LE SENS DE LA FORMULE...

Michel CHEVALLIER
Jean-Luc de SEEGNER
Irem de Rouen

Depuis le début des années 80, avec l'arrivée massive des calculatrices puis la mise en œuvre du plan « Informatique pour tous », les différentes réformes des programmes d'enseignement ont imposé une intégration de plus en plus importante des nouvelles technologies numériques. Depuis l'an 2000, la demande institutionnelle a peu à peu renforcé l'utilisation des TICE en classe jusqu'à la récente introduction de l'algorithmique au lycée et l'apparition prochaine de l'option ISN en terminale S (Informatique et Sciences du Numérique) ; les logiciels à utiliser ont aussi évolué : l'offre de tableurs et de logiciels de géométrie dynamique (LGD) s'est diversifiée et des logiciels de calcul formel et des langages de programmation ont fait leur apparition. Dans le même temps, on a constaté des évolutions technologiques importantes avec des calculatrices plus « performantes » et des logiciels permettant un usage croisé des outils (tableur, LGD, grapheur, calcul formel dans un même logiciel).

Parallèlement, les usages dans les classes n'ont pas progressé au même rythme. Au-delà des contraintes matérielles réelles et du manque de connaissances techniques, tous les enseignants de mathématiques ne sont pas encore pleinement convaincus de l'efficacité pédagogique de l'utilisation des TICE en classe pour diverses raisons [1] (complexité du métier,

1 Par exemple, on trouve des explications dans l'introduction de la thèse de Nuray ÇALIŞKAN-DEDEOĞLU (2006): « Usages de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en œuvre : quelles motivations, quelles pratiques ? » (pages 17-18).
Cette thèse et la plus grande partie des documents cités dans cet article sont accessibles en ligne sur le site de l'Irem de Rouen : http://irem.univ-rouen.fr/tuic/biblio.

habitudes de fonctionnement, conceptions des savoirs enseignés).

Les différentes recherches ou thèses universitaires sur le sujet ont montré les potentialités des outils [2] sans pour autant démontrer leur efficacité pédagogique [3] dans la classe. Comme le souligne un rapport de l'INRP, une des difficultés provient de la transposition informatique à laquelle s'ajoute celle liée à la transposition didactique : « Les objets de savoir se trouvent modifiés non seulement sous les contraintes de la transposition didactique mais aussi sous d'autres contraintes spécifiques à l'environnement informatique » [4]. L'intégration des TICE nécessite donc de la part des enseignants « un changement en profondeur de la conception de l'enseignement, tant dans la présentation des contenus mêmes d'enseignement que dans les formes d'activités » [5].

Faisant référence à de nombreux travaux de recherche, Michèle Artigue [6] souligne que les utilisations de base des logiciels, accessibles facilement aux enseignants, se révèlent être celles qui tirent le moins parti des potentialités pour l'apprentissage des élèves avec cette technologie : les usages se concentrent sur la production de résultats liés à une tâche papier/crayon et peu sur la compréhension des objets mathématiques mis en œuvre à travers l'outil ; les usages actuels peuvent-ils être considérés comme majoritairement peu efficaces pour l'enseignement ?

Dans cette perspective, les logiciels utilisés sont-ils conçus pour faire des mathématiques ? Sont-ils conçus pour les enseigner ? Il est évident que montrer l'image dynamique de la méthode des rectangles en classe de terminale ou faire manipuler un LGD par des élèves pour construire le cercle circonscrit à un triangle dans une activité guidée ne suffisent pas à leur donner accès au savoir étudié. De quelles manières peut-on donc utiliser ces logiciels pour enseigner les mathématiques ? Quel rôle doivent-ils jouer dans l'activité mathématique ? Dans cet article, on s'intéressera au cas des tableurs qui, contrairement aux LGD, n'ont pas été conçus initialement pour faire des mathématiques mais ont été détournés pour un usage principalement algébrique. On analysera d'abord les utilisations qui en sont faites habituellement et on proposera des pistes, confortées par la recherche, pour adapter cet outil à l'enseignement des mathématiques. On abordera ensuite l'instrumentalisation nécessaire à une utilisation raisonnée et efficace du tableur par les élèves. On terminera par des exemples d'intégration des TICE dans des activités mathématiques adaptées.

Des utilisations du tableur à l'enseignement des mathématiques.

Les programmes insistent particulièrement sur l'utilisation du tableur au collège en classe pour accompagner des travaux à propos des

2 Par exemple, Thèse de Angela Maria Restrepo (Octobre 2008) : « Genèse instrumentale en géométrie dynamique chez les élèves de sixième ».
3 Par exemple, André Tricot, IUFM Midi Pyrénées & Laboratoire cognition, Langues, Langage, Ergonomie UMR 5263 CNRS, EPHE & Université Toulouse 2 : « Grâce aux TICE, une école plus efficace ? A voir… », *L'Actualité Educative des Cahiers Pédagogiques*, 483, sept-oct 2010.
4 Hamid Chaachoua, responsable du projet, rapport de recherche : « Usages éducatifs des technologies de l'information et de la communication : quelles nouvelles compétences des enseignants ? », INRP, IUFM de Grenoble, Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, 2004, page 3.
5 Colette Laborde, « Calculatrices symboliques et géométriques » dans les *Actes du colloque Européen francophone de la Grande-Motte*, 1999, page 80.
6 Michèle Artigue, « L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques : contenus et pratiques », Université Paris 7 Denis Diderot (janvier 2008).

équations, des fonctions et du calcul littéral en général ainsi qu'en gestion de données ; de plus, ils pointent l'acquisition de compétences du socle à propos des références de cellules : « l'élève doit savoir créer, interpréter, comprendre, utiliser une formule comprenant non seulement des références relatives mais aussi des références absolues (les références mixtes sont exclues) »[7].

L'utilisation la plus fréquente par les enseignants est basée sur des fiches ou des activités du manuel décrivant les actions techniques à effectuer pour réaliser une feuille de calcul en lien avec un savoir enseigné. Les consignes portent principalement sur le remplissage de cette feuille dont l'observation permet de répondre à une question finale à propos d'une propriété recherchée. Voici (ci-dessous) un exemple[8].

On demande souvent d'écrire des formules avec des références de cellules comme dans cet exemple, mais aussi d'effectuer des recopies, de créer des suites de nombres, de tester une égalité, etc. On espère ainsi permettre aux élèves de concevoir ce qu'est la lettre en mathématiques mais force est de constater un décalage entre les attentes de l'enseignant et la réalité des apprentissages.

Durant de telles séances, l'enseignant fournit souvent de nombreuses instructions et aides techniques aux élèves qui se concentrent sur l'usage de l'outil : l'objectif mathématique devient secondaire et le plus souvent, l'enseignant guide voire pointe lui-même l'observation attendue dans les dernières minutes de la séance.

Dans cette description de l'activité des acteurs au sein de la classe, plusieurs éléments émergent :

— ce qui est écrit comme instruction dans les cellules ne fait pas sens pour les élèves et

1 – Multiplier par 10, 100, 1000 ...

a) Créer une formule de calcul

- ❑ Entre un nombre dans la cellule Q2
- ❑ Sélectionne le nombre 10 dans la cellule Q4
- ❑ Dans la cellule Q6, nous allons entrer une formule permettant de **multiplier** le nombre de la cellule Q2 par le nombre de la cellule Q4. Pour cela :
  - o Clique sur Q6
  - o Tape =
  - o Clique sur la cellule Q2
  - o Tape *
  - o Clique sur la cellule Q4
  - o Valide la formule en appuyant sur la touche entrée du clavier

b) Utiliser une formule de calcul

- ❑ Entre un autre nombre dans la cellule Q2.
- ❑ Vérifie que le nombre en Q6 s'est modifié

c) Multiplier par 10

- ❑ Compare le nombre dans la cellule Q2 et celui obtenu en Q6. Que constates-tu ? aide-toi du tableau.

- ❑ Vérifie ton observation en modifiant le nombre en Q2.

7 Site Eduscol, livret personnel de compétences, Palier 3, Grilles de référence pour l'évaluation et la validation des compétences du socle commun, novembre 2010.

8 http://maths.spip.ac-rouen.fr/spip.php?article145 consulté le 18/10/2012.

ne correspond pas aux notations de l'enseignant au tableau ;

— on constate un fort guidage technique que ce soit au niveau de la consigne ou dans la salle de classe ;

— l'aspect mathématique est occulté par la technique informatique nécessaire.

