THEORIE INTUITIVE DES OPERATEURS EN MASTER 1

Benoît RITTAUD
Université Paris 13,
Sorbonne Paris Cité
LAGA, CNRS, UMR 7539

Résumé : En Master 1, l'enseignement de l'analyse fonctionnelle s'appuie sur l'algèbre linéaire mais pas sur l'algèbre matricielle, la dimension des espaces considérés (les espaces fonctionnels) étant infinie. Nous nous penchons sur la possibilité d'une utilisation intuitive de l'algèbre matricielle comme marchepied à la théorie des opérateurs, en considérant le cas du spectre d'une rotation. Nous présentons les résultats d'une première expérience menée avec des étudiants en début de Master.

L'utilisation de situations problème ne se rencontre guère au-delà d'un certain niveau curriculaire, principalement sans doute parce que l'on estime que les étudiants sont alors suffisamment avancés pour ne plus avoir besoin d'une quelconque activité préliminaire à la construction du savoir. L'expérience montre pourtant que, même au niveau des cycles supérieurs de l'Université, nombreux sont les étudiants qui éprouvent des difficultés à faire vivre leurs acquis hors d'une exploitation purement technique.

L'objet du présent article est de proposer une ébauche de ce que pourrait être une situation problème adaptée à un niveau élevé d'enseignement, concernant un sujet curriculairement non neutre, c'est-à-dire qui ne peut être étudié sans un bagage mathématique solide (algèbre linéaire générale et fonctions d'une variable réelle). L'objectif est de conduire l'étudiant à utiliser ce qu'il connaît de l'algèbre matricielle pour se forger une première représentation de la théorie des opérateurs. Divers chemins peuvent être suivis selon cette idée de départ, selon que l'objectif est d'introduire la théorie spectrale, l'analyse hilbertienne, la théorie ergodique, ou autre. Parmi ces diverses possibilités, nous avons retenu celle de la détermination du spectre d'une rotation irrationnelle sur le cercle. Celle-ci constitue en principe un résultat nouveau pour les étudiants et illustre un succès de l'extension intuitive de l'algèbre matricielle ordinaire au cas fonctionnel.

La première section de cet article introduit le cadre dans lequel il se situe. La seconde section revient sur les éléments mathématiques sous-jacents, ainsi que la présentation intuitive proposée dans l'expérience, avec quelques pistes de développements possibles dans des directions qui restent à explorer. La troisième section rend compte d'une expérimentation menée avec des étudiants en début de Master 1 de mathématiques. Enfin, une dernière section rassemble les conclusions obtenues.

I. — Introduction

En Licence de mathématiques, l'un des objectifs les plus importants du programme d'algèbre linéaire est la réduction des endomorphismes de $\mathbf{K}^d$, l'espace vectoriel de dimension d sur le corps $\mathbf{K}$ (qui, dans la presque totalité des cas, est le corps $\mathbf{R}$ des réels ou le corps $\mathbf{C}$ des complexes). La correspondance entre matrices et endomorphismes de $\mathbf{K}^d$, *via* le choix d'une base, conduit assez naturellement à se représenter un endomorphisme, objet abstrait, par un plus concret tableau de nombres. Réduire un endomorphisme, c'est-à-dire, dans le cas le plus favorable, en trouver une base de vecteurs propres revient, dans cette perspective, à diagonaliser la matrice correspondante. Notons que le vocabulaire lui-même ne manque pas d'avoir recours à une représentation visuelle du travail à mener. (Pour une étude didactique de l'enseignement de l'algèbre linéaire, voir [1].)

