reconstituer un carré à partir de trois carrés identiques.*

Le travail se déroule toujours en binôme à partir de trois carrés identiques découpés dans du papier quadrillé. Les élèves disposent du texte ancien étudié en Français (*cf.* annexe 2a-2b), du document photo (*cf.* annexe 2a) et du puzzle en bois qu'ils peuvent manipuler. Tous les groupes s'engagent dans la résolution du problème avec intérêt mais, au bout d'un certain temps, le manque de méthode, de soin et de précision découragent plus d'un élève. Certains ont l'idée de numéroter les éléments du puzzle pour mieux s'y retrouver, d'autres décident de colorier chaque élément. Les productions sont de qualité inégale et ne satisfont pas tous les binômes. L'étape du collage va elle-aussi être très décevante et il est bien souvent difficile d'obtenir le résultat attendu (*cf.* figure 16). Le travail de « l'artisan » s'avère donc bien délicat ! Par contre, le passage à la construction sur Canson, c'est-à-dire une partie du travail du « géomètre » avec ses instruments (règle, équerre et compas), a réservé d'agréables surprises (*cf.* figure 17) ! Cette séance qui s'inscrit dans la progression de sixième après les constructions de triangles et de quadrilatères particuliers est l'occasion de mettre en application les compétences déjà travaillées par ailleurs. Chaque élève, même les plus en difficulté, exprime la volonté de réaliser une « belle » figure quitte à se reprendre plusieurs fois. L'aide entre pairs se révèle ici aussi très profitable.

Au début du cours suivant, les productions sont vidéoprojetées et commentées. Les figures sont codées et toutes les remarques listées, triées, corrigées au tableau. C'est à nouveau une formidable opportunité pour travailler le vocabulaire de géométrie, les égalités de longueurs et d'angles, de mesurer (notamment avec le rapporteur), de comparer, de calculer des sommes d'angles et d'étudier l'éventuelle présence de symétries. La notion de symétrie centrale est évoquée même si elle n'est pas au programme de sixième : certains avec du papier calque ont mis en évidence le demi-tour pour expliquer l'égalité des aires des petits triangles. Rien ne peut être rigoureusement justifié à leur niveau, mais des pistes sont évoquées et des écrits de recherche sont rédigés au brouillon. Pour noter

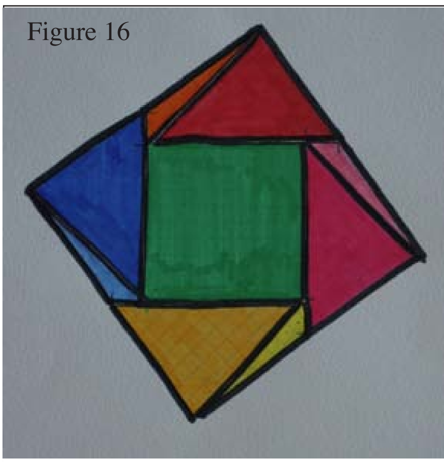


Figure 16

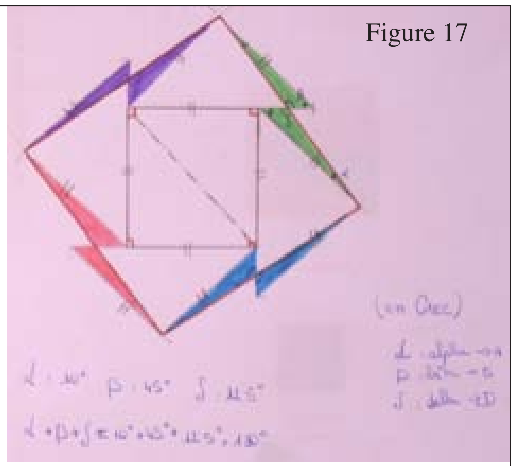


Figure 17

les angles, on utilise des lettres grecques. À cette occasion et à la demande des élèves, un « petit » alphabet sera fourni par l'enseignante de lettres classiques. Le débat de classe est vraiment riche et animé, tous participent activement pour que chacun finalise sa propre fiche avec tous les éléments traités et mis en commun.

B2. *Le travail de l'enseignant de Français*

Le dernier problème posé par la collègue de Mathématiques est une traduction française d'un texte arabe original (Xe siècle). S'il a la forme textuelle d'un énoncé médiéval, il ne correspond pas aux problèmes mathématiques habituellement donnés aux élèves de collège. En effet, il présente des particularités de récit que l'on tend à éviter aujourd'hui, notamment pour plus de clarté ou de rigueur scientifique. Il se présente avec de nombreux liens logiques, au sens parfois inconnu des élèves de sixième. Il mélange les temps de la conjugaison (présent/futur), enfin il présente des phrases longues et complexes d'un point de vue syntaxique.

Il n'offre donc pas un sens immédiatement perceptible et on sait combien il est important de ne pas laisser un élève sans outil devant un texte qui ne se révèle pas à première lecture, sous peine de laisser place au découragement. C'est donc à ce niveau que l'enseignante de lettres peut et même se doit d'intervenir. Il s'agit alors d'amener l'élève à lire et comprendre un texte dont le sens n'est pas donné et par conséquent à se demander quelles compétences de lecture mettre en œuvre, compétences qui sont ici essentiellement lexicales et syntaxiques.

Se déroulant en trois étapes principales, le travail en français a plusieurs objectifs relevant du programme de sixième et du socle commun de connaissances et de compétences [D3, p. 1-13] :

— Lire un texte court et le replacer dans un contexte,

— Déduire le sens de mots inconnus ou obscurs du contexte et plus généralement travailler sur un lexique spécifique,

— S'exprimer à l'oral par rapport à un texte,

— Découvrir la phrase complexe (subordonnées, antécédents ou référents de pronoms),

— Observer, identifier et manipuler des connecteurs,

— Ecrire un texte avec des contraintes d'écriture.

La première étape est nécessairement une ou plusieurs lectures silencieuses, seules lectures-compréhension et qui épousent le rythme de chacun (rythme très varié en sixième selon les élèves). La deuxième étape consiste en le repérage du vocabulaire mathématique, de la maîtrise duquel on s'assure, vocabulaire qui est ici assez simple paradoxalement. L'élève prend ainsi assez vite confiance et peut utiliser des couleurs pour souligner ces repères. La troisième étape, un peu plus complexe que les repérages lexicaux précédents, nous a fait faire un retour sur le contexte de ce problème, tel qu'il est proposé en introduction. Cela a été la tâche de l'enseignante de mettre en rapport ce texte et l'idée de savoir-faire de l'artisan. Il est donc proposé aux élèves de relever les verbes du texte en différenciant ceux qui relèvent de l'action, du « faire » de ceux qui expriment le résultat de ces actions.