Le premier point soulève une difficulté liée à ce que Balacheff nomme *la transposition informatique* [9] : celle-ci transforme les objets mathématiques implémentés dans un système informatique. Ainsi les objets informatisés ne ressemblent pas aux objets mathématiques [10] étudiés. Cela crée d'autant plus un obstacle que l'utilisateur ne maitrise pas l'outil utilisé. Cette transposition dépend des choix des concepteurs de l'outil.

Ainsi, une suite définie par récurrence à l'aide de la relation $u_{n+1} = u_n + 3$ avec $u_0 = 1$ est programmée par exemple avec une calculatrice [11] dans une boucle For par $u + 3 \longrightarrow u$; la formule $u_{n+1} = u_n + 3$ avec $u_0 = 1$ est une représentation concrète de type papier/crayon ; la boucle For avec $u + 3 \longrightarrow u$ est une représentation informatisée.

```
PROGRAM:REC
:Prompt N
:1→U
:For(K,1,N)
:U+3→U
:End
:Disp U
```

La création de la fonction carrée saisie sous GeoGebra avec $f(x) = x$^2 produit l'apparition de la courbe et le pointeur positionné sur la courbe affiche « Fonction *f* » ; la formule x^2 est représentée informatiquement par l'expression *x*^2 ; la courbe tracée est assimilée informatiquement à la fonction. Ces exemples montrent le décalage qu'il y a entre les représentations des objets mathématiques et leurs transcriptions informatiques réalisées par les concepteurs. Mariam Haspékian [12] explique cette transposition informatique pour le tableur : entre autres, elle pointe les éléments introduits par le tableur lui-même comme les références de cellules, la recopie, la réactualisation des données et la fonction « nommer ». Elle met en évidence les difficultés liées à la recopie de formules avec des références cellules. Elle s'intéresse à la fonction « nommer » qui permet de se rapprocher de la conception et de l'écriture traditionnelle d'une formule mais elle note la faible utilisation de cette fonctionnalité dans les ressources professionnelles.

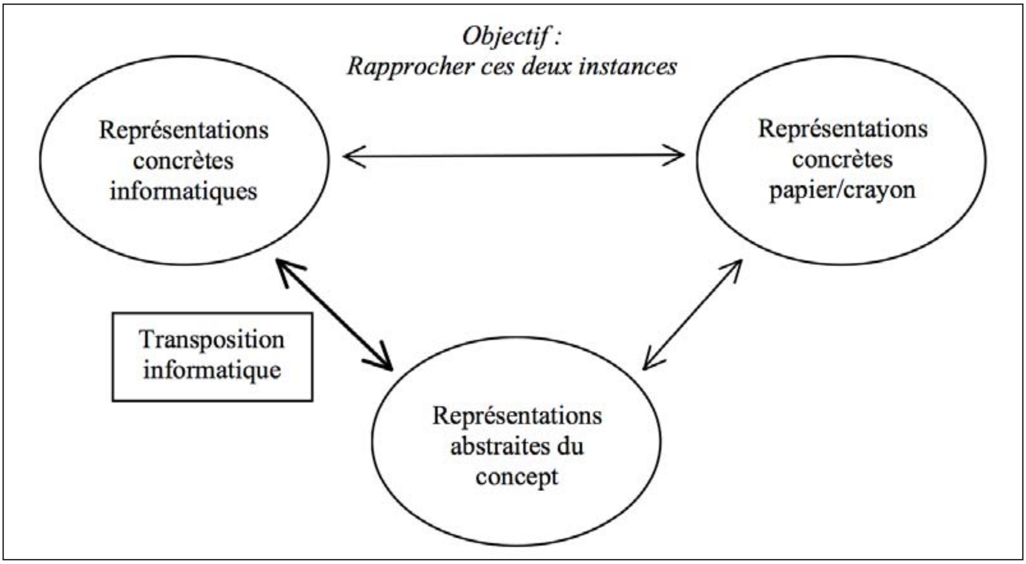
La transposition informatique est vue comme une adaptation d'une représentation abstraite du concept au langage informatique. Cependant, le vécu des élèves est attaché au registre papier/crayon. La construction d'un concept et de ses représentations à l'aide d'un outil informatique est parasitée par les représentations concrètes dans le registre papier/crayon. Si dans un avenir proche, le support papier venait à disparaître au profit exclusif d'outils numériques, cette transposition informatique serait celle décrite dans les travaux de recherche actuels. Aujourd'hui, il faut donc considérer que le passage des concepts aux représentations informatiques transite par le papier/crayon : il est donc nécessaire de rapprocher les représentations dans ces deux registres lors des activités de classe.

9 Nicolas Balacheff, « La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique », in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, 1994.

10 On parle ici des concepts mathématiques et de leurs représentations mentales abstraites.

11 TI 82 stats.fr ou Casio Graph 35+

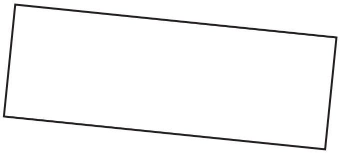
12 Mariam Haspékian, Equipe DIDIREM, Université Paris 7, « Entre arithmétique et algèbre : un espace pour le tableur ? Perspectives didactiques et réalités », in *Actes du Colloque Européen sur l'Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques*, ITEM Reims, juin 2003.



Ce rapprochement n'est pas univoque mais on doit considérer que l'une des représentations se rapproche de l'autre et réciproquement, chacune influençant l'accès au concept.

Par exemple, un enfant qui manipulerait exclusivement un logiciel de géométrie dynamique apprendrait à construire un rectangle à l'aide de droites perpendiculaires uniquement sans passer par un dessin avec des segments perpendiculaires ; son imaginaire concevrait alors le rectangle suivant cette image de droites perpendiculaires :

il obtiendrait ce dessin dans le registre papier/crayon sans tracer aucun segment contrairement à ce que font actuellement les enfants en classe :



On perçoit bien ici les différences de conceptions de l'objet rectangle suivant l'outil principalement utilisé et on comprend aussi la nécessité de ce rapprochement. Raymond Duval [13] pointait déjà ces différences en 2005 dans le registre papier/crayon comme difficultés pour appréhender une figure et accéder à certains raisonnements.

13 Raymond Duval, « Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol 10, 2005

A l'inverse, l'exemple suivant permet de rapprocher l'instance informatique de celle papier/crayon.

On utilise parfois le tableur pour rechercher par essais et ajustements des solutions d'une équation ; supposons que l'on souhaite déterminer des solutions entières des équations de la forme $x^2 + 2x = a$, on souhaite réaliser le tableau de valeurs de l'expression $x^2 + 2x$ pour les entiers x compris entre -10 et 15 puis tester si ces valeurs sont égales à différentes valeurs a.

A l'aide du tableur[14] on peut techniquement réaliser les feuilles de calcul suivantes (images 1 et 2) : elles sont en mode « formule ». La feuille de l'image 1 utilise les références de cellules (relatives et absolues) : elle est couramment utilisée en classe. En général, elle intègre souvent le test logique SI et parfois une liste de nombres générée par une formule. Celle de l'image 2 a été réalisée avec la fonction « nommer » : une plage de cellules a été nommée x, une cellule nommée a et les autres colonnes sont exprimées en fonction de ce « x » et de ce « a ». Elle intègre aussi un test d'égalité sans utiliser de fonctions particulières et une liste de nombres générée sans formule. Cette fonction « nommer » est peu utilisée par les enseignants.

On peut voir sur l'image 3 ci-dessous que ces deux feuilles ont la même apparence en mode « calcul ». C'est leur construction en mode « formule » qui est différente.