En théorie des opérateurs, l'espace vectoriel de référence n'est plus $\mathbf{K}^d$ mais un espace de dimension infinie qui, entre autres exemples, peut être celui des fonctions continues de [0, 1] dans $\mathbf{R}$, des fonctions mesurables, ou encore des fonctions de carré sommable. Un opérateur est une application linéaire continue d'un tel espace. Parce que le cadre est désormais celui de la dimension infinie, il n'est naturellement plus possible de se contenter de l'algèbre matricielle, ni même de l'algèbre tout court, pour les étudier : les incontournables questions de limite, de continuité et de densité imposent de faire la part belle à l'analyse. Voilà sans doute pourquoi, en pratique, les acquis les plus « visuels » de l'algèbre linéaire sont peu réinvestis pour approcher la théorie des opérateurs. Pour l'essentiel, seules les définitions très générales (espace vectoriel, application linéaire, noyau) y sont considérées comme pertinentes ; la représentation matricielle en revanche, pourtant acquise au prix de tant d'efforts par les étudiants de début de Licence, n'y a plus droit de cité.

> *Quelques rappels*
>
> Par opérateur on entend une application linéaire d'un espace de fonctions, dans lui-même ou dans un autre espace de fonctions. (En général, un opérateur est aussi supposé continu, mais nous n'aurons pas à nous en soucier ici.) Un exemple simple est l'opérateur de dérivation, qui associe à toute fonction dérivable f sa dérivée f'. Les propriétés classiques de linéarité ($(f + g)' = f' + g'$ et $(\lambda f)' = \lambda f'$) montrent que cet opérateur est bien linéaire. Résoudre l'équation différentielle $f' = f$, c'est chercher le sous-espace propre de l'opérateur de dérivation associé à la valeur propre 1 ; il est connu que ce sous-espace est engendré par la fonction $f(x) = e^x$.

Notons, même si ce n'est pas ici notre sujet, que la situation est différente pour ce qui concerne les ramifications analytiques de l'algèbre *bilinéaire*, dans lesquelles l'interprétation géométrique est même gravée dans le vocabulaire (« base orthonormée », « produit scalaire »…). Par exemple, le dessin qui illustre le théorème d'unicité de la projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert, ou la référence à Pythagore au sujet de l'identité de Bessel-Parseval, sont des instruments couramment utilisés, qui montrent bien combien, parfois, la dimension finie constitue un outil commode pour figurer concrètement telle ou telle situation d'un espace fonctionnel, bien que celui-ci soit de dimension infinie.

La transition de l'algèbre linéaire en dimension finie à la théorie des opérateurs en dimension infinie impose le passage à une infinité (dénombrable ou non) de composantes qui est une difficulté en soi. On peut, avec les réserves d'usage, la rapprocher de celle du passage de la dimension 3 à la dimension 4 : dans les deux cas en effet, alors même que le formalisme général ne change guère (quatre paramètres au lieu de trois, des coordonnées indicées par un ensemble infini au lieu d'un ensemble fini) mais fait perdre à l'étudiant un élément important de représentation concrète (la géométrie, la liste exhaustive explicite des composantes). Cette difficulté dans la représentation des espaces de l'analyse fonctionnelle me semble devoir être levée préalablement à l'évocation des considérations plus fines de convergence ou de non-équivalence des normes, ces dernières impliquant la résolution de questions qui n'ont pas d'équivalent en dimension finie.

II. — Cadre mathématique

Nous nous plaçons une fois pour toutes dans l'espace vectoriel F (sur $\mathbf{R}$) des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ « suffisamment régulières », c'est-à-dire que nous ne nous intéressons pas à la détermination précise des hypothèses nécessaires pour que les expressions qui suivent convergent. Ce flou volontaire, tout à fait licite s'agissant d'une première approche, est destiné à ne pas diluer dans trop de considérations analytiques notre présentation algébrique intuitive. Par *opérateur* l'on entend un endomorphisme de F. A nouveau, pour les mêmes raisons, nous mettons délibérément de côté la question de la continuité des opérateurs.