Enfin, ce texte met en œuvre une syntaxe complexe pour un élève de sixième. Il s'agit donc de vérifier le sens et la valeur de liens logiques tel « alors » qui a ici un sens consécutif, tandis que les élèves privilégient toujours son sens temporel. Les pronoms personnels et relatifs sont aussi très présents. Il convient d'aider les élèves à repérer les référents ou antécédents de ces pronoms.

L'enseignant de français peut voir, dans ce travail interdisciplinaire, plusieurs intérêts pour sa propre discipline. La séance se déroulant en présence des deux professeurs, les élèves ont tout de suite l'intuition que des compétences dans les deux disciplines vont leur être demandées sur un même support : ici, c'est le Français au service des Mathématiques. Il est alors plus facile de leur montrer que cette démarche peut s'étendre à tous les textes.

C'est une lecture « en action », en surlignant, colorant des éléments du texte, voire en le découpant en différentes étapes. L'élève est donc comme un artisan, lui aussi avec des savoir-faire, face à un texte dont le sens n'apparaît pas à la première lecture, la lecture-découverte qui est souvent la seule que fait un élève de sixième. Il découvre ainsi la nécessité d'une lecture plus analytique pour laquelle il sait convoquer des savoirs. C'est au tour de l'enseignant de Mathématiques de profiter de ce travail pour les autres énoncés (définitions, problèmes, règles…) qui emplissent le cahier de Mathématiques.

Plusieurs prolongements ont été envisagés pour faciliter le passage à la narration des élèves de sixième : écrire un récit à partir de l'image d'un artisan au travail en incluant ce texte problème, écrire un récit du point de vue d'un scribe égyptien à partir de notes de la conférence (*cf*. annexe 3) ou encore écrire la biographie d'un mathématicien à partir de divers documents (*cf*. annexe 4).

B3. *Le travail de l'enseignant d'Histoire*

Concernant la contribution du professeur d'Histoire au projet, il a été nécessaire de trouver sa place, en particulier pour comprendre ce que cet enseignant pouvait apporter dans le cadre de sa discipline. Dans l'élan de la mise en place du nouveau programme, l'idée de lier Mathématiques et Histoire avait germé avant ce projet dans le cadre de travaux communs sur l'Histoire de la numération notamment. En outre, le programme d'Histoire de sixième, enrichi de l'Histoire des Arts, permettait d'ouvrir de nouveaux horizons. Plusieurs interrogations se sont alors posées : (1) définir l'intervention en classe une fois le sujet d'étude trouvé (comment l'intégrer dans la progression ? Comment procéder ? Avec quels documents ?....), (2) définir les compétences du socle à mobiliser, (3) chercher à intégrer le projet dans le cadre de l'Histoire des Arts et enfin, (4) réfléchir à la trace écrite des élèves.

Les premières séances de l'ERR ont permis de définir le sujet d'étude à partir du texte d'Abū l-Wafā' (*cf*. préambule historique). Si nous devions résumer ce projet en un titre, ce serait alors : « De l'ornementation à la géométrie... de l'artisan au géomètre… ». Ce sujet cherche donc à comprendre comment le savoir-faire des hommes a pu précéder ou impulser la recherche de la vérité scientifique.

Face à ce sujet et au texte de départ, la place de l'Histoire est apparue clairement puisqu'il a fallu remonter à la source des Mathématiques et se poser la question suivante : « Pourquoi les hommes ont-ils eu besoin de déchiffrer/comprendre le monde ? ». Il s'est donc agi, dans le cadre du programme d'Histoire de sixième qui s'étend de l'Antiquité aux débuts du Moyen-Âge, de trouver un angle d'approche cohérent en sachant que le texte d'Abū l-Wafā' est daté de la période médiévale.

La réalisation d'un diaporama a semblé la mise en œuvre la plus simple, permettant « d'ouvrir l'appétit » des élèves. Mais pour « accrocher les élèves », il était nécessaire d'avoir traité préalablement certaines parties du programme. Récapitulons brièvement la démarche qui a été privilégiée [D4] :

— Traiter la partie 1 d'Histoire :
  • La Mésopotamie dans le cadre de l'Orient ancien au IIIe millénaire avant J.C., ce qui permet d'évoquer la nécessité pour les hommes de savoir compter avant de savoir écrire.
— Traiter les deux premiers chapitres de la partie 2 de la civilisation grecque :
  • Aux origines du monde grec
  • La cité des Athéniens aux Ve-IVe siècles avant J.C.
— Profiter de la dernière leçon sur Alexandre le Grand et la « Grèce des savants » pour introduire le volet Histoire de ce projet : le diaporama « Comment les savants de l'antiquité et du Moyen Âge cherchent-ils à comprendre et à déchiffrer le monde ? »
— Faire travailler les élèves en autonomie sur la fiche d'activité (*cf*. annexe 5)

C'est donc au moment de traiter la « Grèce des savants » que le volet Histoire a pu se mettre en place. Sur une heure de cours d'Histoire et en présence du professeur de Mathématiques, le diaporama est projeté. L'enseignant se sert des documents pour tisser un lien entre les différentes civilisations qui profitent des découvertes des prédécesseurs pour les enrichir, les démontrer. Il a donc fallu expliquer les documents pour mettre en évidence leur relation. En outre, étant donnée la complexité de certaines périodes historiques, le professeur d'Histoire doit « zoomer » certains points, certains moments de l'Histoire, certains personnages. Tout dire, tout montrer n'est pas possible.

Le choix du diaporama pour le volet Histoire est très intéressant car cela a l'avantage de captiver un public souvent peu habitué à l'utilisation du vidéoprojecteur. Les documents visionnés, même si certains sont difficiles d'accès pour des élèves aussi jeunes, sont expliqués, animés parfois et cette intervention laisse une grande place aux réactions des élèves qui peuvent être interrogés sur la nature du document, son époque, l'auteur… mais qui peuvent également à tout moment interrompre l'enseignant pour poser des questions.

Dans le cadre de cet article et pour permettre à notre lecteur de s'approprier le matériel présenté, il est important de détailler les éléments que nous avons privilégiés lors de la préparation du diaporama. Après un rappel de la nécessité pour les hommes de maîtriser les quantités dès la Préhistoire et l'apport des civilisations orientales (Mésopotamie et la naissance de l'écriture au IVe millénaire avant J.C.), le diaporama s'articule autour de trois points essentiels :

1) Le début du raisonnement scientifique en prenant comme illustration une carte des espaces fortement influencés par la culture grecque (VIe-Ier siècles avant J.C.) sur laquelle sont localisés les grands savants et philosophes comme Ératosthène et Euclide. Le monde selon Eratosthène est aussi présenté [A].