D3 =SI(C3=$F$1;VRAI;FAUX)

	A	B	C	D	E	F
1					a=	15
2		x	x^2+2x	$x^2+2x = a$		
3		=-10	=B3^2+2*B3	=SI(C3=$F$1;VRAI;FAUX)		
4		=B3+1	=B4^2+2*B4	=SI(C4=$F$1;VRAI;FAUX)		
5		=B4+1	=B5^2+2*B5	=SI(C5=$F$1;VRAI;FAUX)		
6		=B5+1	=B6^2+2*B6	=SI(C6=$F$1;VRAI;FAUX)		
7		=B6+1	=B7^2+2*B7	=SI(C7=$F$1;VRAI;FAUX)		
8		=B7+1	=B8^2+2*B8	=SI(C8=$F$1;VRAI;FAUX)		
9		=B8+1	=B9^2+2*B9	=SI(C9=$F$1;VRAI;FAUX)		
10		=B9+1	=B10^2+2*B10	=SI(C10=$F$1;VRAI;FAUX)		
11		=B10+1	=B11^2+2*B11	=SI(C11=$F$1;VRAI;FAUX)		
12		=B11+1	=B12^2+2*B12	=SI(C12=$F$1;VRAI;FAUX)		
13		=B12+1	=B13^2+2*B13	=SI(C13=$F$1;VRAI;FAUX)		
14		=B13+1	=B14^2+2*B14	=SI(C14=$F$1;VRAI;FAUX)		
15		=B14+1	=B15^2+2*B15	=SI(C15=$F$1;VRAI;FAUX)		
16		=B15+1	=B16^2+2*B16	=SI(C16=$F$1;VRAI;FAUX)		

image 1

image 2

D3 =x^2+2*x=a

	A	B	C	D	E	F
1					a =	15
2		x	x^2+2x	$x^2+2x = a$		
3		-10	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
4		-9	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
5		-8	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
6		-7	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
7		-6	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
8		-5	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
9		-4	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
10		-3	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
11		-2	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
12		-1	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
13		0	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
14		1	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
15		2	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
16		3	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		

	A	B	C	D	E	F
1					a =	15
2		x	x^2+2x	$x^2+2x = a$		
3		-10	80	FAUX		
4		-9	63	FAUX		
5		-8	48	FAUX		
6		-7	35	FAUX		
7		-6	24	FAUX		
8		-5	15	VRAI		
9		-4	8	FAUX		
10		-3	3	FAUX		
11		-2	0	FAUX		
12		-1	-1	FAUX		
13		0	0	FAUX		
14		1	3	FAUX		
15		2	8	FAUX		
16		3	15	VRAI		

image 3

14 Les images ont été réalisées à partir du logiciel Excel version 2007

Nous avons volontairement regroupé les éléments fréquemment utilisés par les enseignants dans la même feuille de calcul (image 1) : dans la pratique, tous ces éléments n'y figurent pas toujours simultanément. Les références absolues et relatives prédominent dans les usages des enseignants conformément aux instructions officielles.

L'obstacle lié à la transposition informatique est visible dans l'image 1 : l'écriture en référence cellule des formules de la colonne C est très éloignée de l'écriture au tableau ou sur le papier de $x^2 + 2x$. C'est encore plus difficile de visualiser l'équation $x^2 + 2x = a$ dans la colonne D avec ce test conditionnel. Il n'y a pas qu'une seule formule et qu'une seule équation ; il y en a autant que de lignes : chaque cellule contient une formule différente. Dans l'image 2, on perçoit des valeurs, une seule formule et une seule équation : la transposition informatique est réduite ; il persiste tout de même la différence d'écriture de la multiplication, des puissances et la présence d'un signe « = » d'évaluation. Les difficultés de recopie liées aux types de références cellules sont aussi éliminées.

Lorsque la cellule D3 est sélectionnée, on voit dans l'image 1 que les éléments de dépendance font référence à deux cellules (C3 et F1). Dans l'image 2, ces mêmes éléments font référence à une plage de cellules nommée x et à une cellule nommée a. Les couleurs de ces éléments dans le fichier Excel renforcent ce point de vue. On perçoit ici la différence entre variable et paramètre : un ensemble de valeurs possibles pour la première et une seule valeur à la fois pour le second. La liste de nombres de l'image 2, même en mode « formule », renforce cette idée de variable contrairement à ce que l'on voit dans l'image 1 au même endroit.

Dans l'image 2, on entrevoit les possibilités d'un travail en mode « formule » propice à la création de formules utilisant variables et/ou paramètres pour enseigner le calcul littéral.

Pour répondre au problème, on peut utiliser la fonction « filtrer » du tableur pour ne garder que les réponses « VRAI » : voir les images 4 à 7 de la page suivante...

L'objet visuel obtenu, en mode « calcul » (image 6), permet d'identifier des solutions d'une équation.

En passant ensuite en mode « formule » (image 7), on visualise l'équation : on renforce l'idée d'inconnue et de solution d'une équation.

L'objectif ici n'est pas de résoudre l'équation, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs qui sont solutions et toutes celles qui ne le sont pas, mais de permettre une entrée vers la compréhension de cette notion.

Le basculement entre l'affichage numérique et l'affichage littéral permet de donner sens aux différents concepts de variable, paramètre, inconnue, équation, expression littérale et solution. Les deux autres points précédents (le fort guidage informatique et la surcharge cognitive liée à la technique qui occulte l'aspect mathématique de l'activité) soulèvent la difficulté liée à ce que Rabardel nomme *la genèse instrumentale* [15].

15 Pierre Rabardel, *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin, 1995. Cette notion et ses implications sont synthétisées dans la thèse de Tran Kiem Minh, « Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel. Situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves », 2011 (pages 24-30). Elle fait référence entre autres aux travaux de Luc Trouche, Michèle Artigue, Jean-Baptiste Lagrange.

a · f_x 15

	A	B	C	D	E	F
1					a	15
2		x	x^2+2x	x^2+2x = a		
3		-10	80	FAUX		
4		-9	63	FAUX		
5		-8	48	FAUX		
6		-7	35	FAUX		
7		-6	24	FAUX		
8		-5	15	VRAI		
9		-4	8	FAUX		
10		-3	3	FAUX		
11		-2	0	FAUX		
12		-1	-1	FAUX		
13		0	0	FAUX		
14		1	3	FAUX		
15		2	8	FAUX		
16		3	15	VRAI		

image 4

a · f_x 15

	A	B	C	D	E	F
1					a	15
8		-5	15	VRAI		
16		3	15	VRAI		
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						
40						
41						

image 6

a · f_x 15

	A	B	C	D	E	F
1					a	15
2		x				
3		-10				
4		-9				
5		-8				
6		-7				
7		-6				
8		-5				
9		-4				
10		-3				
11		-2				
12		-1				
13		0				
14		1				
15		2	8	FAUX		
16		3	15	VRAI		

Trier du plus petit au plus grand
Trier du plus grand au plus petit
Trier par couleur
Effacer le filtre de « (Colonne D) »
Filtrer par couleur
Filtres numériques
(Sélectionner tout)
x^2+2x = a
FAUX
VRAI
OK
Annuler

image 5

image 7

a · f_x 15

	A	B	C	D	E	F
1					a	15
2		x	x^2+2x	x^2+2x = a		
8		-5	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
16		3	=x^2+2*x	=x^2+2*x=a		
29						
30						
31						
32						
33						

Genèse instrumentale : entre instrumentalisation et instrumentation.

Pour fixer les choses, prenons des exemples d'outils que Rabardel nomme « artéfact » : un ordinateur, un logiciel sont des artéfacts tout comme la fonction « recopie » d'un tableur ou le déplacement dans un LGD ; ce sont des outils « nus » selon Luc Trouche [16]. La genèse instrumentale est, selon Rabardel, pour un sujet donné, la transformation d'un artéfact (matériel ou symbolique) en un instrument : on passe de l'outil « nu » à un objet qui résulte d'une appropriation par un individu dans un cadre d'étude donnée. Le sujet se construit mentalement des éléments psychologiques que Rabardel nomme « schèmes » : ils guident les gestes du sujet dans le but d'utiliser des fonctions de l'artéfact ou de réaliser une tâche avec l'artéfact. Pour une même tâche, le sujet répète les mêmes gestes avec l'outil. Par exemple, saisir, avec la souris, la poignée du coin droit inférieur d'une cellule d'une feuille de calcul d'un tableur pour recopier ou cliquer sur une icône d'un tableur avec la souris pour activer une fonction de l'artéfact comme « filtrer ».

L'artéfact devient peu à peu un instrument. Cette genèse se développe dans deux directions : prise en main des différentes composantes de l'artéfact et construction, développement de stratégies. Au cours de la première que Rabardel nomme « instrumentalisation », il faudra apprendre par exemple à activer les différentes fonctionnalités d'un logiciel ; le sujet se construit des schèmes dit d'utilisation. Dans la seconde, des stratégies liées aux potentialités (possibilités et contraintes) de l'artéfact vont être développées par l'utilisateur par rapport à la réalisation d'une tâche : cette « instrumentation », comme la nomme Rabardel, génère et développe des schèmes dits d'action instrumentée qui contribuent alors à la conceptualisation des notions rencontrées.

