RESOUDRE UN PROBLEME PAR L'ALGEBRE SANS EN PERDRE LE SENS : SUR LES TRACES DE DIOPHANTE D'ALEXANDRIE

Alain BERNARD
Université Paris-Est, UPEC-IUFM [1]
Centre Alexandre Koyré
et labex HASTEC [2]

1. — Introduction : quelques difficultés notoires du calcul algébrique, et pourquoi la lecture de Diophante permet de les aborder

La résolution des problèmes arithmétiques élémentaires par l'algèbre pose plusieurs difficultés didactiques bien connues. Je parle ici de problèmes 'élémentaires' au sens qu'ils sont étudiés en France au niveau du collège. Ces problèmes n'offrent pas de difficultés qui justifient une grande technicité mathématique, algébrique ou autre, cependant leur résolution est censée avoir une très forte valeur paradigmatique.

La première difficulté est que la résolution algébrique, en tant que méthode de *résolution* de problèmes, n'est qu'une démarche parmi bien d'autres et pas forcément la plus efficace.

Pour des problèmes simples et qui ont un fort contenu intuitif, ou bien pour des problèmes du 1er degré comme le sont la plupart des problèmes arithmétiques ou même géométriques étudiés au collège, d'autres méthodes de résolution sont non seulement possibles mais se montrent très efficaces : raisonnement logique et verbal sur l'énoncé du problème, méthodes de tâtonnement, d'essais 'contrôlés' comme dans les méthodes de fausse position, méthodes graphiques ou géométriques, méthodes employant des moyens calculatoires et informatiques.

1 Je participe ponctuellement aux travaux de l'Irem de Paris 7. A l'UPEC, je travaille dans le groupe de recherche 'sciences et techniques en interférences' (http://interferences.hypotheses.org).

2 Au sein du labex, je participe par mes recherches sur les *Arithmétiques* de Diophante aux travaux du projet de recherche 'les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures' (http://problemata.hypotheses.org), dont la première formation a été coorganisée avec l'Irem de Paris 7. Le présent article est très largement issu de ces travaux.

Non seulement les méthodes de résolution sont multiples, mais l'esprit même de l'enseignement qu'on attend sur ces problèmes élémentaires tend aujourd'hui à privilégier les problèmes qui offrent une telle multiplicité d'approches possibles : c'est ce qu'explicitent les actuels programmes de collège en mathématiques [MEN 2008, partie 4.1]. En effet, à partir du moment où l'enjeu de la résolution de problèmes est de servir de situation, de terrain, à une « démarche d'investigation » inventive de la part des élèves, on a intérêt à ce que ce terrain soit riche et que différentes voies soient envisageables pour aborder un problème. *A contrario*, on n'a pas besoin d'installer, à ce stade du moins, l'idée qu'il existe des méthodes universelles de résolution qui permettent de ramener des dizaines de problèmes à un seul type de résolution : c'est ce que fait la méthode algébrique dans la mesure où elle privilégie un nombre limité d'équations canoniques, dont il suffit de connaître ensuite un algorithme de résolution, comme on le trouve chez les premiers algébristes arabes notamment al-Khwârizmî. À la limite, ce caractère « universalisant » de l'algèbre nuit au développement d'une inventivité 'naturelle' dans la résolution de problèmes. Plus subtilement, elle donne une idée biaisée ou réductrice de la méthode algébrique, qui est tout autant (et peut-être davantage) un outil pour *comparer des problèmes aussi bien que leurs solutions*, en déterminer la structure, qu'un simple moyen pour trouver des solutions plus efficacement que par d'autres voies.

La seconde difficulté est que la résolution algébrique, par son principe même, a un coût très lourd en termes d'apprentissage(s). Car si le passage d'un problème formulé dans un contexte particulier, arithmétique, géométrique ou autre (probabiliste, par exemple) à une équation qu'il s'agit de résoudre, peut apparaître comme une *simplification* et un facteur de *généralisation* d'un point de vue mathématique, d'un point de vue didactique il représente le plus souvent une complexification des tâches, pour toutes sortes de raisons. Les premières sont calculatoires : les calculs arithmétiques qu'impliquent les calculs algébriques ne sont pas toujours anticipés (voire anticipables) de façon à être les plus simples possibles — par exemple pour éviter des calculs sur les fractions ou des développements avec parenthèses, souvent sources d'erreurs. Les secondes sont algorithmiques : le calcul algébrique sur des équations est source de difficultés spécifiques qui viennent de l'introduction de nouveaux objets de calcul (l'inconnue symbolisée et ses puissances éventuelles), de l'usage de formules 'potentialisées' où les signes d'opération désignent des résultats, et de l'obligation d'observer un équilibre fondamental des opérations de part et d'autre de l'équation.

Ces particularités du calcul algébrique n'en font pas un calcul totalement original par rapport à l'arithmétique usuelle : il existe en effet une continuité fondamentale, reconnue depuis longtemps par les fondateurs du calcul algébrique, entre le calcul arithmétique développé en lien à la numération par usages de chiffres et de la position, et le calcul algébrique. Cette continuité, quand elle est méconnue, est souvent source de difficultés. Pour l'heure et en supposant que cette continuité soit respectée, il n'en reste pas moins que le calcul algébrique dépend d'un « contexte algorithmique » spécifique, qui suppose un apprentissage prolongé. C'est ce qui a conduit, par exemple, Jean-Paul Guichard, dans un précédent numéro de la revue [Guichard 2002] à proposer une approche de la résolution de problèmes qui tienne compte des contraintes de cet apprentissage nécessaire, sans toutefois en faire un « chapitre à part » de la résolution des problèmes.

La troisième difficulté est en quelque sorte sous-jacente aux deux ordres de difficulté signalés précédemment, concernant la pluralité des méthodes de résolution d'un côté, et les règles algorithmiques spécifiques au calcul algébrique de l'autre. Car s'il est si important de bien maîtriser les règles du calcul algébrique quand on utilise ce dernier dans une résolution de problème, c'est que dans une solution algébrique le *sens* de ce calcul, sa signification, est à peu près complètement détachée de celle du problème initial. La *force* du calcul vient bien ici du fait que le lien entre ce sens primitif et la conduite du calcul est momentanément rompu : à la limite, c'est même cette perte relative de sens qui fait la richesse du calcul, car elle permet une réinterprétation du problème sur de nouvelles bases. C'est le sens des indications proposées par René Guitart [Guitart 1999] : même si le propos de l'ouvrage dépasse la question des potentialités du calcul algébrique pour conduire un raisonnement 'vivant' et toujours réactualisé en mathématiques, la question de l'alternance entre sens et non-sens y est très étroitement lié à l'usage du calcul algébrique.