2) La diffusion des savoirs scientifiques avec le rôle des hommes de pouvoir comme Alexandre le Grand. Une carte de ses conquêtes est exposée, puis un plan d'Alexandrie au IVe siècle avant J.C. et une représentation imaginaire de la Bibliothèque d'Alexandrie permettant de présenter la civilisation hellénistique [B]. Une carte des routes maritimes et terrestres du commerce au début du Moyen Âge, une carte du monde musulman au VIIIe siècle faisant ressortir Bagdad[5] sont extrêmement utiles pour comprendre la géographie du bassin méditerranéen, principale scène des échanges scientifiques. Un extrait du *Livre des Catégories des Nations*

5 Ici, nous sortons du programme de sixième, il faut donc expliquer, situer et répondre aux questions qui peuvent émerger.

de Sā^c^iḍ al-Andalusī (XIe siècle) montre le calife abbasside al-Ma'mūn et son goût prononcé pour les sciences, ce qui nous permet d'évoquer le rôle du mécénat dans le développement des sciences en pays d'Islam :

> *Le calife abbasside al-Mamoun s'occupa de rechercher la science là où elle se trouvait. Il entra en relation avec les empereurs de Byzance, leur fit de riches présents et les pria de lui faire don des livres de philosophie qu'ils avaient en leur possession. Les empereurs lui envoyèrent ceux des ouvrages de Platon, d'Aristote, de Galien, d'Euclide, de Ptolémée qu'ils détenaient. Al-Mamoun choisit alors des traducteurs; la traduction en ayant été faite, avec toute la perfection possible, le calife poussa ses sujets à les étudier.* [12, p. 100]

Enfin, une miniature d'al-Wāsilī (XIIIe siècle) d'une bibliothèque [C] et une copie d'un folio manuscrit présentant une traduction gréco-arabe du théorème dit « de Pythagore » [13, p. 74] nous offre l'occasion de montrer le rôle des traductions d'une tradition scientifique à une autre dans la diffusion des savoirs et pratiques scientifiques.

3) La vérité scientifique ou l'esthétique ? Pour apporter des éléments de réponse à cette question, nous avons choisi des reproductions de l'observatoire de Gralata au XVIe siècle [D], la carte du monde selon le géographe al-Idrīsī [E], un *hadith* [parole du prophète] interdisant la représentation humaine accompagnant des photographies de palais arabo-musulmans, comme l'*Alhambra* de Grenade par exemple, et de mosquées où la décoration est massivement géométrique : « Gardez-vous de représenter le Seigneur ou la créature ; ne peignez que les arbres, les fleurs, les objets inanimés » [14, p. 17]. Nous terminons avec une photographie d'aujourd'hui montrant un artisan au travail, avec ses outils pour réaliser des mosaïques de décoration en faisant remarquer l'absence d'ouvrages et d'instruments mathématiques qui permet de commenter l'extrait du texte d'Abū l-Wafā' (cité précédemment).

Pour garder une mémoire de cette présentation, il est nécessaire de fournir une trace écrite aux élèves. Nous avons choisi de lui donner la forme d'une fiche que les élèves doivent compléter seuls ou en groupe en effectuant éventuellement quelques recherches (*cf.* annexe 5).

Cette démarche en Histoire permet de valider plusieurs des compétences du socle commun de connaissances et de compétences notamment les items correspondant à la culture humaniste. Les compétences sociales et civiques peuvent aussi faire l'objet d'une validation dans le cadre d'un comportement responsable pour comprendre l'importance du respect mutuel et accepter toutes les différences.

Le bilan est là-encore très positif. En particulier, pour les élèves, cela a nettement éveillé leur curiosité quant au rôle des philosophes, des savants et à la puissance scientifique et culturelle des pays d'Islam, ce qui est au programme de cinquième.

B4. *Conclusion*

Ce travail, mené en interdisciplinarité, a permis d'abord d'éveiller la curiosité des élèves à la fois à partir de problèmes anciens, de démarches concrètes et de textes historiques originaux d'accès *a priori* complexe. Notre démarche s'est appuyée sur la spontanéité et la fraîcheur d'élèves de sixième sans qu'ils se posent de questions parasites sur le bien-fondé des différents travaux proposés. Au contraire chacun, selon son niveau, ses difficultés, ses compétences, s'est senti concerné par sa tâche au sein de son binôme, puis a bénéficié des échanges au sein de la classe.

Certains sont allés au-delà de la demande et ont pris l'initiative de créer des dossiers – travail qui dépasse la simple compilation – avec des titres, un sommaire, une classification, des couleurs, des illustrations… ce travail a été mené en autonomie, à la maison.

Cette interdisciplinarité a permis d'aller plus loin dans l'étude d'un texte ancien, expérience riche qui a consisté à se confronter à un texte dont le sens se dérobe à une première lecture (lexique, syntaxe anciens ou obscurs) et qui se révèle progressivement grâce à diverses démarches (relevés de champs lexicaux, précisions syntaxiques…) De plus, ce sens dévoilé a débouché sur une démarche et des instructions concrètes (dessins, découpages).

Enfin ces travaux ont sensibilisé les élèves à des méthodes et des savoirs dont ils ont compris la cohérence – l'exemple le plus simple en est l'utilisation à leur demande de lettres grecques pour noter les angles. Le texte problème s'est inscrit dans l'Histoire et la chronologie puis dans une démarche de langue qui relève pour eux du cours de Français dont ils ont dû convoquer les acquis spécifiques. De plus, grâce à la conférence de Marc Moyon, le lien a été fait entre l'artisan et le géomètre et a permis d'aborder l'idée de pavage et de décors donc la notion de Beau qui aurait pu trouver un prolongement en Histoire des arts (étude de pavages en peinture et architecture, l'*École d'Athènes* de Raphaël, les figures de savants astronomes-mathématiciens-poètes…) Et c'est sans doute toute la richesse d'un tel travail interdisciplinaire de ne pas avoir épuisé les envies des élèves et les perspectives possibles des enseignants !

C. — Couper les triangles en deux et les quadrilatères en quatre. Des activités mathématiques et informatiques en cinquième (12-13 ans).

Dans cette dernière partie, l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques se présente sous une forme bien différente du projet interdisciplinaire précédent. En effet, l'Histoire des Mathématiques intervient ici davantage au niveau de la formation des collègues engagés dans l'ERR « Histoire des mathématiques au collège » qu'au niveau d'une mise en place effective en classe.