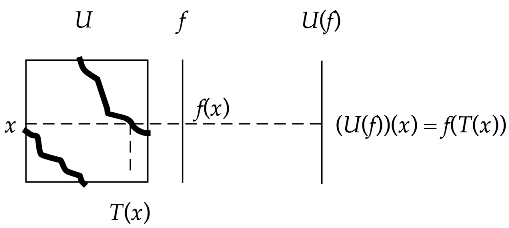
II.1. *Opérateur issu d'une transformation*

Une façon simple de définir un opérateur U consiste à choisir au préalable une application T de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, puis à définir U comme l'opérateur qui à toute fonction f de F associe la fonction $f_\circ T$ (la composée de f et de T). Signalons que ce procédé est la première pierre qui fonde le lien entre la théorie des opérateurs et celle des systèmes dynamiques, c'est-à-dire l'étude des propriétés asymptotiques de la transformation T (comme la structure des orbites, c'est-à-dire des ensembles de la forme $\{T^n(x), n \in \mathbf{N}\}$). Sans entrer dans les détails, indiquons que, d'une manière générale, T est d'autant plus « chaotique » que le spectre de U est « gros ». (Rappelons que le spectre d'un opérateur U est l'ensemble des scalaires λ tels que $U - \lambda I$ n'est pas bijective, où I est l'opérateur identité.)

Le passage de T à U est facile à visualiser dans le cadre de l'algèbre linéaire de $\mathbf{R}^d$. Dans ce cadre en effet, T est une simple application de l'ensemble $\{1, \ldots , d\}$. Lorsque T est bijective, la matrice de U n'est autre que la matrice de permutation dont les coefficients u_{ij} sont tous nuls sauf lorsque $j = T(i)$, auquel cas $u_{iT(i)} = 1$. L'on peut choisir d'écrire une telle matrice sous la forme d'un tableau de $d \times d$ cases, chaque case étant blanche (resp. noire) si le coefficient correspondant de la matrice est égal à 0 (resp. égal à 1). Pour une transformation T de $[0, 1]$, l'opérateur U associé se représente alors sous la forme d'une « matrice » faites de cases réduites à un point. Chaque ligne et chaque colonne de cette matrice généralisée a un point noir et un seul, les points noirs étant les points dont les composantes sont de la forme $(T(x), x)$.

Le graphe de la réciproque de T peut donc être vu comme la partie noire d'une « matrice » d'un genre un peu particulier. De même, une fonction f de F peut être considérée comme un « vecteur colonne », dont les coordonnées ne sont pas indicées par les entiers de 1 à d comme dans $\mathbf{R}^d$ mais par les réels de l'intervalle $[0, 1]$. L'on peut se représenter f comme un « vecteur continu » : une barre verticale de longueur 1 sur laquelle à chaque point $x \in [0, 1]$ est attaché la valeur $f(x)$, la « x-ième composante » du vecteur f. Par convention, la composante d'indice 0 (resp. d'indice 1) est celle du point le plus bas (resp. le plus haut) — le choix, plus spontané, du contraire imposant malheureusement de représenter la « matrice » de T à l'aide d'un système de coordonnées moins conforme aux habitudes.

Une fois ces représentations de T et de f mises en place, l'action de l'opérateur U se visualise de manière très comparable à celle d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^d$ sur un vecteur : la x^e composante de l'image de f, c'est-à-dire $(U(f))(x)$, s'obtient par une adaptation naturelle de la règle de multiplication d'une matrice par un vecteur.



Les principales difficultés théoriques de la transition de la situation d'une matrice de permutation à celle d'une bijection T de $[0, 1]$ sont les suivantes :

— admettre qu'une fonction f de $[0, 1]$ peut être vue comme un vecteur à une infinité (non dénombrable) de composantes ;

— comprendre que, pour voir f comme « limite » de vecteurs ayant de plus en plus de composantes, les indices de ces dernières ne sont pas les entiers de 1 à n avec n tendant vers l'infini, mais plutôt les fractions $0/n, 1/n, \dots, (n-1)/n$ (ou, si l'on préfère, $1/n, 2/n, \dots, n/n$; bien que d'importance secondaire, la compréhension du choix des indices extrêmes peut s'avérer nécessaire pour pouvoir écrire concrètement les calculs ; le fait que les indices diminuent en descendant peut aussi être un obstacle) ;

— accepter de remplacer la somme finie du calcul de chaque composante avec la formule de multiplication matrice-vecteur par une somme infinie non-dénombrable, qui n'a du sens que parce que cette somme est faite de termes qui sont tous nuls, sauf un (qui prend la valeur 1).