À un niveau poussé d'analyse et de sophistication, percevoir cette force du calcul et cette particularité insigne est évidemment une nécessité, car c'est l'immense potentialité du calcul qui est alors en jeu et ouvre vers des problèmes d'un type original : l'exemple le plus évident de tels champs nouveaux de problèmes concerne tous les problèmes de la théorie des équations. Mais au niveau de la résolution de problèmes spécifiques, où ce qu'on cherche à développer est plutôt une capacité d'analyse et de compréhension 'fine' de ces problèmes, cette coupure présente des désavantages : elle fait quitter un peu trop vite, pour ainsi dire, le contact avec le 'terrain' du problème et de sa formulation spécifique, qui offrent le plus souvent des potentialités intéressantes à exploiter.

Je voudrais ici m'appuyer sur une analyse commentée de la « méthode » proposée dans l'antiquité par Diophante d'Alexandrie pour la résolution de nombreux problèmes arithmétiques, pour montrer qu'*on n'est pas forcément obligé*, dans la résolution de tels problèmes, de *choisir* entre les résoudre 'par l'algèbre' et donc de couper tout lien avec le sens primitif du problème, ou bien renoncer au calcul algébrique pour garder le contact avec les particularités 'intéressantes' de chaque problème. Il est possible, autrement dit, de choisir un mode de résolution qui exploite une partie des vertus du calcul algébrique, tout en maintenant un lien vivant et significatif avec le « terreau » du problème. Comme toujours dans ce genre de questionnement, cela nous conduira aussi à nous interroger sur les types de problèmes ou de formulations de problèmes, qui forment un bon terrain pour cette « voie médiane » : je rejoins en cela directement les conclusions de l'article déjà cité [Guichard 2002], qui suggère que toute approche réfléchie des difficultés d'une résolution algébrique pour les élèves, implique une réflexion sur le corpus des problèmes à sélectionner et organiser.

2. — De la difficulté à lire Diophante sans le réécrire en symboles, et à reconnaître en lui un « algébriste »

Le second objectif de cet article, qui n'est d'ailleurs pas entièrement dissociable du premier, est de sensibiliser à une approche de l'algèbre qui ne se fonde pas nécessairement sur les commodités d'une écriture symbolique. On le sait, toutes les mathématiques antiques et médiévales, à quelques exceptions près, se fondent sur une approche des calculs et des raisonnements qui est profondément enracinée dans l'usage de langues soi-disant « naturelles » — comme le grec, le sanskrit, le chinois, l'arabe classique. Je précise « soi-disant », car pour n'être pas symbolisé dans l'extrême majorité des cas (mais il y a des exceptions, voir [Moyon 2007]), le langage mathématique d'avant la fin du Moyen-âge (pour parler vite) n'en est pas moins « technique », et se distingue de la langue naturelle par la pauvreté de son vocabulaire et par son caractère formulaire [Aujac 1984]. Mais même si l'on tient compte de cette remarque, il n'en reste pas moins que le langage mathématique antique et médiéval est profondément adapté à des pratiques intellectuelles verbales plus qu'à une symbolisation visuelle se suffisant à elle-même [Cavallo et Borghetti 2001]. Avec la remise à l'honneur contemporaine du calcul mental et par conséquent de raisonnements verbalisés dans l'enseignement [MEN 2008, §1.3, 4.4, 4.6], nous sommes aujourd'hui conduits à enrichir à nouveau l'enseignement des mathématiques de cette grande oubliée de l'histoire moderne, que le règne de l'imprimé~~e~~ et de la parole écrite a bouleversée. Je veux parler des *raisonnements verbaux*, qui s'offrent à la répétition savante, à la mémorisation et au remâchage, plus qu'à l'inspection visuelle. Pour la même raison, je limiterai volontairement tout recours à un langage symbolique pour faire comprendre ma lecture de Diophante. Cette attention portée à la langue pour la lecture de Diophante, ne doit pas se limiter à la forme que le texte diophantien partage avec d'autres textes anciens, notamment les grands textes de la géométrie classique (Euclide, Apollonius ou Archimède). Elle touche au projet diophantien luimême, dont j'ai essayé de faire sentir dans une autre publication des Irem [Bernard 2011], à la suite d'une suggestion faite par Jean Christianidis [2007], qu'il était très probablement ancré dans la rhétorique ancienne. Cela signifie en particulier que le but profond de tout l'ouvrage est comparable à ce qu'était le but d'un enseignement rhétorique : développer chez l'apprenti sa capacité à l'invention, c'est-à-dire à trouver une réponse riche, variée et convaincante à la plupart des « problèmes » au sens rhétorique du terme, c'est-à-dire des sortes de prétexte à déclamation oratoire. Je ne rentre pas dans le détail de la comparaison entre les deux pratiques, la pratique de résolution diophantienne des problèmes arithmétiques, et les pratiques d'apprentissage de la parole qui formaient le squelette de l'éducation antique (pour une étude préliminaire, voir [Bernard et Christianidis 2012]). Je ne retiens ici que ce qui concerne le thème de l'article et la question de l'apprentissage de *l'algèbre*. Car l'interprétation ci-dessus revient à prendre position sur un débat au moins aussi vieux que les toutes premières lectures de Diophante en pays d'Islam: le traité diophantien a en effet une forme et un but qui lui sont particuliers et qui sont clairement distincts d'un traité d'algèbre au sens devenu classique après al-Khwârizmî. Le contenu de l'exposé fait sans aucun doute appel à des éléments théoriques qui renvoient très probablement à une tradition 'longue' de l'algèbre, mais l'exposé de cette théorie est subordonné au but général du traité, qui est plus général et en tout cas différent de l'exposé 'brut' de la théorie en question. Ce but est, quant à lui, intimement lié à un mode de construction des *séries de problèmes* arithmétiques. Cette construction vise à exposer, très progressivement, un mode de solution de ces problèmes, qui soit livré à l'effort d'appropriation du lecteur (sur les séries de problèmes en général, voir note1). C'est précisément le fait que la « théorie algébrique » (ou ce qui en tient lieu chez Diophante) ne soit pas ici le centre du projet, mais un simple appui, une ossature qui sert de « toile de fond », qui fait de l'exposé diophantien un appui intéressant pour la lecture sélective que je propose ici : il oblige à considérer la façon dont Diophante propose d'appréhender l'analyse des problèmes arithmétiques, une « façon » qui est *à la fois* systématique et non systématique. C'est ce qu'il faut maintenant expliquer. Le plus simple pour cela est d'analyser plusieurs des solutions diophantiennes, pour en éclairer à chaque fois un aspect différent.

