UTILISER L'ALGEBRE DYNAMIQUE POUR APPRENDRE L'ALGEBRE

Jean-François NICAUD
Christophe VIUDEZ

Résumé : *L'algèbre dynamique consiste à « faire des calculs algébriques sur ordinateur par manipulation directe ». Nous l'avons implantée dans Epsilonwriter en nous basant sur une « Théorie des mouvements dans les formules » (TMF). La TMF indique que, pour la classe de mouvements qu'elle considère, 76% des mouvements possibles produisent des calculs corrects. Ce résultat, ainsi que des publications étudiant des conceptions d'élèves en calcul algébrique, nous conduisent à faire l'hypothèse que l'apprentissage des mouvements dans les formules est efficace et nous proposons de l'enseigner selon 5 principes.*
Au-delà de cette mise en œuvre de la TMF dont le but est d'aider les élèves à comprendre la structure des expressions algébriques et à apprendre les transformations correctes, l'algèbre dynamique a été étendue dans Epsilonwriter pour en faire un outil de calcul puissant permettant d'effectuer des calculs par étapes avec des explications.

1. — Introduction

1.1. *L'algèbre dynamique*

L'algèbre dynamique est une idée qui circule depuis un vingtaine d'années. Il s'agit de *faire de l'algèbre sur ordinateur par manipulation directe,* donc de calculer avec la souris ou tout autre dispositif de pointage.

Dans cet article, les manipulations directes d'algèbre dynamique sont appelées *gestes* ou *actions*. On parle de *geste* lorsque l'on veut mettre en avant l'origine de la manipulation (le fait que l'utilisateur a agi sur un dispositif de pointage pour la produire) ou une manipulation qui n'a pas produit de résultat ; on parle d'*action* lorsque l'on veut mettre en avant le résultat de la manipulation. Le terme *mouvement* est aussi utilisé lorsque la manipulation est proche du déplacement d'un objet physique (que l'élément sélectionné se retrouve inchangé ou très peu modifié dans le résultat de la manipulation).

Lorsque l'on se demande ce que l'on peut faire en algèbre dynamique, on pense immédiatement à l'exploitation de la commutativité, par exemple : sélectionner x dans $x + y + z$ et le déplacer par glisser-déposer à droite de y pour obtenir $y + x + z$, ce que nous représentons, en encadrant l'élément déplacé, par : $\boxed{x}+y+z \longrightarrow y+\boxed{x}+z$, la flèche $\longrightarrow$ signifiant « est transformé en ».

On pense aussi à *faire passer un terme d'un membre d'une équation dans l'autre,* même si c'est une formulation que beaucoup d'enseignants n'aiment pas entendre dans la bouche des élèves, par exemple :

$$2x+\boxed{6}=5x-4 \longrightarrow 2x=5x-4\boxed{-6}\ .$$

Ces exemples entrent dans la composante *glisser-déposer par équivalence* de l'algèbre dynamique, car ce sont des actions de glisser-déposer dans une formule qui produisent une formule équivalente. L'algèbre dynamique comporte d'autres sortes de gestes comme le glisser-déposer d'une substitution sur une expression pour appliquer cette substitution, par exemple :

On sélectionne la formule $\begin{cases} x = 2u+3 \\ y = u-1 \end{cases}$ et

on la dépose sur $\dfrac{3x+y+1}{x-y}$ produisant ainsi

la transformation :

$$\frac{3x+y+1}{x-y} \longrightarrow \frac{3(2u+3)+u-1+1}{2u+3-(u-1)}.$$

A ce jour, quelques logiciels mettant en œuvre le *glisser-déposer par équivalence* ont été développés. Ils n'ont pas eu de succès. Nous pensons que cela est dû aux faits suivants :

— si une transformation s'effectuait bien dans les situations attendues, il était parfois difficile d'obtenir ce que l'on voulait, l'expression étant immédiatement remplacée par celles produites dans les phases intermédiaires du mouvement ;

— aucune explication sur la transformation n'était fournie ;

— le champ d'application était assez limité.

