QUE RESTE-T-IL DE NOS... *x* ET *y* ?

Daniel REISZ
Irem de Dijon

L'algèbre est [...] *une sorte de machine à raisonner: vous tournez la manivelle et vous obtenez, sans fatigue, un résultat auquel la pensée n'arriverait qu'avec des peines infinies.*

Alain, Propos, 1927

En matière de programmes nous posons-nous toujours les bonnes questions? J'en parle d'autant plus librement que durant de longues années j'ai été membre de différentes commissions, groupes de travail, ... chargés de la rédaction des programmes de mathématiques (et souvent de leurs commentaires) pour le collège et le lycée. Ces choix ont toujours fait l'objet de débats sérieux et poussés, la ligne directrice explicite ou implicite étant toujours de mettre au programme du niveau n ce qu'il faut pour pouvoir poursuivre au niveau $n + 1$ dans notre discipline. Cette logique ne peut pas être balayée d'un revers de main, mais il faudrait l'accompagner d'autres questionnements sur les finalités d'un enseignement de mathématiques. Grosso modo, toute une classe d'âge est scolarisée au collège et une grande majorité d'une classe d'âge au lycée, même si à ce niveau apparaissent des voies différenciées, en particulier pour ce qui concerne l'enseignement de notre discipline. En réalité, tâche difficile, voire impossible, il faudrait, à tout niveau, à la fois enseigner des bases qui permettent des poursuites d'études mathématiques, participer à la mise en place d'une culture scientifique qui laisse une trace effective et enfin participer à cette formation de l'esprit critique même si dans les faits les réminiscences mathématiques se seront pour la plupart effacées. Cette ambition, cette triple ambition, est souvent affichée dans de grandes envolées lyriques qui servent d'introduction aux programmes, mais cela est beaucoup moins prégnant lorsqu'on regarde les programmes en terme de contenus. Remarquons d'ailleurs que ce questionnement se pose, avec des variantes, pour les différentes disciplines.

Dans cette perspective les enjeux de l'enseignement des premiers éléments d'algèbre et d'analyse au collège et au lycée sont symptomatiques.

Quittons un peu notre milieu de profs de maths, quittons même un peu notre milieu enseignant. Dans les dîners en ville, dans les réunions de famille, au café du commerce, c'est-à-dire avec des adultes/anciens élèves qui n'ont pas fait d'études mathématiques, parlons de mathématiques et de ce qu'il en reste dans la tête des uns et des autres (Ne perdons pas de vue que cela représente une large majorité de la population.) Quels souvenirs, quelles perceptions didactiques implicites concernant l'algèbre et l'analyse élémentaire leur restent-ils ?

Avec ces interlocuteurs, comme avec nos élèves, nous avons de surcroît droit au fameux : *A quoi ça sert ? Est-ce que cela m'a moindrement servi à un moment ou à un autre ?* Certes pour nous, pour ceux qui ont poursuivi leurs études mathématiques, l'intérêt de ces fondamentaux de l'algèbre et de l'analyse est patent, comme l'est l'intérêt d'étudier le solfège si on veut pratiquer la musique à un certain niveau. Mais pour les autres, c'est-à-dire pour la très grande majorité ? Il reste très souvent l'image d'un exercice purement scolaire dont la seule utilité est d'y obtenir de bonnes (ou de moins bonnes) notes, de réussir le brevet ou le baccalauréat. C'est un peu maigre dans le contexte d'une culture générale !

Dès qu'on questionne la population « non-mathématicienne » au sujet de l'algèbre et de l'analyse, on perçoit tout de suite des seuils de décrochage. Une minorité de personnes se disent fâchées depuis leur plus jeune âge avec tout ce qui touche au numérique. Leur cas est en quelque sorte désespéré, en tout cas pour la question qui nous préoccupe ici. Une partie importante des autres disent avoir décroché *lorsqu'il y a eu les « x » et les « y »*, c'est-à-dire les premiers éléments d'algèbre. D'autres encore placent leur seuil de décrochage en classe de Première avec le concept de dérivée : *Je n'y ai rien compris. Heureusement qu'il suffisait d'appliquer les formules !*

Bien sûr que pour ceux d'entre nous qui ont poursuivi leurs études mathématiques, d'autres seuils de décrochage, plus coriaces, sont apparus tôt ou tard. Notre propre expérience nous montre aussi qu'un décrochage peut ne pas être définitif. Un temps de maturation, de pratique, peut ultérieurement mener vers une appropriation du concept. A titre personnel (et je ne dois pas être le seul) le concept de dérivée n'était sans doute pas installé en classe de Première. Remarquons aussi que notre population « non-mathématicienne », ne mentionne pas des seuils aussi précis en géométrie, si ce n'est le sempiternel *Je n'y voyais rien dans l'espace !* et parfois l'apparition de la *démonstration géométrique*.