Grâce à la lecture de deux articles d'Histoire des Mathématiques [1, 3], nous avons décidé de mettre en place en cinquième deux séances de Mathématiques illustrant l'Histoire de la géométrie euclidienne (propriétés élémentaires et partage de figures planes) en privilégiant une démarche de recherche et l'exploitation d'un logiciel de géométrie dynamique. Ces deux activités s'appuient sur le paragraphe ci-dessous des instructions officielles [D1, p. 24, p. 26] :

3.1 Figures planes (…) Médianes et hauteurs d'un triangle.	— Connaître et utiliser la définition d'une médiane (…) d'un triangle.	Ces notions sont à relier au travail sur l'aire d'un triangle. La démonstration des propriétés de concours n'est pas envisageable en classe de cinquième. (…)

4.3 Aires Parallélogramme, triangle	— Calculer l'aire d'un parallélogramme — Calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur associée.	La formule de l'aire du parallélogramme est déduite de celle de l'aire du rectangle. Le fait que chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire est justifié.

L'activité « partage d'un triangle »

C'est en réalité la notion d'aire, qui est au cœur du programme de la classe de cinquième, qui a retenu notre attention. C'est bien cette notion qui est centrale dans la première activité « Partage d'un triangle » (*cf*. annexe 6). Nous nous sommes arrêtés sur la propriété de la médiane qui partage un triangle en deux triangles de même aire avec les propositions 37 et 38 du Livre I des *Éléments* d'Euclide [6] sous-jacentes dans la démonstration de ladite propriété. L'idée a été de construire une activité dans laquelle une première partie permettrait aux élèves de démontrer les deux propositions des *Éléments* puis une deuxième partie où il leur faudrait réinvestir ce résultat pour justifier le partage équitable d'un terrain triangulaire.

Aussi avons-nous voulu privilégier une démarche expérimentale sur différentes figures et, pour cela, l'outil informatique nous a paru bien adapté et conforme aux exigences du programme :

> *Les travaux de géométrie plane prennent toujours appui sur des figures dessinées, suivant les cas, à main levée, à l'aide des instruments de dessin et de mesure, ou dans un environnement informatique. Ils sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques. Les diverses activités de géométrie habituent les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettent progressivement de s'entraîner à des justifications mettant en œuvre les outils du programme et ceux déjà acquis en classe de 6ème*. [D1, p. 23]

Enfin, nous avons complété la fiche d'activité avec une introduction présentant brièvement le cadre historique des problèmes proposés (*cf*. annexe 6).

L'activité « Partage d'un triangle », prévue en une heure, est réalisée en salle informatique en binôme (par nécessité vu le nombre d'élèves et de postes informatiques). En prérequis, les élèves doivent connaître la formule de l'aire d'un triangle et être familiarisés avec l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique. Ici, c'est le logiciel libre Geogebra qui a été utilisé. Nos objectifs sont triples : d'abord, appliquer un programme de construction avec un logiciel de géométrie, puis calculer et comparer des aires et enfin rédiger une petite séquence déductive.

Tous les élèves constatent que la mesure de l'aire reste la même. Ensuite, de nombreux élèves n'utilisent pas $[AH]$ comme hauteur et tracent spontanément la hauteur issue de M_1 puis celle issue d'un nouveau point M_2. Si l'écriture littérale de l'aire du triangle ABC ne pose pas de problème, beaucoup ont du mal à conclure avec deux expressions égales qui s'écriraient $A_{AM_1B} = \dfrac{AB \times M_1N_1}{2}$ et $A_{AM_2B} = \dfrac{AB \times M_2N_2}{2}$.
Il faut alors les guider pour faire intervenir la longueur de la hauteur $[AH]$ commune aux triangles ABM de base $[AB]$, pour tout point M de (d). La synthèse de cette expérimentation permet de revenir sur les énoncés de la proposition 37 du Livre I des *Éléments* d'Euclide et, par extension, de la 38 du même livre.

Dans la partie « application » de l'activité, alors que la figure dynamique permet à une grande majorité d'élèves de placer le milieu de $[RE]$ et tracer la médiane (terme enco-

6 Proposition I. 37 : « Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux. », [9, vol. 1, p. 264].
Proposition I. 38 : « Les triangles qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles, sont égaux entre eux. », [9, vol. 1, p. 265].

re inconnu pour eux), la démonstration de la justesse de cette construction est difficile. En particulier, à notre grande surprise, les élèves ne font pas le lien entre la figure obtenue et les énoncés des propositions des *Éléments* d'Euclide vus précédemment. La lecture de l'introduction historique se révèle alors vraiment importante et amène la majorité des élèves à tracer la parallèle à (ER) passant par P. La synthèse de cette activité est alors réalisée au début du cours suivant. Elle nous a permis de rédiger une trace écrite correspondant à la définition de la médiane d'un triangle et la propriété d'équipartition de ladite figure. C'est aussi l'occasion de débattre de l'existence éventuelle de plusieurs solutions du problème posé et donc de l'existence des trois médianes d'un triangle.

L'activité « un quadrilatère en quatre ! »

En voulant prolonger ce travail pour nous permettre de réinvestir la propriété des médianes, nous avons découvert, dans de nombreux manuels scolaires de cinquième, la présence de plusieurs exercices et activités centrés sur la division de triangles ou de quadrilatères. Dans la plupart des manuels consultés, nous avons alors pu regretter, pour les enseignants et élèves lecteurs, l'absence de présentation historique de ces problèmes. Néanmoins, notre attention a été retenue par une activité informatique proposant une division de quadrilatère [D5, p. 251] dont nous nous sommes librement inspirés pour créer un travail pratique, à nouveau en salle informatique et en binôme (*cf*. annexe 7). Outre la manipulation du logiciel de géométrie pour réaliser une figure plus complexe, nos objectifs sont ici de reconnaître et utiliser la propriété de la médiane d'un triangle, penser à la somme des aires en aidant éventuellement les élèves en difficulté, formuler une conjecture et rédiger une séquence déductive.

Comme dans le cas de l'activité « partage de triangle », la partie expérimentale est réussie par l'ensemble des élèves. Les difficultés apparaissent au moment de rédiger la démonstration où les demandes d'aide sont importantes même si nous avions déjà travaillé, à plusieurs reprises, la rédaction de séquences déductives.