II.2. *Opérateur à noyau*

Un opérateur à noyau est un opérateur construit à partir d'une fonction $k : [0, 1]^2 \to \mathbf{R}$, appelée noyau, et de la formule :

$$(U(f)(x)) := \int_0^1 k(t,x) f(t)\, dt \ .$$

Pour représenter visuellement cette formule abstraite, interprétons le noyau k comme une « matrice » de la forme d'un carré dont le coefficient de la x^e ligne et de la y^e colonne est égal à $k(x, y)$ (pour toutes valeurs de x et de y entre 0 et 1). La différence avec le cas précédent d'un opérateur U déduit d'une transformation T est que, ici, la formule de la somme « ligne-colonne » habituelle pour multiplier une matrice et un vecteur prend la forme non d'une simple

La théorie des distributions

Fondée au milieu du XXe siècle par Laurent Schwartz (après quelques précurseurs), la théorie des distributions est une extension du cadre fonctionnel ordinaire. Une illustration classique consiste à partir de la fonction f indicatrice de $\mathbf{R}^+$ (qui vaut 0 sur $\mathbf{R}^{-*}$ et 1 sur $\mathbf{R}^+$) et à chercher à en définir une dérivée. En raison de la discontinuité de f en 0, une telle dérivée n'existe pas dans le cadre fonctionnel classique. On est donc amené à définir un nouvel objet, noté δ (*la distribution de Dirac*) qui associe à tout réel non nul la valeur 0 et à 0 une « valeur infinie », dont la nature échappe à la notion habituelle d'infini (laquelle ne permettrait pas de retrouver f par simple intégration de δ).

somme, mais d'une intégrale. Les opérateurs à noyau constituent une large classe d'opérateurs, parmi lesquels figurent les transformations de Fourier et de Laplace (l'intervalle [0, 1] étant alors remplacé par $\mathbf{R}$).

Tous les opérateurs ne sont certes pas à noyau, le contre-exemple le plus simple étant l'opérateur identité (et plus généralement les opérateurs définis par une transformation T). Toutefois, le théorème des noyaux de Schwartz (démontré dans [5] ; pour une présentation simplifiée, voir [3]) énonce en substance que, dans le cadre de la théorie des distributions, tout opérateur peut être vu comme un opérateur à noyau. En caricaturant un peu, ce théorème de Schwartz indique que la notion de noyau permet, *via* les distributions, de décrire tous les opérateurs, de la même façon que, en dimension finie, la notion de matrice permet de décrire tous les endomorphismes. Le fait que la théorie des distributions soit requise (comme cela apparaît par exemple pour définir l'opérateur de dérivation) peut être vu, au choix, comme une limite à la pertinence pédagogique de l'analogie matricielle pour les opérateurs, ou comme une justification de l'introduction systématique de la théorie des distributions (fût-ce sous une forme intuitive) dans le cursus universitaire de niveau Master. Au vu des nombreuses applications de la théorie des distributions, laquelle permet non seulement d'établir sur des bases solides divers résultats étudiés en physique à partir de la fin du XIXe siècle (Oliver Heaviside, Paul Dirac, Sergei Sobolev…) mais aussi de résoudre de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles, cette seconde possibilité est peut-être la bonne.

II.3. *L'opérateur de rotation d'angle a*

La transformation T de l'intervalle [0, 1] définie par $T(x) = \{x + a\}$ (où $\{h\}$ désigne la partie fractionnaire de h) est appelée « rotation d'angle a ». L'opérateur U associé à T est alors défini par $U(f)(x) := f(\{x + a\})$. Notons qu'en supposant f définie sur $\mathbf{R}$ et 1-périodique, les accolades deviennent inutiles. (Cette supposition rend possible l'identification de l'intervalle [0, 1] avec le cercle unité, expliquant du même coup le mot de « rotation » attaché à T ; lorsqu'on en reste à [0, 1], on peut aussi parler, pour T, de « translation de a modulo 1 ».) Une façon alternative de présenter cette identification consiste à définir les fonctions sur le cercle unité du plan complexe, et l'opérateur T comme une simple multiplication par $e^{2\pi ia}$.