La construction d'un instrument à partir d'un artéfact n'est pas spontanée et naturelle : il faut donc du temps et une progressivité dans ce processus de genèse instrumentale ; on ne saurait demander aux élèves de faire un tableau de valeurs à l'aide d'un tableur sans avoir rencontré préalablement les fonctions opératoires du logiciel ni manipuler la dépendance et la génération de formules dans des cellules avant d'utiliser la fonction « recopier ».

L'instrumentalisation et l'instrumentation sont étroitement liées : l'une contribue au développement de l'autre. Par exemple, on s'intéresse au carré d'un nombre. L'instrumentalisation au tableur de ce calcul consiste à connaître sa formalisation : ^2. L'instrumentation est associée à la tâche « calculer le carré de 3 » : l'élève élabore une stratégie (3×3 ou 3^2) et met en œuvre les fonctions du tableur correspondant à son choix (= 3*3 ou = 3^2). On a ainsi à la fois les schèmes d'utilisations liés aux gestes de manipulation des fonctions du tableur et les schèmes d'actions instrumentées liés au choix stratégique et à sa mise en œuvre.

Il ne peut donc pas y avoir instrumentalisation sans instrumentation : on ne peut pas apprendre uniquement les fonctionnalités d'un outil pour elles-mêmes. L'utilisation de fiches techniques dans lesquelles sont décrites pas à pas les actions à mener avec le logiciel utilisé ne permet pas de développer la genèse instrumentale de l'outil. L'apprentissage de la technique doit être lié à des tâches nécessitant cette technique : l'apprenant doit donc développer des stratégies associées à la tâche pour s'approprier la technique. Cette dualité entre l'instrumentalisation et l'instrumentation implique une certaine alter-

16 Luc Trouche, « Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques », in *Actes de l'université d'été de Saint Flour*, 2005.INRP & LIRDHIST (Université Lyon 1), page 271.

nance de ces deux dimensions de la genèse instrumentale dans les activités des élèves.

La formation des enseignants devrait aussi associer l'apprentissage technique des outils à une instrumentation autour des tâches liées aux pratiques du métier ; elle devrait également intégrer cette alternance de ces deux dimensions pour favoriser la construction de cette genèse.

L'activité de classe devrait donc contenir des travaux de découverte et d'appropriation de l'outil pour le mettre « à sa main », associés à des utilisations qui nécessitent à la fois la manipulation et la mise en œuvre d'une stratégie. Par exemple, on peut présenter techniquement la fonction « nommer » du tableur à travers la réalisation d'un tableau de valeurs d'une fonction affine puis demander aux élèves de réaliser un tel tableau dans des situations mathématiques nécessitant un peu de stratégie comme pour une fonction définie sur un ensemble fini d'entiers pairs ou pour tous les décimaux d'ordre 1 compris entre – 2 et 5 ou bien pour réaliser une table de Pythagore (en nommant une ligne et une colonne).

La fonction « nommer » est peu connue des enseignants : ils ne l'utilisent donc pas et ils ne l'enseignent pas. Ils lui préfèrent les références cellules qu'ils connaissent et qu'ils enseignent habituellement mais dont on a pointé certains défauts et certaines difficultés pour les élèves. Le tableur utilise également, sans modération, des processus cachés définis par défaut que tout enseignant se devrait de connaître afin d'anticiper les difficultés techniques, d'analyser efficacement les erreurs des élèves lors de la manipulation de l'outil et de construire des scénarios adaptés aux objectifs. De plus, ces processus diffèrent d'un tableur à l'autre.

Arrêtons-nous quelques instants par exemple sur la fonction « recopie » :

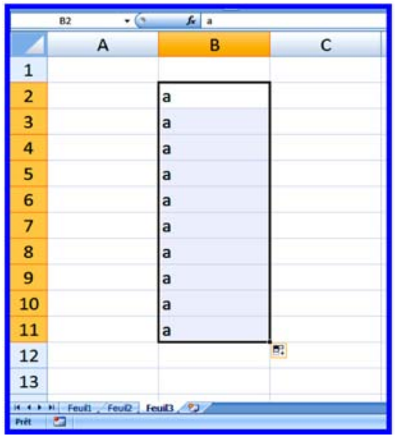


image 8

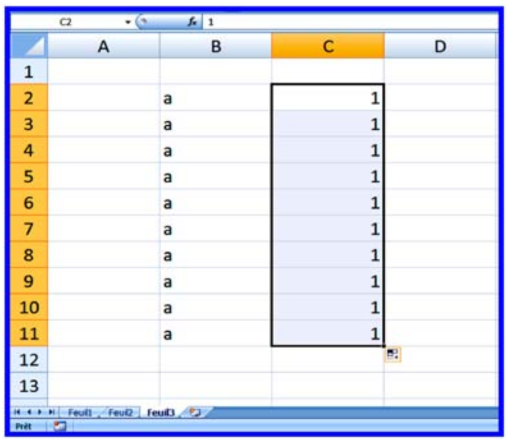


image 9

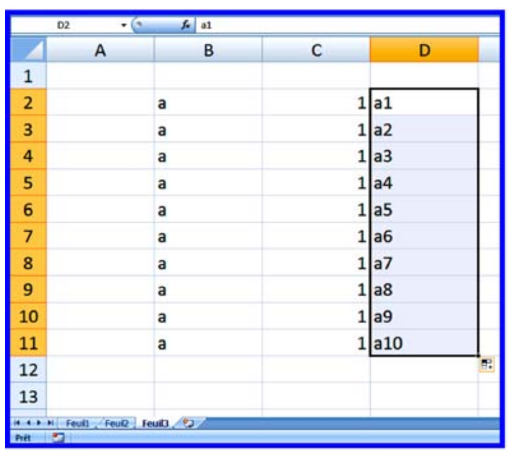
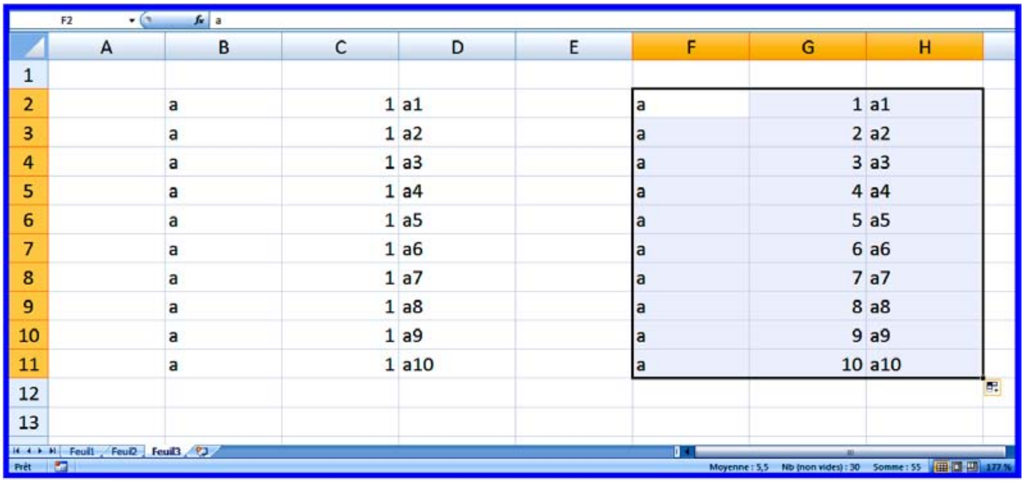


image 10



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		a	1	a1		a	1	a1
3		a	1	a2		a	2	a2
4		a	1	a3		a	3	a3
5		a	1	a4		a	4	a4
6		a	1	a5		a	5	a5
7		a	1	a6		a	6	a6
8		a	1	a7		a	7	a7
9		a	1	a8		a	8	a8
10		a	1	a9		a	9	a9
11		a	1	a10		a	10	a10
12								
13								