Conclusion

Globalement, grâce aux séances de travail de l'ERR, nous avons facilement pu mettre en place des activités en cinquième pour aborder une notion du programme sous un angle différent par rapport aux années précédentes. Surtout, les lectures, les recherches et les réflexions au sein de l'équipe nous ont permis de nous former, autant que faire se peut, à l'Histoire des Mathématiques et à son introduction dans l'enseignement des Mathématiques. La transmission du savoir de l'enseignant à ses élèves s'en est trouvée facilitée grâce à une approche originale qui a semblé répondre à l'une des principales attentes des élèves : l'utilité des mathématiques.

D. — Conclusion générale.

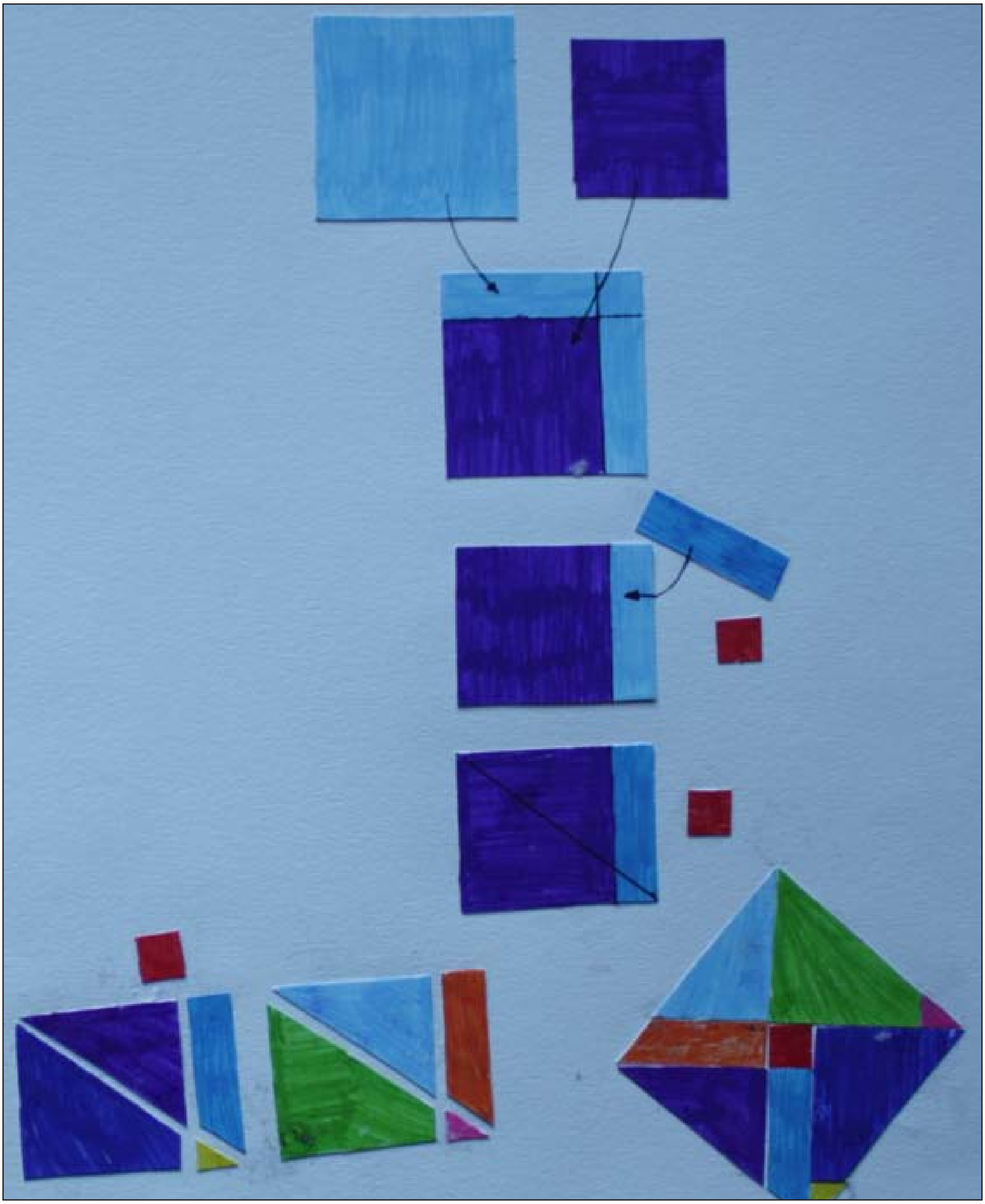
Pour les enseignants de l'ERR « Histoire des Mathématiques au collège », la découverte de nouveaux épisodes de l'Histoire des Mathématiques a permis aux uns de revisiter la discipline qu'ils enseignent depuis plusieurs années et aux autres de penser leur propre discipline (Histoire et Français) en écho avec les travaux réalisés en classe de Mathématiques.

Notre présentation conjointe de la mise en place en classe de plusieurs activités géométriques et d'éléments de réflexions menées au sein de notre groupe IREM illustre modestement ce que peut être l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques. Comme les travaux de la CII « épistémologie et histoire des mathématiques » l'ont développé et continuent à le démontrer [15] : ladite introduction, moteur d'interdisciplinarité, peut prendre plusieurs formes et intervient tant au niveau des élèves, c'est-à-dire en classe, que pour permettre, en amont, une meilleure réflexion de l'enseignant sur l'objet ou la notion à enseigner. Ne nous en privons pas !