Les valeurs propres de U sont les scalaires λ pour lesquels il existe une fonction f (non nulle) telle que $U(f) = \lambda f$. Un calcul montre que les fonctions de la forme $f_n(t) = e^{2\pi int}$ sont des fonctions propres pour toutes les valeurs entières de n (lorsque n n'est pas entier, f_n n'est pas correctement définie modulo 1), associées à la valeur propre $e^{2\pi ian}$. Deux cas méritent d'être distingués :

- si $a = p/q$ (fraction irréductible), alors l'ensemble des valeurs propres est fini, c'est celui des racines q-ièmes de l'unité.
- si a est irrationnel, alors il y a une infinité de valeurs propres différentes.

Cette distinction entre valeurs rationnelles et irrationnelles pour l'opérateur de rotation est fondamentale en théorie des nombres et en théorie de la répartition modulo 1 (voir [2], [4]). Elle possède un lien étroit avec un résultat classique sur la densité des orbites (pour un angle irrationnel), dont la démonstration est un authentique mariage entre algèbre et analyse.

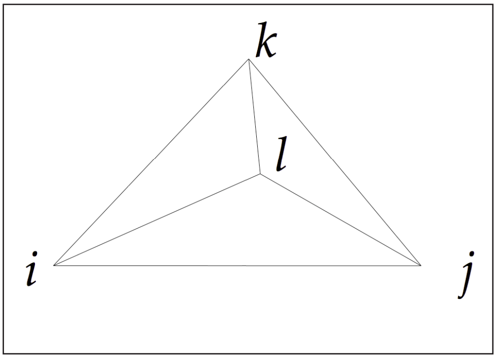
Dans tous les cas, l'opérateur U est « diagonalisable », à la seule condition toutefois de complexifier l'espace F, c'est-à-dire de prendre $\mathbf{C}$ comme corps de scalaires et non $\mathbf{R}$ (nous aurions pu prendre d'emblée des fonctions à valeurs complexes, mais l'on peut penser que cela suggèrerait une difficulté supplémentaire aux étudiants, alors que la complexification d'un espace vectoriel est une opération assez spontanée).

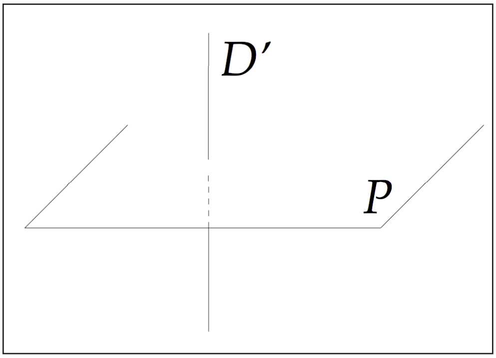
II.4. *Une version discrète*

Une version discrète de l'opérateur de rotation est la suivante : considérons un ensemble à deux éléments $E := \{i, j\}$ et la transformation T de E telle que $T(i) = j$ et $T(j) = i$. Représentons-nous alors i et j comme les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Il est alors naturel de passer de la transformation T à l'application linéaire U de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même telle que $U(i) = j$ et $U(j) = i$. Un minimum d'intuition géométrique montre que cet opérateur U n'est autre que la symétrie axiale dont l'axe est la première bissectrice.

En dimension trois, nous pouvons considérer la bijection T de $\{i, j, k\}$ dans lui-même telle que $T(i) = j$, $T(j) = k$ et $T(k) = i$. L'opérateur U de $\mathbf{R}^3$ associé à T est alors l'application linéaire qui permute les vecteurs de la base canonique selon une rotation d'axe $x = y = z$. De plus, puisque U^3 est l'identité, il est facile de voir que l'angle de cette rotation est de $2\pi/3$. Le cas de la transformation T' définie par $T'(i) = k$, $T'(j) = i$ et $T'(k) = j$ se traiterait bien entendu de la même manière.