1.2. *L'algèbre dynamique dans epsilonwriter*

Lorsque nous avons développé le logiciel *Aplusix* d'aide à l'apprentissage de l'algèbre [Nicaud et *al*. 2004, Nicaud et *al*. 2006], nous avons travaillé sur un *glisser-déposer structurel* : c'est un glisser-déposer qui respecte la structure *«opérateurs appliqués à des arguments»* des expressions (on ne dépose pas $2x$ à côté de $3y$, on le dépose en le reliant à $3y$ avec un opérateur comme $+ - \times$). Nous avons pensé au *glisser-déposer par équivalence*. C'est la limitation de son champ d'application qui a fait que nous ne nous y sommes pas intéressés à ce moment.

A l'automne 2011, notre intérêt pour l'algèbre dynamique a été réveillé lors d'une discussion avec C. Mercat, directeur de l'Irem de Lyon, qui évoquait des actions autres que celles de *glisser-déposer par équivalence*, entre autres l'application de substitutions. L'idée aussi est venue d'expliquer les transformations effectuées, ce qui donne plus d'intérêt au logiciel, en particulier cela permet au professeur de rédiger très facilement des corrigés et cela permet d'aider l'élève à comprendre les transformations algébriques. Dans une discussion avec H. Chaachoua, l'idée principale du mode opératoire a été choisie, elle consiste à ne pas transformer immédiatement l'expression quand la souris se déplace, à simplement déplacer le curseur, mais à faire apparaître dans un popup (petite fenêtre surgissante) le résultat que fournirait la dépose si elle avait lieu à ce moment-là.

Nous avons commencé à développer l'algèbre dynamique dans le logiciel *epsilonwriter* [Nicaud & Viudez 2009] fin 2011. *Epsilonwriter* est un logiciel qui permet de créer des documents, ce qui offre l'avantage de pouvoir placer les opérations d'algèbre dynamique parmi des éléments déjà écrits et à écrire. Le projet n'ayant pas de cadre officiel, après quelques discussions avec C. Mercat et H. Chaachoua, il s'est essentiellement développé dans la société Aristod où tous les choix autres que celui du mode opératoire ont été faits.

Nous avons développé un prototype que nous avons présenté aux Journées Mathématiques de l'IFE [Nicaud & Mercat 2012]. La démonstration faite devant les participants nous a confortés dans l'idée que ce logiciel pouvait intéresser les enseignants. Nous avons donc poursuivi nos travaux pour en faire un produit distribuable à l'automne 2012 et nous avons en même temps rédigé la théorie des mouvements dans les formules.

L'algèbre dynamique d'*epsilonwriter* est décrite en section 4. Auparavant, nous présentons une théorie des mouvements dans les formules qui a été conçue pour mettre en œuvre une partie des fonctionnalités d'*epsilonwriter* et nous abordons la question de l'apprentissage des mouvements dans les formules.

1.3. *La théorie des mouvements dans les formules*

Lors de la conception de l'algèbre dynamique d'*epsilonwriter*, nous nous sommes aperçu qu'il y avait de nombreux gestes possibles de type *mouvement d'un élément pour le déposer tel quel ou avec une petite modification* (exemples de petites modifications : remplacement par son opposé, ou bien il était facteur, il devient diviseur). Nous avons vu aussi que de nombreux gestes pouvaient s'exprimer en termes de déplacements d'un argument d'un opérateur vers un autre, d'entrées dans des sous-expressions ou de sorties de sous-expressions.

Par exemple, étant donné $\frac{3x}{2}$, on peut faire sortir 3 du numérateur pour obtenir $3\frac{x}{2}$; inversement, étant donné $3\frac{x}{2}$, on peut faire entrer 3 au numérateur pour obtenir $\frac{3x}{2}$.

Nous appelons ces gestes des *glisser-déposer basiques* ; nous les avons regroupés dans une *théorie des mouvements dans les formules* qui est présentée en section 2.

Nous avons étudié tous les cas possibles a priori pour les opérateurs $+ \; - \times /$ dans le cadre que nous avons précisé, afin d'établir dans chaque cas soit la présence soit l'absence de règles mathématiques permettant de faire une transformation correcte, c'est-à-dire une transformation qui préserve l'équivalence. Le pourcentage de cas où cela est possible est 76%. Son importance nous a étonnés.

Cette théorie a été implantée dans le logiciel *epsilonwriter*. Lorsque l'élève choisit l'option *Algèbre dynamique pédagogique,* seuls les mouvements du cadre de cette théorie sont envisagés. Les mouvements produisant des transformations correctes sont appliqués et décrits. Voici un exemple lorsque les options «Explication» et «Description du geste» sont activées. Les options permettent de définir le mode de fonctionnement du logiciel, les options principales sont décrites en 4.1.3.