Table des annexes

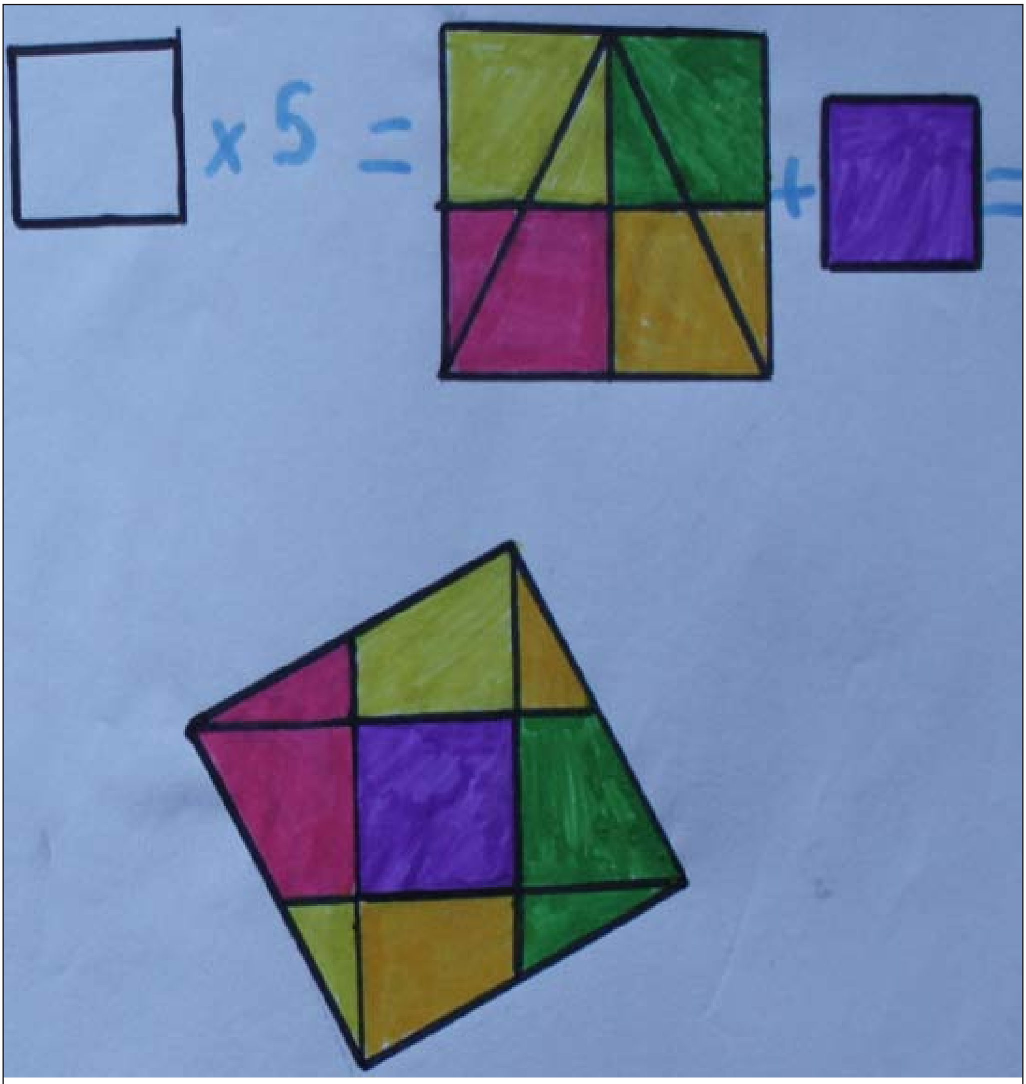
Construction d'un carré à partir de 2 carrés différents.

ANNEXE 1a



ANNEXE 1b

Construction d'un carré à partir de 5 carrés égaux.



ANNEXE 2a

Un élément d'ornementation avec trois carrés identiques

Un élément d'ornementation avec **trois** carrés identiques...

Exemple emprunté au ***Kitâb fimâ yahtâju ilayhi as-sani min a mal al-handasa*** (livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques) d'**Abû l-Wafâ'**.

Le problème est le suivant: **il s'agit de construire un carré à partir du découpage de trois carrés identiques**. De nombreux artisans décorateurs des pays d'Islam ont utilisé cet élément d'ornementation.

Voici la traduction par **Ahmed Djebbar** d'un texte du livre cité ci-dessus.

« Nous divisons deux carrés en deux moitiés selon les diamètres, et nous appliquons chacune d'elles à l'un des côtés du troisième carré, en mettant l'angle demi droit de chaque triangle sur l'un des angles du carré et sa diagonale sur le côté du carré. Alors une partie du triangle dépasse du côté de l'autre angle du carré. Puis nous joignons les angles droits des triangles à l'aide de lignes droites. Ce sera le côté du carré cherché. Alors, de chaque grand triangle, se sépare un petit triangle que nous coupons et que nous déplaçons vers le triangle apparaissant sur l'autre côté. »

Travail en binômes

Consignes:

Vous avez ci-dessus deux documents à exploiter: un **texte** et une **photo**

A partir de ces deux éléments d'information:

- Faire à l'aide de papier quadrillé, le tracé, le découpage et le montage du puzzle pour obtenir le carré final à partir des trois carrés identiques.
- Construire sur papier blanc les différents éléments de la figure en faisant apparaître le carré reconstitué .

ANNEXE 2b

Un élément d'ornementation avec trois carrés identiques

Un élément d'ornementation avec trois carrés identiques

Le problème est le suivant : il s'agit de construire un carré à partir du découpage de trois carrés identiques.

De nombreux artisans décorateurs des pays d'Islam ont utilisé cet élément d'ornementation.

Voici une traduction d'un extrait du livre le **Kitâb fimâ yahtâju ilayhi as-sani min a mal al-handasa d'Abû l-Wafâ' :**

« Nous divisons deux carrés en deux moitiés selon les diamètres et nous appliquons chacune d'elles à l'un des côtés du troisième carré, en mettant l'angle demi-droit de [chaque] triangle sur l'un des angles du carré et sa diagonale sur le côté [du carré]. Alors une partie du triangle dépasse du côté de l'autre angle [du carré]. Puis nous joignons les angles droits des triangles à l'aide de lignes droites. Ce sera le côté du carré cherché. Alors de chaque grand triangle, se sépare un petit triangle que nous coupons et que nous déplaçons vers le triangle apparaissant sur l'autre côté. »

1°) Je relis ce texte plusieurs fois.

2°) Dans la version ci-dessous du texte, je surligne de deux couleurs différentes les verbes d'action (les actions que j'aurai à accomplir ensuite) et les verbes qui indiquent le résultat de ces actions.

3°) J'encadre tous les mots du vocabulaire – le professeur de Français dit du champ lexical – des outils mathématiques.

4°) Ce texte est un texte ancien : certains mots doivent être modernisés, dites lesquels et faites les corrections dans l'interligne.

Voici les différentes étapes de ce texte. Je les complète en rétablissant les connecteurs et les repères de progression du texte dans les pointillés et en inscrivant sous le pronom personnel « elles » le nom qu'il remplace.

« Nous divisons deux carrés en deux moitiés selon les diamètres

... nous appliquons chacune d'**elles** à l'un des côtés du troisième carré,

en mettant l'angle demi-droit de [chaque] triangle sur l'un des angles du carré et sa diagonale sur le côté [du carré].

... une partie du triangle dépasse du côté de l'autre angle [du carré].

... nous joignons les angles droits des triangles à l'aide de lignes droites. Ce sera le côté du carré cherché.