Revenons à l'algèbre et d'abord au seuil constitué par l'apparition des « *x* » et des « *y* ». Qu'entendons-nous, dans l'enseignement secondaire, par «algèbre». Essentiellement deux secteurs non disjoints. Celui du calcul algébrique qui consiste à transformer une expression algébrique pour lui donner une autre forme, soit pour des raisons utiles, soit dans le cadre d'une simple gymnastique scolaire. Ce sont les classiques *Développer, factoriser, simplifier,...* Et celui lié à la résolution d'équations (équations, inéquations, systèmes d'équations,...). La spécificité la plus apparente de cette algèbre élémentaire est l'usage de l'écriture littérale des nombres. Nous avons souvent l'impression qu'il suffit simplement de dire, de répéter, que les lettres représentent des nombres. Les résistances, les difficultés, les blocages, les rejets montrent qu'il n'en est rien, malgré toutes nos qualités de pédagogues. Lorsque ensuite on explique

— ou on sous-entend dans la pratique — qu'il y a derrière les lettres différents statuts de nombres, cela devient encore plus délicat. J'aime, à ce sujet, rappeler cette boutade : « Les premières lettres de l'alphabet a, b, c,... sont des constantes, celles du milieu k, l, m, n,... des paramètres et celles de la fin t, x, y, z des inconnues ou des variables.»

Lorsqu'on interroge plus avant les personnes qui ont décroché à ce stade, les réponses sont intéressantes : 2 + 3 *ça fait* 5, 3 × 4 *ça fait* 12, *mais on ne sait jamais ce que fait x + y ou xy !* A certains qui ont gardé des souvenirs un peu plus précis on peut rétorquer qu'on ne sait pas non plus *combien font* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, mais un sens quasi inné des approximations va donner du sens à ce $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, un peu de la même façon que 3,14 donne du sens à π, même lorsqu'on sait que ce n'est qu'une valeur approchée. Et puis il y a les calculatrices qui donnent « le » résultat !

Remarquons d'ailleurs que ce seuil lié à l'introduction de l'écriture littérale telle que nous la pratiquons de nos jours, est attesté par l'histoire des mathématiques. Entre les premiers balbutiements de l'usage de lettres dans la résolution d'équations algébriques, autour du Xème siècle et nos écritures actuelles qui s'installent vers le XVème-XVIème siècle, il y a près de 500 ans d'efforts, de réticences, de formes avortées.

Regardons à présent l'autre seuil de décrochage souvent cité : l'introduction de la notion de dérivée en classe de Première. C'est évidemment une difficulté réelle qu'il serait vain de sous-estimer. On pourrait penser que la définition de la tangente en un point d'une courbe comme position limite d'une corde, ouvre la voie. L'image géométrique est prégnante mais cela reste une image géométrique. Il en est de même des premiers contacts avec des limites : ce sont très souvent des limites à l'infini, intuitivement plus faciles à concevoir. Pour la dérivée on est devant un phénomène plus délicat, résistant à l'intuition : se convaincre que $\frac{0}{0}$ peut en quelque sorte prendre du sens, que le rapport de deux quantités tendant simultanément vers 0 peut prendre (ou ne pas prendre) une valeur précise et que cette valeur dépend en l'occurrence de la « forme » du numérateur. Tout cela est hautement délicat et emmène les élèves sur un terrain totalement nouveau. Ce qui va probablement fonctionner est la détermination de la fonction dérivée à travers les formules classiques et son utilisation pour étudier les variations d'une fonction ou l'établissement de l'équation de la tangente en un point de la courbe représentative. L'aspect *approximation linéaire d'une fonction au voisinage d'un point* reste à l'arrière plan et ne laisse en tout cas aucune trace durable chez nos non-mathématiciens. Il en est de même des illustrations que le physicien aura pu évoquer. C'est en particulier le cas quant à l'idée qu'il y a un rapport entre la vitesse instantanée d'un mobile, notion qui fait sens, et la dérivée. Lorsqu'on pousse un peu plus avant le questionnement, il y a deux réactions, toutes deux très définitives :

— oubli complet de toute idée aussi vague soit-elle ;

— souvenir vague d'un monde impénétrable malgré les efforts du professeur.

Là encore ce seuil est attesté par l'histoire des mathématiques. Il y a dès l'antiquité, une certaine pratique « d'infiniments petits » (Archimède). Il y a beaucoup plus tard, au début du XVIIème siècle, un fourmillement de résultats particuliers (Kepler, Cavalieri, Descartes, Fermat, Barrow,...), annonciateurs du calcul différentiel, mais il faut attendre Newton et son *rapport de deux quantités évanescentes*, son *calcul des fluxions* et Leibniz qui formalisera, algébrisera, ce calcul différentiel à la fin du

XVIIème siècle. Les véritables fondements, sans rapport avec les préoccupations d'un élève de Première, attendront le XIXème siècle avec Cauchy et les analystes allemands, tel Weierstrass. Il n'y a donc rien d'étonnant que ce seuil soit ressenti comme tel par les élèves, y compris par ceux qui le dépasseront.

On peut comprendre ceux de nos interlocuteurs qui n'ont absolument pas fait d'études scientifiques ou techniques. Qu'un littéraire, un juriste, un employé de bureau, un artiste,... ne garde aucune trace de l'enseignement mathématique reçu, passe encore. Mais bon nombre de techniciens, d'artisans, d'utilisateurs à des niveaux relativement élevés de l'informatique, de médecins, voire d'ingénieurs, tiennent ce discours est plus inquiétant. On peut se consoler en se disant que la plupart n'utilisent peut-être plus jamais explicitement des maths, mais en font un usage implicite que notre enseignement leur permet de faire : lire un graphique, comprendre une notice, faire des calculs assez élaborés, ne pas se laisser piéger par les chiffres et les sondages cités par les médias.... Gardons espoir !