La dimension quatre est plus difficile à se représenter géométriquement — et pour cause. Les extrêmités des vecteurs de la base canonique $\{i, j, k, l\}$ sont les sommets d'un tétraèdre régulier, ce qui permet d'en figurer les images par T par projection tout en préservant une part de la géométrie sous-jacente. Les valeurs propres de l'opérateur U étant cette fois $1, -1, i$ et $-i$, l'action de U sur $\mathbf{R}^4$ se décompose selon deux axes, D et D' et un plan P (tous trois deux à deux orthogonaux), la restriction de U sur D (qui se projette sur le centre de gravité du tétraèdre) étant l'identité, la restriction sur D' étant la symétrie centrale de centre O et enfin la restriction au plan P étant une rotation d'un quart de tour (on ne peut pas parler ici d'angle $\pi/2$, puisque le plan n'est pas naturellement orienté). En ne regardant l'action que sur le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par D' et P (qui montre « tout ce que U fait bouger »), un dessin montre une antirotation d'un quart de tour :





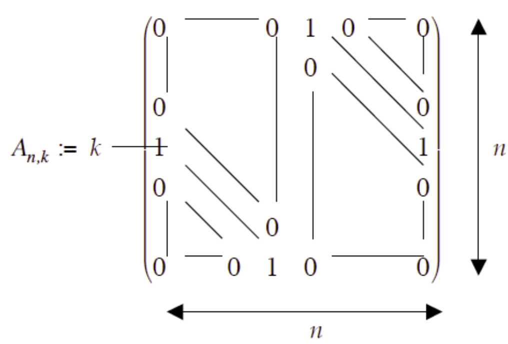
III. — Expérimentation

L'expérimentation elle-même a concerné cinq étudiants du Master 1 de mathématiques de l'université Paris-13. D'une durée de trois heures, elle faisait suite à une série de deux semaines de cours de rappels des notions mathématiques générale de Licence. Les questions étaient posées une par une. Chacune était écrite au tableau, puis suivie d'un temps de réflexion libre (où les étudiants pouvaient travailler en groupe, une possibilité qui n'a guère été exploitée), et enfin d'une résolution au tableau qui était l'occasion d'une discussion informelle. Les questions avaient bien sûr été préparées à l'avance, toutefois, dans un souci d'adaptation au niveau constaté des étudiants, il est apparu pertinent de les reformuler. Au total, les ambitions des énoncés originaux ont été fortement revues à la baisse.

La première question est donnée dans l'encadré ci-contre.

La réponse attendue était la suivante : $A_{n,k}$ est la matrice de l'endomorphisme A défini par $Ae_i = e_{i+k-1}$ pour $i + k + 1 \leq n$ et $Ae_i = e_{i+k-1-n}$ pour $i + k + 1 > n$, les e_i étant les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ (pour i de 1 à n). La valeur d cherchée est donc le plus petit entier pour lequel $d(k-1)$ est multiple de n, c'est-à-dire que $d = \mathrm{ppcm}(n, k-1)/(k-1)$. Puisque la matrice est racine du polynôme $X^d - 1$, l'endomorphisme admet les racines d-ièmes de l'unité pour valeurs propres. Un exemple de vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_j := e^{2\pi i.j/d}$ est alors le vecteur $v_j^{(1)}$ dont la première composante vaut 1, la k-ième vaut λ_j, la $2k$-ième vaut λ_j^2, et ainsi de suite (plus généralement, la m_k-ième composante (m_k étant pris modulo n) vaut λ_j^m), les composantes non atteintes étant prises nulles. (Observons que le nombre de composantes non nulles de $v_j^{(1)}$ est d.) On définit, plus généralement, $v_j^{(s)}$ de la même

1) Soit



a) Déterminer le plus petit entier $d \geq 1$ tel que $(A_{n,k})^d = I$.

b) Diagonaliser $A_{n,k}$.

manière que $v_d^{(1)}$, en décalant les composantes de $s - 1$ rangs, pour tout $s < n/d - 1$. L'ensemble des vecteurs propres $v_j^{(s)}$ forme une famille libre à n vecteurs, c'est donc une base qui diagonalise $A_{n,k}$.