3. — Le schématisme des solutions : le premier problème du livre I (I.1)

Le plus simple des problèmes diophantiens, le tout premier, présente l'avantage sur tous les autres de montrer toutes les étapes d'une solution « typique ». Cet avantage comparatif n'est pas propre au seul texte de Diophante parmi le corpus mathématique en Grec ancien et reflète au contraire ses caractéristiques stylistiques. Le texte grec, tel qu'on le trouve en effet dans les manuscrits, est un texte en continu, écrit en toutes lettres (modulo l'usage de certaines abréviations) et parfois sans séparation nette entre les mots consécutifs : cette « écriture continue » (*scripto continua*) suppose des compétences de lecteur, comme le montrent les travaux des spécialistes d'histoire de la lecture [Cavallo et Chartier 2001]. En outre, cette particularité indique que la pratique de compréhension des textes, mathématiques ou non, passait très probablement par une phase d'oralisation préalable. Cela implique que les distinctions internes au texte, que nous faisons quant à nous par des systèmes de ponctuation ou de structuration visuelle (alinéas, tableaux, espacement divers..) passaient pour les anciens (c'est-à-dire les savants antiques ou byzantins) par la structure même de la langue, par des *marqueurs* linguistiques et syntaxiques qui servaient de points de repère.

On l'a vu, ces remarques n'ont pas une portée purement historique : avec l'attention marquée portée récemment sur le calcul mental, dont on recommande désormais la pratique à tous les niveaux de la scolarité obligatoire, beaucoup de collègues ont redécouvert les vertus et les riches subtilités du calcul *oralisé*. Cela implique une façon de *penser* les mathématiques et notamment la justification des procédures utilisées qui passe par l'oral et qui suppose donc la définition de marqueurs verbaux stables et facilement mémorisables. Ces derniers, en réalité, doivent être adaptés aussi bien à la mémorisation et la verbalisation qu'à la compréhension, sans contradiction entre ces différents aspects.

Quoi qu'il en soit, je présente le problème et sa solution en m'appuyant d'abord sur les commodités graphiques d'un tableau, qui permettra de visualiser les étapes principales du raisonnement, qui conduit Diophante de l'énoncé du problème jusqu'à celui d'une équation (la traduction française du texte diophantien est disponible dans [Ver Eecke 1925])

Texte de Diophante, en traduction.	*Etapes de l'énoncé et de la solution.*
Partager un nombre proposé en deux nombres <qui soient l'un à l'autre> dans une différence donnée.	1a. Enoncé
Que le nombre donné soit <le nombre> 100, la différence 40 unités. <On doit> trouver les nombres <cherchés>.	1b. Enoncé instancié
Que le moindre <nombre> soit posé un arithme. Le plus grand sera donc un arithme et quarante unités. <Les deux> ensembles, donc, deviendront 2 arithmes et 40 unités. Ils sont donnés par ailleurs, 100 unités. Donc, 100 unités sont égales à 2 arithmes et 40 unités.	2. Des énoncés à une équation
Et <il faut retrancher> les semblables des semblables. Je retranche du <nombre> 100, 40 unités, et des 2 arithmes et des 40 unités, semblablement, 40 unités. Les restes 2 arithmes, sont égaux à 60 unités. Chaque <arithme> devient donc 30 unités.	3. Solution de l'équation obtenue
Retour vers les positions : le moindre sera 30 unités, le plus grand 70 unités. Et la preuve est évidente.	4. Calcul des nombres cherchés

La première remarque qui s'impose, et que le tableau rend encore plus visible, est que l'ensemble de l'énoncé et de la solution suit différentes étapes qui peuvent clairement être distinguées les unes des autres, et qui pourraient l'être même en l'absence de tableau car le style et le vocabulaire de chacune suffisent à le faire.

1/ La phase d'énonciation (1a et 1b) se distingue par l'emploi d'un infinitif 'trouver', 'diviser', 'partager' etc. qui équivaut à un impératif et, pour le contenu, à l'énoncé d'une tâche. En outre la phase d'énonciation est caractérisée par l'emploi d'un vocabulaire spécifique aux énoncés, en conformité à une importante remarque faite par Diophante dans l'introduction de son traité : tous les problèmes sont « tissés » d'une part à partir de nombres qui ont certains rapports entre eux (comme un carré et son côté, ou bien ceux qui sont le bicarré d'un autre), d'autre part à partir des opérations (éventuellement enchaînées) qu'ils sont susceptibles de subir. De fait, l'énoncé de ce premier problème évoque abstraitement deux nombres (sous-entendu, qu'on cherche, car ils sont le complément de 'partager') qui sont d'une part les parties d'un nombre donné, et qui ont d'autre part entre eux une différence donnée. La phase d'instanciation, quant à elle, se distingue évidemment de l'énoncé « général » par la présence de nombres déterminés en lieu et place des 'nombres donnés' et de l'emploi de formules au subjonctif telles que « que soient donnés », « qu'il soit prescrit », etc.

2/ La solution elle-même se décompose en trois étapes distinctes, la première conduisant des énoncés à une équation : cette étape est caractérisée par sa structure logique marquée (c'est une suite de déductions introduites par 'puisque', 'donc', etc.) ; par l'emploi de termes caractéristiques comme 'que soit posé', 'je pose', 'qu'on forme', etc. ou encore par des verbes caractéristiques d'opérations ('sera', 'deviendra'). Toutes ces formes verbales ont en commun de permettre *d'établir une correspondance* entre un nombre qui a un sens pour l'énoncé, et une expression utilisant les termes techniques comme 'arithme', 'puissance', 'carrécarré'. Ces derniers termes, caractéristiques de la « théorie arithmétique » qu'invoque Diophante, sont introduits par lui dans son introduction. Ils sont susceptibles d'être agrégés entre eux, et Diophante précise également les règles opératoires qui les gouvernent. Ce sont aussi ces termes 'techniques' ou 'théoriques' qu'on identifie le plus facilement aux inconnues de l'algèbre classique et de ses 'puissances'. Dans cet article, je n'entre pas dans une description détaillée du contenu de l'introduction : je renvoie pour cela à [Bernard 2011]. Cette première étape de la solution a une clôture caractéristique : l'emploi d'une phrase de conclusion qui permet d'égaler explicitement deux expressions de la théorie arithmétique.

3/ La seconde étape de la solution est caractérisée par un langage nettement procédural : c'est un algorithme où on opère sur les termes d'une équation résultant de la première étape, les opérations réalisées dépendant d'opérations générales pratiquées sur les équations elles-mêmes : Diophante en précise deux en introduction, dont celle qui est employée dans le problème ci-dessus, 'retrancher les semblables des semblables' et qui est le pendant de l'opération «muqabala» des algébristes des pays d'Islam. Cette troisième étape a de nouveau une clôture caractéristique : l'égalisation de « l'arithme », le terme technique employé par Diophante pour son inconnue, avec un nombre déterminé.