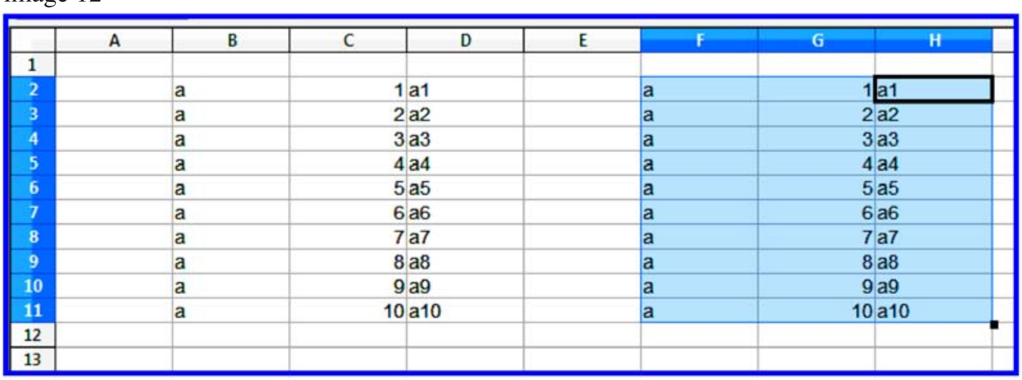
image 11

Ecrivons « a » dans la cellule B2 et recopions vers le bas (image 8) : qu'obtient-on ? Faisons la même action avec « 1 » dans la cellule C2 (image 9) : qu'obtient-on ? Terminons par « a1 » dans la cellule D2 (image 10) : qu'obtient-on ? Recommençons en recopiant l'ensemble des trois cellules F2, G2 et H2 en même temps avec « a » dans la cellule F2, « 1 » dans la cellule G2 et « a1 » dans la cellule H2 (image 11) : qu'obtient-on ?

On pourrait faire les mêmes expériences avec le tableur Calc d'OpenOffice [17] (image 12) et voir que l'on obtient un résultat différent : le logiciel génère par défaut une suite de nombres incrémentés.

On peut faire d'autres essais sur ces deux tableurs comme écrire « 1 », « 2 » et « 5 » dans les cellules B2, B3 et B4 puis recopier vers le bas l'ensemble de ces trois cellules ; les résultats sont à la fois surprenants et inattendus : ils sont différents d'un tableur à l'autre et suivant que l'on recopie en une fois ou en plusieurs fois l'ensemble des trois cellules.

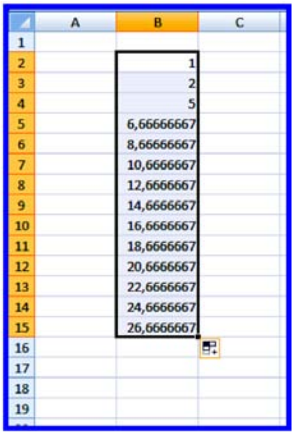
image 12



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		a	1	a1		a	1	a1
3		a	2	a2		a	2	a2
4		a	3	a3		a	3	a3
5		a	4	a4		a	4	a4
6		a	5	a5		a	5	a5
7		a	6	a6		a	6	a6
8		a	7	a7		a	7	a7
9		a	8	a8		a	8	a8
10		a	9	a9		a	9	a9
11		a	10	a10		a	10	a10
12								
13								

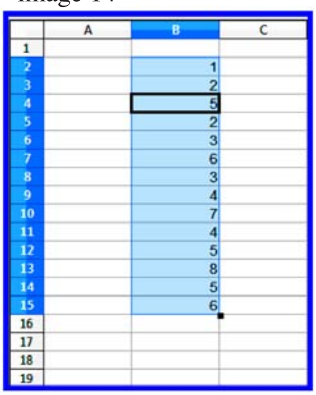
17 Les tests sur Calc d'OpenOffice ont été effectués avec la version 3.4.

image 13

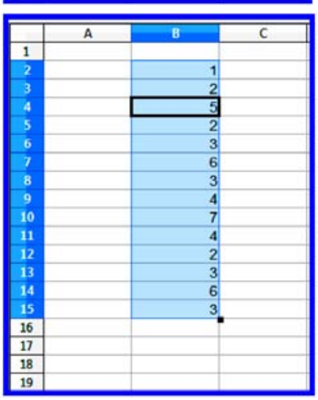


	A	B	C
1			
2		1	
3		2	
4		5	
5		6,66666667	
6		8,66666667	
7		10,6666667	
8		12,6666667	
9		14,6666667	
10		16,6666667	
11		18,6666667	
12		20,6666667	
13		22,6666667	
14		24,6666667	
15		26,6666667	
16			
17			
18			
19			

image 14



	A	B	C
1			
2		1	
3		2	
4		5	
5		2	
6		3	
7		6	
8		3	
9		4	
10		7	
11		4	
12		5	
13		8	
14		5	
15		6	
16			
17			
18			
19			



	A	B	C
1			
2		1	
3		2	
4		5	
5		2	
6		3	
7		6	
8		3	
9		4	
10		7	
11		4	
12		2	
13		3	
14		6	
15		3	
16			
17			
18			
19			

image 15

L'image 13 présente les résultats obtenus sur Excel. L'image 14 présente ceux obtenus sur Calc. L'image 15 présente ceux obtenus sur Calc par deux recopies successives, l'une jusqu'à la ligne 11 puis l'autre reprise jusqu'à la ligne 15. L'arrêt puis la reprise de la recopie n'affectent pas les résultats obtenus sur Excel. On constate que, pour ces deux tableurs, il existe des processus cachés définis par défaut assez imprévisibles associés à la fonction « recopie ». Le couplage de cette fonction avec les références cellules constitue un obstacle cognitif majeur pour les élèves. Il existe également d'autres processus cachés que l'on découvre lors des manipulations liées à la fonction « nommer ». Si on écrit par exemple « =2*x » sans nommer x dans les deux tableurs en indiquant l'étiquette x pour la colonne, Calc transforme de « lui-même » 2*x en 2*'x' (image 16) tandis qu'Excel renvoie un message d'erreur (image 17).

=2*'x'

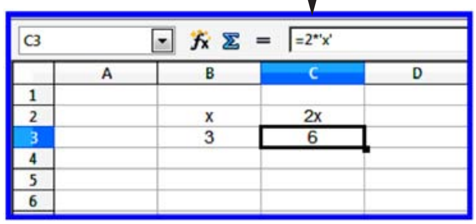


image 16

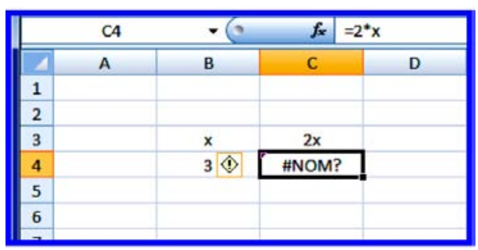
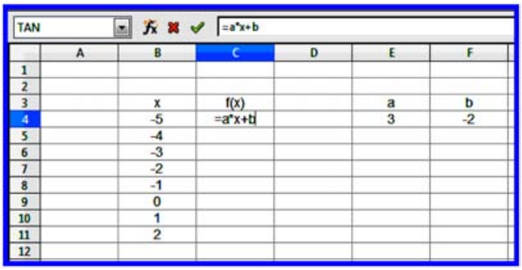


image 17

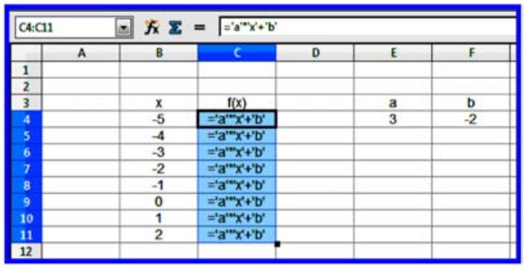
On peut donc penser que Calc permet une utilisation plus efficace des variables sans « nommer ». Mais que se passe-t-il si un utilisateur oublie de nommer ou s'abstient de nommer une ou plusieurs cellules ? Voici des images de Calc (images 18, 19, 20) et d'Excel (images 21, 22, 23) lors d'une utilisation d'une variable x et de deux paramètres a et b pour généraliser le calcul d'images par une fonction affine, sans utiliser la fonction « nommer » du tableur :