L'objectif n'était pas d'obtenir une réponse complète comme celle qui précède : la restriction (explicitée ou implicitement admise) au cas où $d = n$ (lorsque n et $k - 1$ sont premiers entre eux), la confusion entre k et $k - 1$ ou encore la difficulté à construire plusieurs vecteurs propres linéairement indépendants associés à une même valeur propre λ_j n'étaient pas le cœur du problème. L'intention était de placer les étudiants en terrain connu avec l'étude d'une matrice de permutation qui peut être vue comme une « rotation d'angle $k - 1$ » de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Cette première question a révélé toute la difficulté des étudiants à mobiliser leurs connaissances d'algèbre linéaire, ou même à avoir l'idée de se placer dans un cas particulier simple à traiter. Les étudiants se sont tous lancés dans la recherche générale du polynôme caractéristique par la méthode des déterminants, une tâche superflue autant qu'inextricable avec les techniques courantes. Aucun d'eux n'a remarqué l'aspect « rotatoire » de la matrice, ni même le fait qu'il s'agissait d'une permutation. Même lorsque, au fil de la discussion, cette caractéristique de $A_{n,k}$ a été mise en évidence, cela n'a provoqué aucune remarque sur l'existence nécessaire d'un entier a tel que $(A_{n,k})^a = \mathrm{I}$ (ne serait-ce que $a = n$). Au début de l'exercice, un étudiant a demandé à quel rang commençait la « deuxième diagonale de 1 », illustrant ses limites à comprendre le formalisme matriciel en dimension n.

L'une des difficultés de la question tenait à la nécessité d'interpréter les colonnes de la matrice comme les images des vecteurs de la base canonique : c'est de cette manière que se comprend la correspondance entre une permutation et une matrice dont chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'une fois la valeur 1 (et $n - 1$ fois la valeur 0). Au fil de la discussion, la présentation de l'endomorphisme à partir des images des vecteurs de la base canonique a donc été proposée aux étudiants. Bien que l'aspect permutatif soit cette fois très net et que les problèmes de représentation matricielle soient ainsi mis de côté (évitant ainsi cette question, entendue quelques minutes plus tôt, au sujet du k : « C'est bien k fois ? »), cette présentation alternative n'a pas davantage aidé à la résolution. S'il est rétrospectivement possible de se demander si un cas particulier explicite n'aurait pas été un meilleur choix (par exemple $A_{5,3}$), le manque de hauteur manifeste des étudiants suggère toutefois qu'un tel choix n'eût guère fait mieux que de leur permettre de se lancer dans de fastidieux calculs de déterminants, peu propices à une compréhension globale.

La deuxième question (encadré de la page suivante) introduisait le contexte fonctionnel.

La réponse attendue était la suivante. La linéarité de U_α est immédiate. Notons p/q la fraction irréductible égale à α. Il est facile de vérifier que $U_\alpha^n(f)(x) = f(\{x + np/q\})$, donc la valeur d cherchée est le plus petit entier naturel (non nul) tel que dp/q est un entier. Puisque p et q n'ont pas de facteur commun, on a $d = q$. Enfin, par analogie avec la situation de la question 1, il est permis de penser que des valeurs possibles de λ sont les racines d-ièmes de l'unité. Là encore, en-dehors de la question vraiment très facile de la linéarité de U_α, les étu-

2) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On définit :

$$R_\alpha : [0, 1[\to [0, 1[$$
$$x \to \{x + \alpha\} \text{ (partie fractionnaire)}$$

Soit F l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1[$ dans $\mathbf{C}$.

a) Montrer que l'application

$$U_\alpha : F \to F$$
$$f \to f \circ R_\alpha$$

est linéaire.

b) On prend $\alpha \in \mathbf{Q}$, $\alpha > 0$.

i) Déterminer le plus petit entier $d > 0$ tel que $U_\alpha{}^d = Id$.

ii) Proposer des valeurs λ pour lesquelles vous pensez qu'il pourrait exister f telle que $U_\alpha(f) = \lambda f$.

diants ont été désarçonnés par des éléments très simples. (Ainsi de la question de l'un d'eux sur le sens de l'expression « partie fractionnaire ».) Il est nettement apparu qu'il ne servirait guère de différer la discussion, alors que le temps imparti à l'expérience était déjà aux deux tiers consommé.