... de chaque grand triangle, se sépare un petit triangle

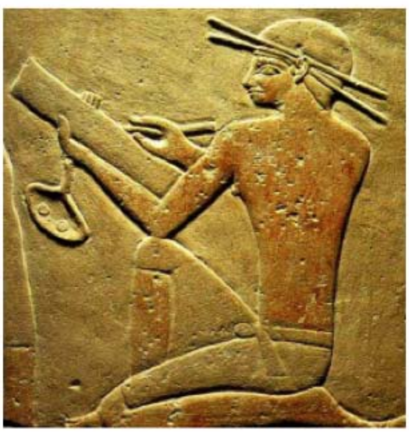
... nous coupons

... nous déplaçons vers le triangle apparaissant sur l'autre côté. »

Le scribe

ANNEXE 3

Imaginez qu'avec les yeux de ce scribe et ses outils, vous alliez écrire un récit à partir de trois éléments que vous relèverez dans la conférence de Marc Moyon



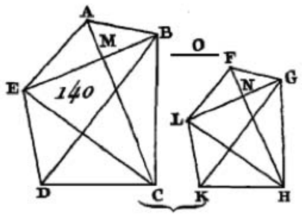
ANNEXE 4

La biographie d'Euclide

Biographie d'Euclide

Voici une série de documents qui serviront d'illustration à une biographie d'Euclide. En les utilisant dans l'ordre de votre choix, en notant leurs références (date, nature, titre…), insérez- les dans un texte rédigé.

Les *Éléments (fragment manuscrit)*



Les *Éléments* d'Euclide
(Livre VI proposition XX)

L'Empire d'Alexandre le Grand en 323

Euclide (?) *(bas-relief)*

Euclide *(détail de* l'Ecole d'Athènes *de Raphaël)*

Pourquoi les hommes ont-ils eu besoin de déchiffrer/comprendre le monde ?

ANNEXE 5

POURQUOI LES HOMMES ONT-ILS EU BESOIN DE DÉCHIFFRER/COMPRENDRE LE MONDE ?

Tablette de comptabilité en argile,Mésopotamie vers 2350 av. J.C, Musée du Louvre

Quel usage les hommes font-ils de ces tablettes d'argile ?

....

....

....

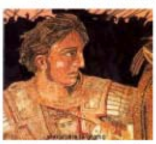
Euclide

Erastosthène

Grâce à ces deux savants, que permettent les Mathématiques et plus particulièrement la géométrie ?

....

....



Mosaïque du Ier siècle, bataille d'Arbèles

Qui joua un rôle dans la diffusion des savoirs scientifiques ? Donne l'exemple du personnage représenté sur la mosaïque.

....

....

Quel espace géographique s'est trouvé au coeur de la diffusion des savoirs ? A partir de quel siècle ?

....

....

....

> J'ai assisté à une réunion où il y avait un groupe d'artisans et de géomètres qui ont été interrogés sur la construction d'un carré à l'aide de trois carrés.
> Le géomètre, lui, a déterminé facilement une ligne en puissance de trois carrés. Mais aucun des artisans n'était satisfait de ce qu'il avait fait, <parce que> l'artisan veut diviser ces carrés en parties à l'aide desquelles il compose un seul carré (...).
> Quant aux artisans, ils ont présenté plusieurs méthodes. Certaines d'entre elles avaient une démonstration et d'autres étaient fausses, sauf que celles qui n'avaient pas de démonstration étaient, de visu, proches de l'exactitude, ce qui faisait penser à celui qui les observaient qu'elles étaient exactes.
> Abû l-Wafâ', *Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en science de la géométrie*

Pour Abu l-Wafa, ce qui est beau à l'oeil est-il être vrai géométriquement ?

....

....

ANNEXE 6

Partage d'un triangle

5ème	Partage d'un triangle	TP informatique

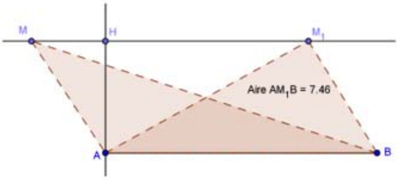
Introduction historique : (par Marc Moyon)

Les problèmes de partage, de découpage ou de division de champs ou de terrains sont très anciens. On raconte même que ce serait l'origine de la *géométrie* (mesure de la terre). De nombreux savants ont résolu ce genre de problèmes géométriques au moins depuis l'époque paléo-babylonienne en Mésopotamie, puis dans l'Antiquité grecque, dans les Pays d'Islam et même encore à la Renaissance européenne du 16e siècle. Parmi ces savants, Euclide d'Alexandrie est particulièrement célèbre car son œuvre qui contient plus de 10 livres, *les Eléments*, a circulé dans le Monde entier et à toutes les époques. Avec l'invention de l'imprimerie, ce sera le deuxième ouvrage le plus édité après la *Bible*.
Les exercices qui vous sont proposés aujourd'hui se résolvent facilement à condition de connaître quelques uns des résultats de ce livre. Par exemple, dans le premier livre, on peut lire « *les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux* » ou encore « *les triangles qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles, sont égaux entre eux* ». Saurez-vous utiliser ces deux propriétés géométriques ?

I. Eléments d'Euclide :

1) Expérimentation avec un logiciel de géométrie :
Ouvrir une feuille de travail Géogebra puis effectuer le programme de construction suivant :

Tracer un segment [AB].
Tracer la droite perpendiculaire à [AB] passant par A.
Placer un point H sur cette droite.
Tracer la droite (d) parallèle à [AB] passant par H.
Placer un point M sur (d) et créer le triangle ABM (outil *polygone*).
Faire afficher son aire.
Déplacer M sur (d) ; que constate-t-on ?

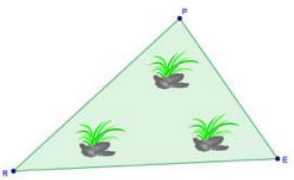


2) Démonstration :

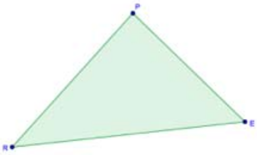
II. Application :

Un agriculteur possède un champ représenté par le triangle PRE.
Il souhaite le partager en deux triangles de même aire pour les donner à ses deux fils.

1) A l'aide du logiciel, faire des essais et proposer une solution :



2) Construire le partage trouvé sur la figure ci-dessous et démontrer que les deux triangles ont la même aire.



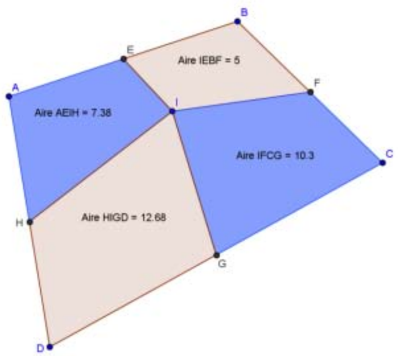
3) Synthèse :

Un quadrilatère en quatre

ANNEXE 7

5$^{\text{ème}}$	**Un quadrilatère en quatre !**	**TP informatique**

Partie I : Expérimentation



1) Construire un quadrilatère ABCD quelconque (outil *polygone*).