TAN | =a*x+b

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		x	f(x)		a	b
4		-5	=a*x+b		3	-2
5		-4				
6		-3				
7		-2				
8		-1				
9		0				
10		1				
11		2				
12						

image 18

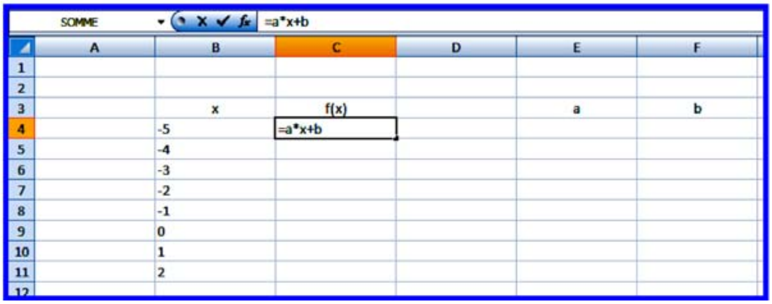


C4:C11 | ='a'*'x'+'b'

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		x	f(x)		a	b
4		-5	='a'*'x'+'b'		3	-2
5		-4	='a'*'x'+'b'			
6		-3	='a'*'x'+'b'			
7		-2	='a'*'x'+'b'			
8		-1	='a'*'x'+'b'			
9		0	='a'*'x'+'b'			
10		1	='a'*'x'+'b'			
11		2	='a'*'x'+'b'			
12						

image 19

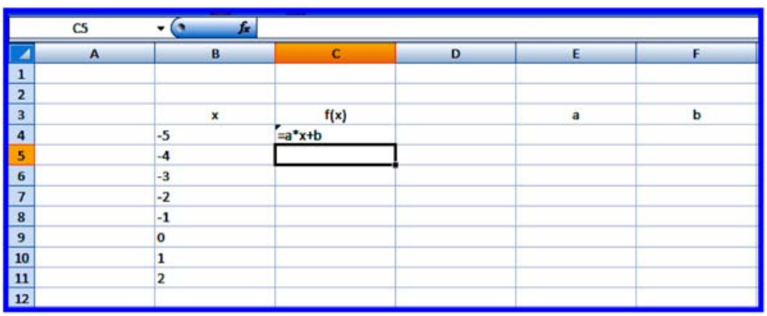
image 21



SOMME | =a*x+b

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		x	f(x)		a	b
4		-5	=a*x+b			
5		-4				
6		-3				
7		-2				
8		-1				
9		0				
10		1				
11		2				

En mode « formule » (images 18, 19, 21, 22).



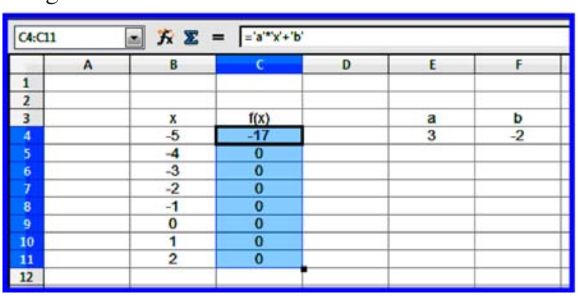
C5

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		x	f(x)		a	b
4		-5	=a*x+b			
5		-4				
6		-3				
7		-2				
8		-1				
9		0				
10		1				
11		2				
12						

En mode « calcul » (images 20 et 23).

image 22

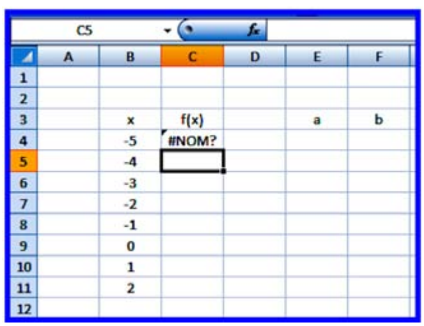
image 20



C4:C11 | ='a'*'x'+'b'

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		x	f(x)		a	b
4		-5	-17		3	-2
5		-4	0			
6		-3	0			
7		-2	0			
8		-1	0			
9		0	0			
10		1	0			
11		2	0			
12						

image 23



C5

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		x	f(x)		a	b
4		-5	#NOM?			
5		-4				
6		-3				
7		-2				
8		-1				
9		0				
10		1				
11		2				
12						

Excel indique un message d'erreur dès que l'on utilise une lettre sans nommer alors que Calc modifie de lui-même cette « erreur »[18]. Ici, ce phénomène ne semble pas problématique pour la variable *x* (définie sur la colonne) mais ne convient pas pour l'utilisation souhaitée des paramètres *a* et *b* (définis par une cellule) qui de fait sont transformés en variables (définies sur la colonne) prenant la valeur particulière donnée puis zéro.

Ce processus caché de Calc est source d'erreurs non repérées comme telles et demande une certaine connaissance de l'outil par l'enseignant qui doit développer la genèse instrumentale de ses élèves en conséquence. Le message d'erreur n'aurait-il pas un rôle à jouer pour un logiciel dédié à l'apprentissage ?

La fonction « nommer » montre son véritable intérêt lorsqu'elle est associée à une utilisation pertinente de la fonction « recopie » du tableur. Pour développer l'instrumentalisation des élèves, il convient de travailler dans le mode « formule » pour recopier les formules construites à partir des noms des cellules et des plages de cellules nommées (image 2) : dans cette situation, les formules « recopiées » sont identiques et la fonction « recopie » est perçue comme un copier/coller ; il est d'ailleurs intéressant de réaliser les deux actions[19] devant les élèves pour montrer cette réalité.

Tout ceci montre la complexité de la genèse instrumentale de l'utilisateur du tableur. La connaissance des fonctionnalités comme « recopier », « nommer » est nécessaire (instrumentalisation) mais n'est pas suffisante pour une utilisation raisonnée en mathématiques. Les différentes activités proposées doivent permettre à la fois de découvrir ces fonctionnalités, de faire évoluer leur manipulation et de comprendre leur potentialité pour faire des mathématiques (instrumentation). Cette genèse instrumentale contribue à donner du sens et à construire les connaissances mathématiques sous-jacentes (calcul littéral, statuts de l'égalité, statuts des lettres). Elle demande du temps, de la continuité et de la progressivité : elle doit donc être envisagée sur tout le cursus scolaire avec des objectifs clairs et étalés.

Par exemple, on peut envisager de proposer en sixième un travail sur des multiples d'entiers générés à l'aide de la fonction « recopie » du tableur pour étudier les critères de divisibilité. En cinquième et en quatrième, de nombreuses activités autour de la production et de l'utilisation de formules doivent être l'occasion d'introduire la fonction « nommer » et de développer les usages de la fonction « recopie ». Pendant ces deux années, l'acquisition de la syntaxe du tableur est peu à peu développée (fonctions opératoires et priorités de calculs, égalités). En troisième et en seconde, certains aspects de la notion de fonction peuvent être travaillés à travers des activités réinvestissant ces fonctionnalités du tableur[20]. Ces connaissances (multiples et diviseurs, lettres, formules, équations, calcul littéral, fonctions) se construisent progressivement et en partie à travers l'usage du tableur.

Pour éclairer le propos, voici un exemple de travail qui peut être envisagé en troisième ou en seconde[21] :

18 Un message d'erreur apparaît sous Calc lorsque *x* est en libellé de ligne : cette modification automatique ne s'effectue qu'en colonne !

19 Dans un premier temps, on copie une formule réalisée avec la fonction « nommer » puis on colle ce contenu dans la cellule située au-dessous. Dans un second temps, on utilise la fonction « recopie » vers le bas pour montrer une réalisation identique.

20 D'autres outils peuvent être développés en parallèle autour de cette notion comme la calculatrice et le LGD.

21 Les activités proposées sont en ligne sur le site de l'IREM de Rouen dans l'onglet du groupe IREM « Images mentales et TICE » : http://irem.univ-rouen.fr/node/3.

1- On considère la fonction f définie par :
Pour tout nombre entier x compris strictement entre -4 et 7, on a $f(x)=x^2-7x+1$.
Donner le tableau complet de valeurs.

x														
$f(x)$														

Ce tableau traduit-il une situation de proportionnalité ? Pourquoi ? ....

....

....

2- On considère la fonction g définie par :
Pour tout nombre t multiple de 3 compris entre 10 et 50, on a $g(t)=\frac{2t}{3}-7$
Donner le tableau complet de valeurs.

t														
$g(t)$														

Ce tableau traduit-il une situation de proportionnalité ? Pourquoi ? ....

....

....