4/ La dernière étape est souvent introduite par une formule caractéristique 'epi tas hupostaseis', qu'on pourrait traduire 'vers les positions', ou 'vers les valeurs', suivant la traduction qu'on adoptera pour 'hupostasis'. Elle se caractérise à nouveau par un langage calculatoire, mais dont le point de départ est, de manière reconnaissable, tiré de la première étape : ce sont certaines des expressions mises en correspondance avec certains nombres de l'énoncé, à savoir ceux qu'on cherche. On peut donc voir ces expressions comme des renvois explicites, et cette explicitation est parfois soulignée par un verbe 'j'ai posé' : c'est ce qu'on verra notamment dans l'exemple suivant (problème I.12).

Le premier point qu'il faut ici souligner est le caractère éminemment *schématique* de cette structure : 'schématique' veut dire précisément que les marqueurs que j'ai résumés ci-dessus sont répétitifs, ils se retrouvent dans à peu près toutes les solutions, y compris celles où certaines étapes, notamment l'étape 3 sont pratiquement omises. Le caractère répétitif des parties de solution suffit à évoquer les opérations qu'il faudrait suppléer pour avoir un schéma complet. Il suffit, par exemple, d'évoquer l'équation et la valeur de l'arithme : toutes les opérations intermédiaires pourraient être suppléées sans difficulté. Seule la première étape, non seulement ne fait jamais l'objet d'ellipse, mais est la plus conséquente et développée, comme on le verra.

Ce schématisme est un élément structurel du projet Diophantien, et c'est probablement cette répétitivité du schéma de solution qui donne une consistance à cette *voie générale* (*hodos*) dont Diophante, en introduction, donne le soubassement théorique. Ce soubassement est constitué tout d'abord par l'échelle des 'espèces', ces termes techniques comme 'arithme', 'dunamis', 'arithmième', etc. ainsi que leurs rapports algorithmiques, qui sont employés ensuite à toutes les étapes (2, 3 et 4) sauf celle de l'énoncé, où de tels termes n'interviennent pas. Puis par les opérations qu'on peut faire sur des agrégations de telles espèces ; enfin par les opérations qu'on peut faire sur les équations qu'on obtient, si on en obtient – ce dernier passage est assorti d'une remarque importante, à savoir que le type d'équation 'réduite' qu'on cherche est toujours 'une espèce égale à une espèce'. En tant que tel, ce caractère schématique n'est pas original à Diophante : on le trouve aussi, dans l'antiquité chez Héron et dans le corpus dit 'pseudo-héronien', où il a également un caractère structurant [Vitrac 1995]. Dans les *Métriques*, on trouve en outre des calculs qui sont, comme chez Diophante, justifiés – généralement, chez Héron, en fonction d'une figure géométrique qui est 'analysée' dans le langage des données. Ce qui est plus original est la manière dont chaque étape s'agence aux autres : si on n'a pas, chez Diophante, l'avantage d'une figure qui justifierait les étapes proposées, notamment dans la première partie de la solution, *la référence aux énoncés et à leur langage particulier* en tient lieu : c'est ce qu'il nous faut maintenant examiner pour saisir cet ancrage très particulier des calculs proposés en termes 'algébriques', et le sens primitif des énoncés diophantiens.

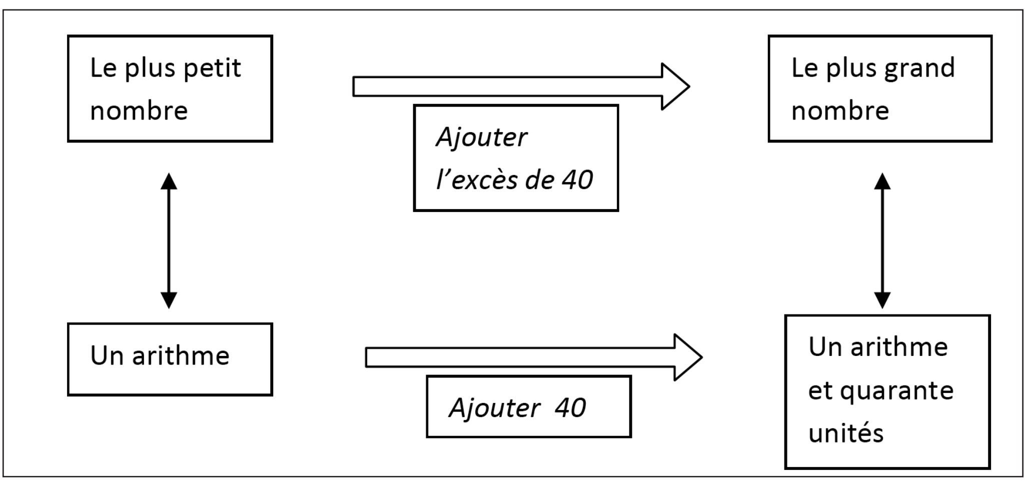
4. — Nommer et calculer les nombres qu'on cherche, en fonction de l'énoncé : les problèmes I.1 et I.12

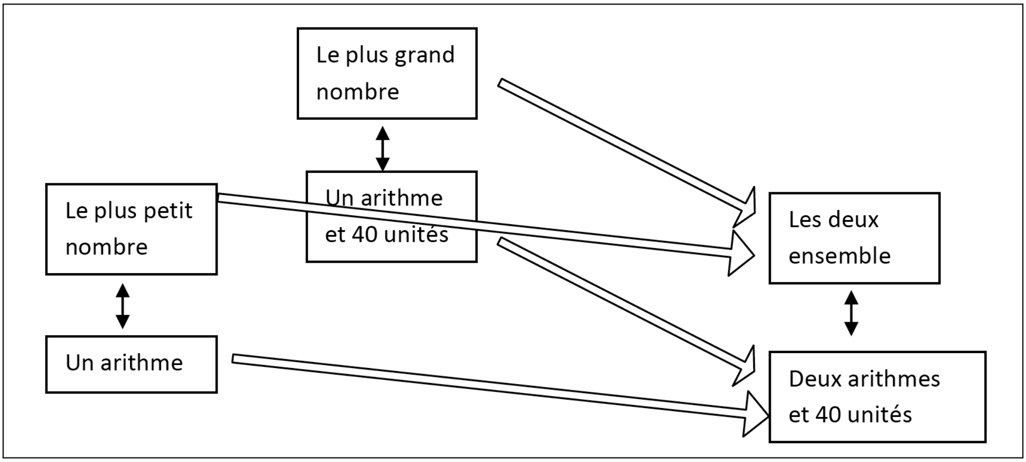
Je reviens maintenant sur la fameuse première étape de la première solution, que Diophante a clairement choisie, si on en croit du moins la tradition manuscrite grecque, de privilégier systématiquement. Elle a une structure logique qu'il est intéressant de détailler, pour voir comment cette dernière s'ancre fondamentalement dans la structure 'primitive' de l'énoncé. Il ne faut en effet jamais oublier que ce dernier relie, comme on l'a vu plus haut, certains nombres entre eux, soit parce que les noms mêmes des nombres ('un carré', par exemple) évoque un rapport à un autre nombre (son côté dans l'exemple), soit que les rapports cherchés soient explicites dans l'énoncé. Par exemple, dans le problème I.1, les deux nombres doivent *avoir entre eux une différence donnée*. Cette structuration fait l'objet d'une remarque explicite de Diophante dans son introduction [Christianidis 2007, §3.2] : on va en voir toute l'importance.