2) Placer les points E, F, G et H milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

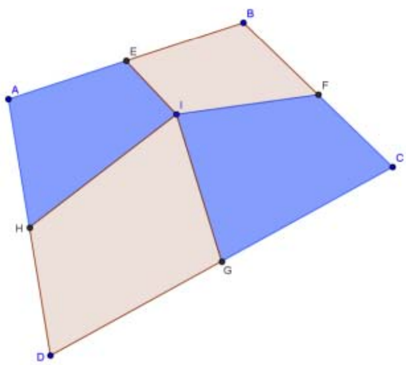
3) Placer un point I à l'intérieur de ce quadrilatère et créer les quatre quadrilatères IHAE, IEBF, IFCG et IGDH. Les colorer comme sur la figure ci-contre.

4) Faire afficher les aires de ces quatre quadrilatères.

5) Considérer les aires des quadrilatères IHAE et IFCG d'une part puis les aires des quadrilatères IEBF et IGDH d'autre part. Que remarque-t-on ?

6) Refaire les calculs de la question 5) pour différentes positions du point I à l'intérieur du quadrilatère ABCD. Quelle observation peut-on faire ?

Partie II : Démonstration



Sur la figure ci-contre, tracer les segments [IA], [IB], [IC] et [ID].

1) En travaillant dans le triangle AIB, que peut-on en déduire pour les triangles AIE et BIE ? Justifier.

2) En travaillant comme à la question 1) sur les triangles BIC, CID et DIA, prouver la conjecture formulée dans la première partie.

Éléments de bibliographie

[1] M. Moyon, « La division des figures planes comme source de problèmes pour l'enseignement de la géométrie », in *Actes de la Rencontre des IREM du Grand Ouest et de la réunion de la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques*, J.-P. Escofier et G. Hamon (éds). Rennes: IREM de Rennes - Université de Rennes 1, 2009, p. 71-86.

[2] M. Moyon, « Practical Geometries in Islamic Countries : the example of the division of plane figures », in *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 6th European Summer University (Vienne, 19-23 juillet 2010)*, M. Kronfellener, É. Barbin, et C. Tzanakis (éds). Vienne: Verlag Holzhausen GmbH, 2011, p. 527-538.

[3] M. Moyon, « Diviser un triangle au Moyen Âge : l'exemple des géométries pratiques latines », in *Les mathématiques éclairées par l'histoire, Des arpenteurs aux ingénieurs*, É. Barbin (éd.). Paris: Vuibert Adapt, 2012, p. 73-90.

[4] C. Proust, « Problèmes de partage : des cadastres à l'arithmétique », *CultureMath, site expert des Écoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Éducation Nationale*. http://www.math.ens.fr/culturemath/index.html [consulté le 03 février 2012].

[5] R. Rashed, *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. Paris: Blanchard, 2007.

[6] Abū-l-Wafā' al-Būzjānī, *Kitāb fī mā yahtāju ilayhi as-sani^c min a^{c}māl al-handasa [Livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques]*. Bagdad: Imprimerie de Bagdad, 1979.

[7] A. Djebbar, *Textes géométriques arabes (IX^e-XV^e siècles)*. Dijon: IREM de Dijon, 2009.

[8] al-Karajī, *Al-Kafī fī l-hisāb [Le livre suffisant en calcul]*. Alep: Institut d'Histoire des Sciences Arabes, 1986.

[9] Euclide, *Les Éléments*. Traduit par B. Vitrac. Paris: Presses Universitaires de France, 1990.

[10] B. Boncompagni, *La practica geometriae di Leonardo Pisano*. Rome: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1862.

[11] M. Bernus-Taylor, *Les Andalousies. De Damas à Cordoue*. Paris: Édition Hazan, Institut du Monde Arabe, 2000.

[12] Sā^{c}id al-Andalusī, *Kitāb tabakat al-umam [Livre des catégories des nations]*. Paris: Larose éditeurs, 1935.

[13] A. Djebbar, *L'âge d'or des sciences arabes*. Paris: Institut du Monde Arabe, 2006.

[14] J.-F. Clément, « L'image dans le Monde Arabe. Interdits et Possibilités », *Annuaire de l'Afrique du Nord*, vol. 32, p. 11-42, 1993.

[15]É. Barbin, « Épistémologie et histoire dans la formation mathématique », *Repères-IREM*, nº 80, p. 74-86, 2010.

Documents pédagogiques & instructions officielles :

[D1] BO n°6 du 28 août 2008, Mathématiques, préambule pour le collège.

[D2] *Document ressource pour le socle commun dans l'enseignement des mathématiques au collège*, Mai 2011, DEGESCO.

[D3] BO n°6 du 28 août 2008, Français.

[D4] BO spécial n°6 du 28 août 2008 (Histoire) , voir les différents thèmes sur http://eduscol.education.fr/cid49683/ressources-pour-classe-sixieme.html [consulté le 06 février 2013]

[D5] *Myriade Mathématiques 5e*, Paris, Bordas, 2010.

Documents iconographiques :

[A] « Carte des terres émergées selon Eratosthène » (IIIe-IIe siècles avant J.C.), disponible sur http://expositions.bnf.fr/globes/bornes/itz/22/05.htm [consulté le 06 février 2013]

[B] Documents disponibles sur http://hgcollege.editions-bordas.fr/eleve/webfm_send/253 [consulté le 06 février 2013].

[C] Miniature « une bibliothèque à Bassora », extraite d'al-Hariri, *Al-Maqāmāt* [Les Séances], copié et peint par al-Wāsilī à Bagdad, 1236, Paris, BnF, ms. Arabe 5847. Disponible sur http://classes.bnf.fr/dossitsm/islam.htm [consulté le 31 janvier 2013].

[D] Page du *Shāhinshāh nameh* montrant des astronomes effectuant des mesures avec différents instruments, Istanbul, University Library, T.Y. 1404. Disponible sur :
http://www.qantara-med.org/qantara4/public/show_document.php?do_id=1217&lang=en [consulté le 01/02/2013]

[E] Planisphère d'al-Idrīsī, Oxford, The Bodleian Library (Ms. Pococke 375 fol. 3v-4). Disponible sur http://classes.bnf.fr/idrisi/grand/9_05.htm [consulté le 31 janvier 2013]