3- En utilisant le tableur, compléter le tableau ci-dessous :

x	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13
$\frac{x^2-4}{x-2}$										
$x+2$										

Que remarque-t-on ? Que peut-on conclure ? ....

Le premier exemple permet de travailler l'instrumentalisation en réinvestissant les connaissances des fonctionnalités du tableur et de leurs utilisations dans le cadre d'une question mathématique.

Le deuxième exemple nécessite une connaissance du tableur davantage tournée vers l'instrumentation : elle se situe au niveau de la génération de la suite de nombres, multiples de 3 entre 10 et 50. L'élève doit élaborer une certaine stratégie, nécessitant la compréhension du concept de multiple en lien avec les fonctionnalités du tableur : la transposition informatique est ici à la charge de l'élève qui doit posséder un degré suffisant dans sa genèse instrumentale de l'outil (schèmes d'action instrumentée[22]).

22 Op. cit. thèse de Tran Kiem Minh, « Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel. Situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves », 2011 (pages 27-28).

Le troisième exemple repose principalement sur l'instrumentation et requiert une stratégie suffisamment élaborée pour permettre la prise d'initiative afin de conclure : au-delà de la construction du tableau des deux formules qui demande un certain degré de technicité, l'élève est confronté aux notions d'identité et de quantificateur. Il peut explorer davantage de nombres mais se trouve limité par la capacité de l'outil, empêchant l'accès à la preuve par le tableur.

Ce dernier exemple contribue à la conceptualisation de l'identité et du contre-exemple comme outils de preuve. L'activité ci-dessous prolonge cette idée.

Elle se situe principalement dans le registre papier/crayon mais exige une charge de travail importante qui nécessite la mise en œuvre d'une démarche instrumentée non explicitée dans la consigne. De plus, la résolution du problème

Le traiteur paresseux

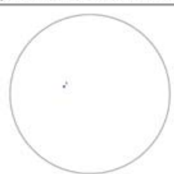
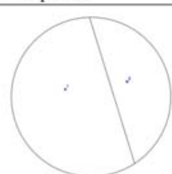
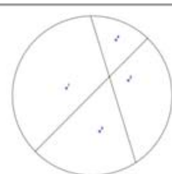
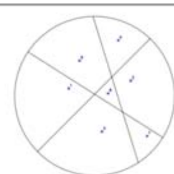
Un traiteur souhaite obtenir le nombre maximum P de parts en découpant un gâteau avec exactement n coupes rectilignes d'un bord à l'autre.

Ainsi, avec 0 coupe, il obtient bien évidemment 1 part.

Avec 1 coupe, il obtient 2 parts.

Avec 2 coupes, il obtient au maximum 4 parts.

Avec 3 coupes, il obtient au maximum 7 parts.

Représentation				
Nombre *n* de coupes	**0**	**1**	**2**	**3**
Nombre maximum *P* de parts	**1**	**2**	**4**	**7**

Il a été démontré qu'au moins l'une des formules suivantes permet de calculer le nombre maximum ***P*** de parts quel que soit le nombre ***n*** de coupes.

Formule 1 : $P = 0{,}5n^2 + 0{,}5n + 1$

Formule 2 : $P = 2n^2 - n + 1$

Formule 3 : $P = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$

Formule 4 : $P = 0{,}1n^5 - n^4 + 3{,}5n^3 - 4{,}5n^2 + 2{,}9n + 1$

Formule 5 : $P = 0{,}1n^6 - 1{,}5n^5 + 8{,}5n^4 - 22{,}5n^3 + 27{,}9n^2 - 11{,}5n + 1$

Quelle est ou quelles sont, parmi ces 5 formules, la ou les formules permettant de calculer le nombre maximum ***P*** de parts obtenus quel que soit le nombre ***n*** de coupes ?

nécessite de faire le lien entre les résultats produits par l'instrument et les dessins géométriques, par conséquent elle ne pourra se faire exclusivement avec l'outil.

Elle s'inscrit complètement dans ce qui a été décrit précédemment au sujet de l'utilisation du tableur : l'élève peut réaliser une feuille de calcul avec une plage de cellules nommée *n* et les cinq formules correspondantes, fonction de *n*. Les résultats numériques lui permettent d'éliminer rapidement la formule 2 par confrontation avec la consigne. Pour éliminer d'autres formules, l'élève doit confronter ces résultats à d'autres dessins qu'il doit lui-même produire : le degré de difficulté pour réaliser ces dessins peut nécessiter l'utilisation d'un LGD (zoom possible et déplacement des points du cercle) pour compter les parts. Deux formules résistent à cette confrontation, nécessitant ainsi une preuve mathématique. Le tableur peut poursuivre l'exploration sans pour autant permettre d'établir la preuve [23].

Cette activité nécessite une genèse instrumentale suffisamment développée afin que l'élève ait recours par lui-même à un instrument : il le fera d'autant plus spontanément qu'il est « maître » de l'outil. Dans le cas contraire, on se retrouve dans la situation décrite au début de l'article, contraignant l'enseignant à gérer des difficultés techniques occultant le travail mathématique de l'élève.

Pour cette activité, l'outil utilisé peut se limiter à la calculatrice avec sa table de valeurs. La genèse instrumentale liée à la calculatrice doit aussi être prise en compte par l'enseignant. Cette fonctionnalité de la calculatrice peut permettre aussi à l'élève de valider des développements ou des factorisations d'expressions littérales à une variable [24].

Ces deux exemples montrent que de telles activités favorisent la construction et le développement de la genèse instrumentale des élèves, celle-ci permettant aussi de réduire l'impact de la transposition informatique et contribuant ainsi à la conceptualisation des notions rencontrées.

Ce dont nous n'avons pas encore parlé…

Il faut souligner qu'un étudiant qui maîtrise les concepts du calcul littéral peut utiliser le tableur avec les références cellules et la fonction « recopie » sans être gêné par l'écriture des formules dans laquelle il matérialise parfaitement ces concepts tout comme l'enseignant du secondaire chargé de les enseigner.

L'usage des outils informatiques pose aussi la question de la place de la trace écrite des élèves. Que reste-t-il de ces usages, qu'ils relèvent de la manipulation ou de l'observation ? L'enseignant doit aider les élèves à se construire un « mode d'emploi » écrit des outils utilisés mais cela n'est pas suffisant pour « *encrer* » la genèse instrumentale. Est-ce qu'elle ne s'ancre pas d'elle-même à travers des habitudes de fonctionnement ? A propos des images dynamiques projetées ou manipulées en classe, ne doit-on pas envisager un « résumé », une sorte de bande dessinée qui va synthétiser l'observation ? Là encore, les pratiques papier/crayon des élèves invitent à de telles traces écrites pour rapprocher les registres. Ces questions restent entières mais sont à envisager si l'on souhaite que les TICE aident efficacement à l'apprentissage.

23 Cependant, pour des polynômes du second degré, obtenir l'égalité pour trois images permet de conclure à l'égalité de ces polynômes. Mais cette propriété n'est pas au programme du secondaire.

24 Attention ! Certaines calculatrices possèdent un mode « Vérif » qui peut donner l'impression de valider des identités littérales (Vrai/Faux) ; en réalité, elles fonctionnent avec une valeur implémentée dans la variable utilisée : la vérification est faite uniquement pour cette valeur.

Nous n'aborderons pas maintenant le cas du LGD, *a priori* conçu pour l'enseignement : une analyse comparable peut être conduite avec une attention particulière portée sur la fonction déplacement [25] de ce type de logiciel. Là encore, certaines fonctionnalités définies par défaut [26] peuvent engendrer des conceptions erronées des objets mathématiques par rapport aux objets informatiques observés. De plus, les objets visuels proposés par les enseignants sont souvent très éloignés des instances papier/crayon et génèrent souvent des ruptures visuelles, sources inévitables de confusion pour les élèves [27].

Pour conclure.

L'intégration effective des outils numériques n'est possible qu'avec un apprentissage progressif et continu de la genèse instrumentale des élèves. En effet, les schèmes d'action instrumentée qu'ils doivent se construire diffèrent réellement de ceux liés au registre papier/crayon. Malheureusement, des difficultés réelles ne permettent pas encore aux enseignants de faire plonger leurs élèves dans ce « bain numérique ».

Un des obstacles demeure bien évidemment celui du matériel : les outils numériques ne sont généralement pas disponibles en permanence, conduisant ainsi les élèves (et enseignants) à dissocier activité mathématique et activité informatique.