Commençons par l'exemple du problème I.1. Le *moindre* des nombres cherchés est posé 'un arithme'. Cette mise en correspondance d'un des nombres cherchés et d'un terme technique de la théorie, n'est pas ici justifiée explicitement comme elle peut l'être dans d'autres problèmes de Diophante. Par contre, la manière même de nommer le nombre qu'on pose, en tant que le « moindre » nombre est évidemment une référence à l'énoncé instancié, qui permet de distinguer, *puisque* nous avons deux nombres dont l'un est en excès de 40 sur l'autre, un « moindre » et un « plus grand ». La déduction qui en est faite ensuite ('le plus grand, par conséquent..') dépend à la fois de la donnée de cette différence (référence à l'énoncé) et de cette identification initiale d'un des nombres cherchés. Un dernier implicite, opératoire celui-là, sous-tend ce premier passage : que 40 ajoutés à un arithme donnent une expression 'agrégée' de 'un arithme et 40 unités'. On pourrait résumer le 'schéma sémantique' complexe de cette déduction de la manière suivante, où les niveaux opératoires internes à l'énoncé (le grand nombre est en excès de 40 sur le petit) et interne à la théorie arithmétique (un arithme qui s'ajoute quarante font un agrégé de un arithme et 40 unités) sont artificiellement distingués (ci-dessous).

Le simple emploi du verbe opératoire « sera » (*estai*), succédant à la mise en correspondance du plus petit nombre avec un arithme (flèche verticale gauche) et faisant appel à l'opération virtuelle indiquée dans l'énoncé, donne sens à l'opération implicitement faite sur l'arithme.

La déduction suivante n'est pas moins intéressante : « les deux ensemble, donc », renvoyant à l'agrégé des deux parties du nombre donné, le moindre nombre et le plus grand, peuvent être compris désormais de *deux* manières. Correspondant à un arithme, d'un côté, et un arithme et 40 unités, de l'autre, l'agrégation des deux fait deux arithmes et 40 unités : c'est le calcul opéré sur les espèces. D'un autre côté, et c'est ce que dit la phrase suivante, cette agrégation





est le contraire du partage initial dont il est question dans l'énoncé : ensemble, ils font donc le nombre donné. Pour résultat de cette double lecture possible : l'une renvoyant aux énoncés, l'autre aux opérations sur les espèces, on obtient une équation. On pourrait de nouveau schématiser la situation complexe que renferme cette formule ainsi, par une sorte de prisme, où chaque base se rattache artificiellement, à nouveau, l'une aux opérations qu'indique l'énoncé, l'autre aux opérations faites suivant les algorithmes de la théorie arithmétique (ci-dessus).

Ici encore, la formule 'les deux ensemble', qu'on peut comprendre indifféremment comme le résultat, le 'conglomérat' des deux nombres, ou comme une indication qu'il faut les ajouter, ainsi que la formule opératoire « deviennent » (*ginontai*) si on tient compte des mises en correspondance précédentes, impliquent une possibilité, non seulement de comprendre quelle opération il faut faire implicitement (ajouter un arithme, et un arithme et quarante unités), mais encore lui donne sens, puisque cette opération est justifiée par l'idée d'ajouter les nombres cherchés, ajout qui est le simple contraire de leur partage : c'est pourquoi on peut ajouter que le résultat de cet ajout est le nombre donné de l'énoncé (« mais ils sont donnés »).

Il est intéressant de voir cet effet de 'double lecture', en référence permanente à l'énoncé, jouer sur un autre exemple, plus 'spectaculaire' en termes de nomination des nombres cherchés et de mises en correspondance successives C'est le problème I.12 présenté en haut de la page suivante.

Un examen rapide de l'ensemble de la solution illustre une particularité qui se vérifie sur bien d'autres problèmes diophantiens hormis les tous premiers : la troisième étape, moyennant une ellipse générale des calculs sur l'équation obtenue, est réduite au plus strict nécessaire : une évocation de l'équation obtenue en conséquence des étapes (2e) et (2f), et le résultat : la valeur de l'arithme obtenue. Les opérations intermédiaires (à savoir : *ajouter 5 arithmes de part et d'autre, soustraire 100 unités de chaque côté, puis tout diviser par cinq*) peuvent facilement être suppléées par le lecteur, et le fait de les omettre valorise d'autant les étapes

Texte de Diophante, en traduction.	*Etapes de l'énoncé et de la solution.*
Partager deux fois un nombre proposé en deux nombres, de manière qu'un nombre du premier partage ait un rapport donné avec un nombre du second partage, et que le nombre restant du second partage ait un rapport donné avec le nombre restant du premier partage.	1a. Enoncé
Proposons donc de partager deux fois le nombre 100 en deux nombres, de manière que le plus grand nombre du premier partage soit le double du plus petit nombre du second partage, et que le plus grand du second partage soit le triple du plus petit du premier partage.	1b. Enoncé instancié
(2a) Que soit posé le plus petit nombre du second partage, 1 arithme. (2b) Dès lors, le plus grand nombre du premier partage sera 2 arithmes. (2c) En conséquence, le plus petit nombre du premier partage sera 100 unités en défaut de 2 arithmes. (2d) Et puisque le plus grand des nombres du second partage est le triple de ce dernier nombre, il sera 300 unités en défaut de 6 arithmes. (2e) Il faut encore que les nombres du second partage, pris ensemble, fassent 100 unités. (2f) Mais, ajoutés ensemble, ils font 300 unités en défaut de 5 arithmes.	2. Des énoncés à une équation
Ces derniers sont égaux à 100 unités, et l'arithme fait 40 unités.	3. Solution de l'équation obtenue
Retour vers les positions. J'ai posé • pour le plus grand <nombre> du premier partage, 2 arithmes : cela fera 80 unités ; • pour le plus petit du même partage, 100 unités en défaut de 2 arithmes : cela fera 20 unités ; • pour le plus grand du second partage, 300 unités en défaut de 6 arithmes : cela fera 60 unités ; • et pour le plus petit du second partage, un arithme : cela fera 40. Et la preuve est évidente	4. Calcul des nombres cherchés et preuve

les plus importantes : l'étape 2 qui conduit à l'équation, et dans une moindre mesure l'étape 4 qui permet le calcul effectif des nombres cherchés, en référence étroite à l'étape 2.