La discussion a fourni l'occasion de présenter les premiers éléments du formalisme de la section II.1, notamment la manière de voir une fonction f comme un vecteur dont les composantes sont indicées par l'intervalle $[0, 1[$.

Alors que, jusque là, les espoirs de progrès avaient été quelque peu douchés par les difficultés des étudiants, la situation s'est débloquée à une vitesse inattendue. Tous les étudiants ont proposé des idées allant dans le sens cherché. Quatre propositions majeures ont été lancées :

— utiliser un « carré plein » pour figurer, dans le nouveau cadre fonctionnel, l'équivalent d'une matrice ;
— écrire l'image de f par l'opérateur U_α en ayant recours à une généralisation de la formule du produit matrice-vecteur, généralisation dans laquelle interviendrait… une intégrale, préfiguration inattendue de la formule des opérateurs à noyau ;
— avoir une attention particulière pour le bon type de limite à utiliser pour voir l'opérateur U_α comme une limite des endomorphismes $A_{n,k}$;
— étudier la diagonalisabilité éventuelle de U_α.

Le peu de temps restant après cette discussion fructueuse n'a permis de s'intéresser que trop brièvement à une troisième question, qui demandait d'exprimer de façon simple le sens de l'opérateur K associé à la « matrice » définie par le graphe de l'application identité (il s'agit de l'opérateur identité).

IV. — Conclusions

Même si ce n'est pas directement le sujet, il est difficile de passer sous silence combien l'étude, ou ne serait-ce que l'approche, d'une matrice $n \times n$ peut se révéler ardue, un constat que l'on n'attendait guère à ce niveau d'étude. Sans doute peut-on y voir l'effet d'un enseignement de l'algèbre linéaire qui a principalement recours à des exemples explicites qui ne dépassent guère la dimension trois. Toujours est-il que le cas d'une dimension finie inconnue n a nettement semblé au-dessus des connaissances exploitables des cinq étudiants de l'expérience.

Il s'agit là manifestement d'un frein sérieux à l'exploitation à des fins pédagogiques de la dimension finie comme marchepied à une première approche de l'analyse fonctionnelle. L'importance d'une formulation plus progressive de la question 1 a été clairement mise en évidence dans l'expérience.

Pour ce qui est de l'approche de la notion d'opérateur fonctionnel à partir de « matrices infinies », il semble en revanche que les possibilités existent. S'il serait trop optimiste d'attendre des étudiants qu'ils créent eux-mêmes de toute pièce l'analogie, l'expérience a tout de même montré une faculté certaine à faire fonctionner l'imagination dans le bon sens, allant jusqu'à approcher la formule de l'opérateur à noyau. Contrairement à ce que l'on pouvait attendre, il semble notamment que le choix d'un opérateur de rotation, à partir duquel l'analogie matricielle découle de la même expression formelle du produit matrice-vecteur (ou opérateur-fonction), ne soit pas le plus intuitif pour les étudiants, pour qui le recours à une intégrale semble d'emblée plus naturel lorsqu'il s'agit d'obtenir une expression à partir d'un ensemble non-dénombrable de données.

Bibliographie

[1] Jean-Luc Dorier et al., L'Enseignement de l'algèbre linéaire en question, La Pensée Sauvage, 1999.

[2] Lauwerens Kuipers & Harald Niederreiter, Uniform distribution of sequences, Wiley-Interscience, 1974.

[3] Nicolas Lerner, « Hommage à Laurent Schwartz », http://www.math.jussieu.fr/~lerner/HLS-2005.pdf.

[4] Gérard Rauzy, Propriétés statistiques de suites arithmétiques, Presses Universitaires de France, 1976.

[5] Laurent Schwartz, « Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles », J. Analyse Math. 4, 88-148, 1954-1955.