Au-delà de ce problème récurrent de l'insuffisance et des disparités de l'équipement informatique des établissements scolaires, perdure le déficit de formation des enseignants qui ne se construisent pas leur propre genèse instrumentale nécessaire pour enseigner. L'exemple des calculatrices est particulièrement révélateur de cette situation. Cet outil, pourtant présent dans la plupart des cartables [28] des élèves, n'est pas toujours disponible pour le travail de classe. Bien que les derniers modèles aient permis un rapprochement significatif des écritures mathématiques entre registres papier/crayon et calculatrice [29] et bien qu'ils proposent de nouvelles fonctionnalités (résolution de systèmes, calcul d'une quatrième proportionnelle, tableau de valeurs, vérification d'égalités et d'inégalités...), l'utilisation en collège se limite encore très souvent aux opérations de base : on retrouve ici les usages par défaut des technologies associés à une genèse instrumentale des enseignants *a minima* ; le lycée n'est pas en reste sur ce sujet malgré une forte incitation institutionnelle. Ces nouvelles potentialités des calculatrices peuvent pourtant contribuer très largement à une réelle activité mathématique des élèves. D'une part, elles les dispensent de certaines tâches techniques constituant souvent une surcharge cognitive qui fait obstacle pour accéder aux concepts visés ; elles permettent aussi à l'élève d'explorer une situation mathématisée mais aussi de vérifier et de valider sa démarche. D'autre part, elles peuvent consti-

25 Op. cit. thèse de Angéla Maria Restrepo « Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez les élèves de sixième » (2008).

26 A titre d'exemple, une droite, définie par deux points A et B, est implicitement graduée avec le vecteur pour vecteur unitaire. Tout point M défini sur cette droite est repéré par son abscisse : en conséquence, le déplacement de A ou de B induit le déplacement de M afin de conserver le rapport AM/AB. On s'attendrait pourtant à ce que M reste à la même distance de A lorsque l'on déplace B.

27 Jean-Luc de Séegner, Michel Chevallier, *Image et Magie : les images des fonctions et les fonctions des images*, Irem de Rouen, Université de Haute –Normandie, Novembre 2010.

28 Ce n'est pas toujours le cas actuellement dans les classes de collèges et les enseignants ont également à gérer la diversité des modèles auxquels ils se trouvent confrontés.

29 Rapprochement des symboles, de l'ordre d'entrée des fonctions opératoires, apparition de l'écriture en 2D ...

tuer le sujet même de l'activité mathématique pour donner sens aux notions étudiées.

Une adaptation des contenus à enseigner semble donc également nécessaire pour permettre cette réelle intégration des outils numériques dans les pratiques quotidiennes en classe.

D'une façon générale, les outils informatiques utilisés sont principalement développés pour faire des mathématiques : ils sont conçus par et pour des spécialistes maîtrisant les concepts en jeu. Leurs usages doivent donc être adaptés à l'enseignement des mathématiques. L'implication des concepteurs dans cette réelle adaptation devrait être plus importante. D'une part, des échanges croisés avec la recherche pourraient améliorer l'efficacité pédagogique de ces outils en modifiant les choix de programmation sous-jacente afin de réduire l'impact de la transposition informatique. D'autre part, l'institution possède le rôle essentiel de guider et de coordonner cette adaptation indispensable en faisant des choix qui relèvent d'une certaine politique éducative. Par exemples, les programmes devraient peut-être proposer une institutionnalisation de certains éléments de la genèse instrumentale des outils utilisés ; ils pourraient aussi proposer des objets d'enseignement en adéquation avec cette genèse dans le but de résoudre des problèmes (c'est l'un des objectifs majeurs des programmes actuels). Nous avons mentionné en note la résolution de systèmes pour déterminer pleinement un polynôme du second degré : on pourrait donc enseigner quelques connaissances élémentaires sur les polynômes (degré, opérations élémentaires, etc.) afin de permettre le développement d'expressions polynomiales de faibles degrés (2 ou 3) à l'aide d'une résolution de système assistée par une calculatrice. Ceci n'empêcherait pas de savoir développer à l'aide de la distributivité : au contraire, cela consoliderait la conceptualisation de la notion. On pourrait aussi envisager de résoudre une équation du premier degré à l'aide de la résolution d'un système par une calculatrice : là aussi la conceptualisation de la notion d'équation est renforcée. Ainsi certaines parties du programme découleraient de l'association d'outils et d'objets d'enseignement pour résoudre des problèmes. Pour finir, l'introduction dans les programmes d'un nouvel outil (comme un logiciel de calcul formel) devrait s'accompagner des éléments de la genèse instrumentale nécessaire ainsi que des objets d'enseignement associés à cet outil pour résoudre des problèmes. Tout cela implique de choisir certains logiciels pour enseigner, de les développer pour l'enseignement, de former les professeurs pour qu'ils se construisent les instruments nécessaires et de construire des programmes en conséquence.

De ce triptyque institution-concepteurs-recherche dépend aussi l'intégration des outils numériques dans l'enseignement.

Bibliographie :

Michèle Artigue , « L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques : contenus et pratiques », in *Acte du Séminaire National sur l'utilisation des outils logiciels dans l'enseignement des mathématiques*, Université Paris 7 Denis Diderot, janvier 2008.

Nicolas Balacheff, « La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique », in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, 1994.

Nuray Caliskan-Dedeoglu, *Usage de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en œuvre: quelles motivations, quelles pratiques ?*, thèse doctorat Université Paris 7, spécialité didactique des mathématiques, dir.Jean-Baptiste Lagrange, Paris 7, 2006.

Yves Chevallard, *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* , Grenoble, La Pensée Sauvage, 1985.

Hamid Chaachoua, «Usages éducatifs des technologies de l'information et de la communication : quelles nouvelles compétences des enseignants ?», *Rapport de recherche*, INRP, IUFM de Grenoble, Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, 2004.

Mariam Haspékian, « Entre arithmétique et algèbre : un espace pour le tableur ? Perspectives didactiques et réalités », in *Actes du Colloque Européen sur l'Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques,* ITEM Reims, juin 2003.

Mariam Haspékian, *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques: étude du cas des tableurs*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, spécialité didactique des mathématiques, dir. Michèle Artigue, Paris 7, 2005.

Colette Laborde, « Calculatrices symboliques et géométriques », in *Actes du colloque Européen francophone de la Grande-Motte*, IREM de Montpellier, 1999.

Jean-Baptiste Lagrange, *Innovation pédagogique dans l'enseignement des mathématiques: paradigmes et changement de professionnalité de l'enseignant*, Reims, IUFM, Paris 7 Université, Equipe DIDIREM, 2009.

Jean-Baptiste Lagrange, « Usages de la technologie dans des conditions ordinaires : le cas de la géométrie dynamique au collège » in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 29, Num. 2, pp. 189-226, 2009. IUFM de Reims, Equipe DIDIREM, Université Paris 7.

Tran Kiem Minh, *Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel: situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves,* Thèse doctorat, Université Paris 7, spécialité didactique des mathématiques, dir. Jean-Baptiste Lagrange, Paris 7, 2011.

Pierre Rabardel, *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin, 1995.

Angela Maria Restrepo, *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez les élèves de sixième,* Thèse doctorat Université Joseph Fourier, spécialité mathématiques et informatique, dir.Colette Laborde et Sophie Soury-Lavergne, Grenoble, 2008.

André Tricot, « Grâce aux TICE, une école plus efficace ? A voir… », L'Actualité Educative, *Cahiers Pédagogiques,* 483, IUFM Midi Pyrénées & Laboratoire cognition, Langues, Langage, Ergonomie UMR 5263 CNRS, EPHE & Université Toulouse 2, septembre-octobre 2010.

André Tricot, Conférence « Quels sont les apports et les limites des TICE en matière d'apprentissage ? » in *Le numérique va-t-il bouleverser les pratiques pédagogiques ?*, Forum Retz sciences humaines, ENSAM Paris, 10 mars 2010.

http://www.flash-conferences.com/Retz2010/flashconfs/1459/swf/index.htm
consulté le 18/10/2012.

Luc Trouche, « Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques », in *Actes de l'université d'été de Saint Flour*, INRP & LIRDHIST (Université Lyon 1), 2005.