Quant à l'étape 2, je l'ai ici décomposée artificiellement suivant les membres de phrases et les enchaînements logiques, en six étapes numérotées a-f. Pour chaque étape, on pourrait faire la même analyse 'duale' que ci-dessus, et constater que la référence à l'énoncé est constante et fonde la justification. Ainsi, et sans m'attarder à schématiser chacune d'elle :

- le passage de (2a) à (2b) fait-il référence implicitement à la première prescription (le rapport entre les nombres du second partage est d'un pour deux), ainsi qu'à la désignation moindre / plus grand nombre qu'autorise l'énoncé 'instancié'.

- De même le passage de (2b) à (2c) dépend-il implicitement du fait que, si deux nombres en partagent un autre, chacun d'eux, ôté de ce troisième donne l'autre : il s'agit donc de nouveau d'une référence à l'opération de « partage d'un nombre donné » qui structure l'énoncé.

- Le passage de (2c) à (2d) est intéressant, car cette fois-ci l'élément de justification sous forme d'un rapport à l'énoncé instancié, est explicite : « *puisque* le plus grand est le triple du plus petit.. ».

- Il en va de même pour la paire (2e-2f) qui se fonde sur la prescription centrale (les nombres cherchés sont, par paire, issus d'un partage du nombre donné 100) qui est reformulée en fonction des nombres cherchés : ensemble et par paire, s'ils sont ajoutés ils doivent donner le nombre donné. C'est ce qui *explique* tout d'abord, qu'on calcule alors ce que font ces nombres ensemble (2f), puis qu'on obtienne une équation (étape 3).

Il est intéressant ici de noter que presque tous les nombres pour lesquels on a ainsi établi, de diverses manières, une correspondance, sont rappelés dans l'étape 4, dans un ordre qui n'est plus celui de l'étape 2 mais l'ordre premier puis second partage, et pour chacun plus grand puis plus petit nombre. Le seul qui fasse ici exception est le dernier, les deux nombres du premier partage pris ensemble, dont il n'est pas question directement dans l'énoncé mais qui est plutôt induit par l'étape (2e), elle-même une 'retraduction' de l'énoncé. Le verbe qui gouverne la phrase finale, 'j'ai posé', ne renvoie *a priori* qu'à la toute première correspondance, effectivement introduite par 'que soit posé' ; mais on voit que tous les autres, qui sont en réalité calculés, mis en correspondance par calcul, sont assimilés ici à un 'poser'.

On constate donc, en tout cas, que *l'énoncé* et sa *structure algorithmique* jouent un rôle fondamental dans le procédé de *justification* visiblement à l'œuvre dans l'étape 2 : c'est en cela qu'on peut dire que ce type de formulation et de raisonnement ancre la mise en équation dans la structure de l'énoncé. Cet ancrage est double : il passe non seulement par une référence, directe ou indirecte, aux rapports et opérations que contient l'énoncé, mais aussi par une référence à la manière de nommer, de différencier les nombres en jeu dans l'énoncé, différenciation pour laquelle l'énoncé instancié joue souvent un rôle important. Les noms des nombres, et leurs rapports mutuels, sont les points de référence de la justification.

Je termine ici cette analyse détaillée du « fonctionnement » de deux résolutions diophantiennes parmi les plus simples. On peut aller plus loin et s'intéresser à des problèmes autrement plus complexes que ceux que contient le livre I : on verrait alors que les remarques faites ci-dessus s'appliquent encore, et d'autant mieux que plusieurs des résolutions des livres II et III s'appuient sur l'énoncé explicite d'algorithmes ou de procédures qui font le « pont » entre l'énoncé et les premières mises en correspondance faites par Diophante. On pourra trouver un exemple de telles analyses sur le problème II.34 dans une « version longue » du présent article [Bernard 2013], et sur le problème II.8 dans [Bernard 2011]. Pour l'heure, et pour ne plus fatiguer le lecteur avec ce qui lui paraîtra peut-être – à tort ! – comme une insistance complaisante sur des détails de formulation, j'en reviens au thème annoncé.

5. — Conclusions didactiques : comment résoudre par l'algèbre, sans quitter l'ancrage sémantique du problème ?

Revenons-en maintenant au problème posé au départ, concernant la possibilité d'employer une forme de calcul algébrique de telle sorte que le lien avec les aspects sémantiques du problème ne soient pas 'perdus' en cours de résolution, et par la nature même de la résolution. Le premier constat est très simple : c'est que c'est effectivement ce qu'on trouve dans le mode 'diophantien' de résolution des problèmes arithmétiques. L'étape d'une résolution où l'on met en correspondance les nombres de l'énoncé, avec les termes, symboles ou expressions de l'algèbre, est très précisément l'espace que Diophante 'investit' pour enseigner l'art d'inventer des solutions aux problèmes.

A contrario, Diophante n'ignore pas les difficultés du calcul sur les termes et expressions de la théorie arithmétique, qui sont l'équivalent pour nous du « calcul algébrique », et qui comme dans ce dernier cas nécessite des algorithmes aussi spécifiques que délicats à apprendre. Ainsi, la partie de l'introduction où il précise ces rapports occupe la plus grande partie de son introduction, et il précise encore que, pour les expressions qui sont faites d'un agrégat d'espèces, il faut longuement s'entraîner à calculer avec eux. Mais ces calculs, sauf peut-être dans les justifications de la première étape, où leur structure algorithmique peut servir, n'occupent pas une place prépondérante. Dans la première partie de la solution, quand il s'agit de faire les calculs qui sont justifiés par des opérations indiquées, directement ou non, dans l'énoncé, ou dans un algorithme « simulateur », ces calculs sont rarement indiqués en tant que tels, on en donne surtout le résultat, comme on l'a vu. Quant aux calculs qui interviennent sur les deux membres d'une équation, Diophante en fait très souvent l'ellipse, comme si le lecteur pouvait les reconstituer par lui-même.

Dans les termes de l'article déjà cité [Guichard 2002], cela veut dire que toute la partie d'apprentissage du calcul littéral (pour nous) ou du calcul sur les espèces (pour Diophante, qui s'appuie moins sur des *lettres* que sur des *noms*) n'est pas un enjeu central ni pour Diophante, ni pour l'analyse que je propose ici. À la rigueur, l'enjeu pour Diophante semble plutôt de *minimiser* autant que possible ces difficultés d'apprentissage en cherchant des stratégies de résolution qui évitent délibérément des calculs trop complexes : idéalement, ces derniers devraient pouvoir être conduits 'de tête'. Un exemple célèbre est la série des énoncés de problèmes où la somme ou la différence de deux nombres est donnée, ainsi qu'une combinaison quadratique des deux (le produit, la somme des carrés, etc.). Par contre, tout ce qui relève de *la mise en équation*, un autre des enjeux de l'article précités, rejoint très certainement un enjeu central de l'art diophantien, et du problème posé ici.

Concernant ce problème de la mise en équation, j'ai proposé dans le chapitre d'un ouvrage inter-IREM déjà évoqué [Bernard 2011], un exemple de traitement 'à la Diophante' d'un problème de collège, où l'élève est sensé reconnaître quasi automatiquement qu'on attend de lui une résolution algébrique, avec introduction d'une ou deux inconnues. Je reprends ici cet exemple pour en approfondir le commentaire :

> [énoncé] *Une rose coûte 8F de plus qu'une marguerite. Un bouquet de cinq marguerites et de sept roses coûte 104F. Quel est le prix d'une rose ? Quel est le prix d'une marguerite ?*
>
> [Solution « diophantienne »]
>
> • Posons que le prix d'une rose est un truc

- (mais une marguerite coûte 8F de plus qu'une rose)
- *Donc* le prix d'une marguerite est donc un truc auquel manquent 8F
- Le prix de sept roses, en outre, sera sept trucs.
- ... et le prix de cinq marguerites, 5 trucs auxquels manquent 40F
- *Donc* le prix de sept roses et de cinq marguerites sera douze trucs auxquels manquent 40F
- Mais ce prix est aussi 104F. On en tire facilement le truc : 12F.
- Revenons à ce que nous avons posé plus haut : le prix d'une rose est 12F, celui d'une marguerite est 4F.

Je reviendrai plus loin sur la question du choix des « bons » énoncés, qui est un enjeu majeur de l'article de Jean-Paul Guichard précité [Guichard 2002] et en général des études qui s'intéressent à l'initiation à la résolution de problème – algébrique ou non. L'important dans la solution ci-dessus est de faire du repérage des termes de l'énoncé, dans les termes du 'truc' et de ses composés, le centre d'un *raisonnement*. C'est le raisonnement, appuyé sur le vocabulaire de l'énoncé et ses paraphrases éventuelles, qui est important. Quant au calcul par contre, on peut ici lui donner une expression minimale, ou même suggérer, à l'exemple de Diophante comme on l'a vu, qu'on a tout avantage à ce que l'équation obtenue, ou les calculs qui y mènent, soient les plus simples possibles. Par exemple, on pourrait choisir ici de poser qu'une marguerite, non une rose, est « un truc », pour éviter d'introduire des 'défauts', toujours délicats à traiter dans les calculs.

Il est important de suivre jusqu'au bout les traces de Diophante et d'identifier ce qui fait le fondement de ce type de raisonnements. Le premier d'entre eux tient à sa remarque préliminaire concernant les énoncés de problèmes. Le fait est que la plupart des énoncés diophantiens ont une forme 'abstraite' : il ne s'agit pas de roses ou de marguerites, mais de nombres, de leurs carrés ou cubes ; en outre les prescriptions algorithmiques qui les relient dans l'énoncé, ou « tressent » ce dernier, sont toujours très explicites. Un premier travail, pour permettre une solution, est donc certainement d'identifier cette 'structure abstraite' de l'énoncé. Dans ce cas, une traduction 'diophantienne' de l'énoncé donnerait « trouver deux nombres en différence donnée, de telle sorte qu'un multiple donné du premier, s'ajoutant un multiple donné du second, fasse un nombre donné » - cet énoncé est très proche, dans l'esprit, des énoncés des premiers problèmes de Diophante.

Un second fondement tient à la pluralité des nombres cherchés, qui sont presque toujours, chez Diophante, deux ou plus. Il est en effet clair que la méthode diophantienne développe toute sa richesse pour des problèmes qui ont 'plusieurs inconnues' (en termes modernes) ou plusieurs nombres à chercher à la fois (en termes diophantiens). Ceci nous reconduit à une analyse de Jean-Paul Guichard dans [Guichard 2002, pp.9-10] : il compte en effet ce type d'énoncé comme un énoncé « déraisonnable » pour débuter dans le calcul algébrique, car (pour résumer brutalement l'argument) il comporte *deux* inconnues et non une seule. Je suis d'un avis un peu différent, pour la raison très précise, qui suit l'usage diophantien, qu'il importe de distinguer très nettement les *nombres qu'on cherche*, qui ne sont *pas* des inconnues, de *l'inconnue*, au sens précis où l'entend Diophante et que Jean-Paul Guichard qualifie « d'inconnue auxiliaire », à savoir un nombre indéterminé sur lequel on peut, comme en algèbre, calculer pour conduire l'analyse du problème.

J'ai choisi le problème ci-dessus pour des étudiants se préparant au CAPES de mathématiques, très précisément pour la raison qu'ils identifient spontanément, et à raison, ce type de problème, comme relevant d'un système algébrique de deux équations à deux inconnues. Ce réflexe conditionné, comme le relève Jean-Paul Guichard dans sa critique, est inculqué en France dès la classe de troisième en donnant l'habitude de reconnaître systématiquement dans ce type de problème un exercice « typique » des résolutions de deux équations à deux inconnues. L'intérêt de l'énoncé est précisément qu'il ne fait *aucune* allusion à de telles méthodes : la confusion ne vient que de l'usage malheureusement enraciné relevé ci-dessus, qui consiste à confondre l'énoncé avec ce type particulier de résolution, et à passer d'une traduction possible à une identification. C'est ce réflexe conditionné qui est en cause, pas l'énoncé lui-même. Car il y a bien des façons d'aborder et de résoudre ce problème très simple, la majorité ne passant d'ailleurs pas par l'algèbre : tout l'enjeu est de se déprendre de mauvais réflexes, et de voir *les énoncés de problèmes pour ce qu'ils sont*, dans leur simplicité « nue » de toute technicité exclusive, et au contraire ouverts à différentes méthodes possibles.

Le deuxième fondement est de disposer d'un langage procédural clair et non ambigu, qui permette d'identifier les différents nombres qui font l'enjeu du problème. Le piège du système de symboles algébriques qui nous est devenu familier est qu'il ne convient vraiment qu'à une *écriture* de ces nombres : nous différencions spontanément deux nombres vérifiant telle ou telle conditions en appelant, en fait en écrivant, l'un « X », l'autre « Y ». Mais nous ne sommes plus bien habitués à dire que l'un est le *moindre*, l'autre *le plus grand* des deux, par exemple. Il en va ici des désignations adoptées, comme des symboles adoptés pour désigner une fraction, $^p/_q$ par exemple, au lieu de *dire* que l'un est le *dénominateur* et l'autre le *numérateur*. Le point commun est que l'écriture symbolique est non signifiante par elle-même, alors que l'appellation verbale l'est, comme on l'a vu dans les exemples proposés plus haut : ils permettent le sens, la connexion entre tel nombre de l'énoncé, et tel nombre qu'on pose ou calcule ensuite.

Si on veut affiner encore, il faut remarquer que les dénominations retenues pour les nombres cherchés ne sont pas uniques mais évoluent au fil des paraphrases qu'on en fait, notamment dans la phase d'instanciation : les « valeurs numériques » de Diophante n'ont pas pour seule vertu d'instancier, justement (de proposer un « exemple concret ») mais peut-être aussi de permettre des nominations, qui s'avèrent essentielles pour la bonne compréhension de la solution.

Le troisième fondement, peut-être l'un des plus subtils pour l'art de 'bien justifier' la solution des problèmes, est de savoir jouer sur des correspondances algorithmiques. La première correspondance fondamentale, est celle qui relie des relations entre nombres de l'énoncé (un rapport de côté à carré, pour reprendre le premier exemple de Diophante) et les règles opératoires qui valent pour les espèces, nos 'termes algébriques'. Mais plus profondément, on voit qu'il faut s'entraîner à pouvoir abstraire d'une chaîne procédurale donnée, par exemple connue depuis un autre contexte, une sous-procédure qui sera commune à une prescription de l'énoncé. Cette souplesse, pour ne pas dire cette finesse dans la traduction, renvoie à une vraie capacité à jouer sur les algorithmes, que ce soit pour les inverser (la somme est le contraire du partage, comme dans les problèmes I.1 et I.12) ou pour les mettre en correspondance.

Ceci nous amène au quatrième fondement, étroitement lié celui-là à la question du *schématisme* des solutions diophantiennes et qui est inséparable des précédents : tout ceci ne s'acquiert, comme le suggère Diophante, que par l'effet d'une savante répétition, c'est-à-dire au fil d'une série de problèmes. Aussi bien le schématisme de la solution, que la capacité à établir de différentes manières des correspondances entre l'énoncé, et des expressions théoriques adéquates, s'acquièrent et se comprennent au fil d'une répétition de complexité graduelle. Il n'y a donc pas ici non plus de contradiction entre les longues séries de problèmes aptes à faire assimiler une méthode de résolution particulière, et la manière dont on peut s'imprégner de l'art diophantien de 'bien poser' un problème. Il y faut du temps et une longue série d'exemples, qui soient *quasi répétitifs*. On rejoint ici un souci majeur de l'article de Jean-Paul Guichard, qui est non seulement de proposer une réflexion sur les difficultés de la mise en équation et de son apprentissage, mais d'en tirer encore une progression pertinente [Guichard 2002, annexe p.19-24] : c'est ce que je n'ai pas fait pour ma part pour l'instant, et je laisse cette question ouverte aux amateurs. Autrement dit, quelle serait, pour cet article, la « bonne annexe » de problèmes à construire ? Ou du moins, selon quels principes faudrait-il la construire ? La question est ouverte.

Il faut enfin s'arrêter au terme « d'expression » que j'ai employé ci-dessus, et revenir au second objectif de cet article, qui est de remettre à l'honneur une algèbre qu'on qualifie depuis longtemps de « rhétorique », dans un contexte moderne, le nôtre, qui invite fortement à le faire. On a vu que je me suis volontairement passé dans mes commentaires de toute transcription symbolique des solutions, de façon à faire entrer le lecteur dans une compréhension véritablement verbale de la logique de la solution diophantienne. Cette verbalisation n'est *pas* naturelle, et cette remarque nous conduit dans le vaste champ de réflexions sur les manières de penser les raisonnements *en se passant* d'un recours à l'écriture. Dans un contexte, le nôtre celui-là, où le rapport de nos élèves à l'écriture change très profondément au profit de formes d'écriture courtes et d'interactions orales, une telle approche peut prendre une certaine importance. Cette remarque, qui me servira de conclusion, rejoint une observation judicieuse de Jean-Paul Guichard sur un extrait de l'algèbre de Lacroix [Guichard 2003, p.14] : « *la rédaction explicite, par de courtes phrases, les raisons des transformations des expressions algébriques, rédaction le plus souvent absente des écrits algébriques de nos élèves* ». Cette remarque s'applique au « phrasé » diophantien, dont la construction même, pourvu qu'on ne fasse pas le choix d'une traduction littérale, impose cette verbalisation.

BIBLIOGRAPHIE

AUJAC, Germaine. 1984. « Le langage formulaire dans la géométrie grecque ». *Revue d'histoire des sciences* 37 :2, 97-109. Disponible en ligne sur le portail *Persée*.

BERNARD, Alain. 2011. « Les Arithmétiques de Diophante: sur la cohérence d'une œuvre ancrée dans différentes traditions antiques, et sur la manière de bien la lire. » In P. Ageron et E. Barbin (ed.) *Circulation Transmission Héritage, Actes du colloque inter IREM de Caen*. Caen : IREM de Caen. 557-582.

BERNARD, Alain et CHRISTIANIDIS, Jean. 2012a. « A new analytical framework for the understanding of Diophantus's Arithmetica I–III ». *Archive for History of Exact Sciences* 66: 1–69.

BERNARD, Alain. 2013. « Résoudre un problème par l'algèbre sans en perdre le sens : sur les traces de Diophante d'Alexandrie. VERSION 1 ». hal-SHS (version préliminaire « longue » du présent article).

CAVALLO, Guglielmo et CHARTIER, R. (dir). 2001. *Histoire de la lecture dans le monde occidental*. Réédition de l'édition de 1997, collection « Points histoire ». Paris : Seuil.

CAVALLO, Guglielmo et BORGHETTI Maria-Novella. 2001. « Le rossignol et l'hirondelle ». Lire et écrire à Byzance, en Occident. *Annales. Histoire, Sciences Sociales*, 56e année, N. 4-5, 849-861.

CHRISTIANIDIS, Jean 2007. « The way of Diophantus: Some clarifications on Diophantus' method of solution ». *Historia Mathematica* 34:3, 289–305.

GUICHARD, Jean-Paul. 2002. « Équations et calcul littéral en quatrième. » *Repères-IREM* 46, 5-25. Disponible en ligne sur le portail des IREM.

GUICHARD, Jean-Paul. 2003. « D'un problème de Diophante aux identités remarquables. » *Repères-IREM* 53, 5-19. Disponible en ligne sur le portail des IREM.

GUITART, René. 1999. *La pulsation mathématique: rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire*. Paris ; Montréal (Québec) : l'Harmattan.

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE. 2008. « Programmes du collège / Programmes de l'enseignement de mathématiques ». *Bulletin Officiel* spécial n°6 (consultable en ligne).

MOYON, Marc. 2007. « La tradition algébrique arabe du traité d'al-Khwârizmî au Moyen âge latin et la place de la géométrie ». In Barbin, E. & Bénard, D. (coord.) *Histoire et Enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements*, 289-318. Lyon/Clermont-Ferrand : INRP/IREM.

VER EECKE, Paul. 1925/ 1959. *Diophante : Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. Paris : Blanchard (réédition 1959).

VITRAC, Bernard. 1995. « Euclide et Héron : Deux approches de l'enseignement des mathématiques dans l'Antiquité ? ». *Science et vie intellectuelle à Alexandrie (Ier-IIIe siècle après J. C.)*, G. Argoud (éd.), 121-145. Disponible en ligne sur hal-SHS.