$2x + \boxed{6} = 5x - 4 \longrightarrow 2x = 5x - 4 \boxed{-6}$
Geste : Passage additif dans l'autre membre en changeant de signe Explication : Addition aux deux membres de -6

Les mouvements ne produisant pas de transformation correcte donnent lieu à un message comme *Pas de sortie additive basique du numérateur* pour exprimer que dans $\dfrac{4+5}{3}$ on ne peut pas faire passer 4 devant la fraction avec un mouvement basique.

1.4. *L'apprentissage des mouvements dans les formules*

Les enseignants des premiers apprentissages de l'algèbre cherchent généralement à proscrire la description des gestes comme *faire passer un terme d'un membre d'une équation dans l'autre,* considérant qu'il faut lui préférer une description mathématique comme *ajouter telle expression aux deux membres de l'équation* et motivant ce refus de la description de gestes par un nombre important d'erreurs qu'elle induit.

Mais des études [Kieran 2007] ont montré que les élèves font des mathématiques avec des gestes. Wittmann et al [2013] disent même que les élèves qui calculent correctement effectuent certains calculs entièrement avec des gestes : « Instead, their gestures and ambiguous speech of moving are the only algebra used at that moment ».

Des travaux de modélisation des connaissances d'élèves montrent que l'on modélise bien certains comportements d'élèves avec des gestes [Bouhineau et *al*., 2003, Chaachoua et *al*., 2006, Croset, 2007].

La théorie des mouvements dans les formules que nous présentons montre que 76% des mouvements que l'on peut raisonnablement envisager sur les opérateurs fondamentaux sont productifs, c'est-à-dire peuvent être associés à une transformation correcte.

Les mouvements dans les formules peuvent maintenant être effectués avec le logiciel *epsilonwriter*. L'élève fait des manipulations qui produisent ou non des transformations et obtient des descriptions de gestes et des explications mathématiques. Il obtient même des explications des refus.

Tout cela nous conduit à nous interroger en section 3 sur la place du geste et l'utilisation des descriptions de gestes dans l'apprentissage de l'algèbre.

2. — La théorie des mouvements dans les formules

2.1. *Le domaine, les concepts et les mécanismes*

Dans cet article, nous donnons le même sens aux mots *expression* et *formule,* celui d'expression algébrique au sens large, ayant une valeur numérique comme $2x+y^2$ ou logique comme $2x \leq y$. Cela permet d'avoir un discours général, de ne pas avoir sans arrêt à traiter deux cadres.

2.1.1. Le domaine

Le domaine que nous considérons dans la *théorie des mouvements dans les formules* est composé :

— des expressions rationnelles de n variables, c'est-à-dire des expressions composées avec les opérateurs $+ \; - \; \times \; / \; \wedge$ dont les arguments peuvent contenir des variables, à l'exception des degrés des puissances qui doivent être entiers ; ces expressions peuvent contenir d'autres opérateurs comme $\sqrt{\square}$ si leurs arguments ne comportent pas de variable, exemple : $\dfrac{2x^2-y\sqrt{3}}{x^2+y^2}$;

— des égalités et inégalités obtenues avec les opérateurs $= \; < \; \leq \; > \; \geq \; \neq$ et ayant pour arguments des expressions rationnelles de n variables au sens précédent, exemple :

$$2x^2 + 1 \leq \frac{y}{3z} .$$

2.1.2. Déplacement au même niveau, entrée, sortie

Certaines transformations algébriques correctes peuvent s'exprimer comme des mouvements d'une sous-expression a dans une formule, en ce sens que a semble avoir été enlevé d'une position pour être mis à une autre, cette opération étant éventuellement accompagnée d'une petite modification. Les modifications que nous considérons sont :

(1) a est remplacé par son opposé $-a$;

(2) a est remplacé par son inverse $\frac{1}{a}$;

(3) le sens de l'inégalité est inversé (par exemple $\leq$, est remplacé par $\geq$).

La raison de ces limitations est de ne considérer que les *mouvements de base,* ceux qui ont vraiment l'air de mouvements du fait que l'on voit bien la sous-expression a au départ et à l'arrivée, et qui ne s'accompagnent pas d'une modification importante de la formule.

C'est aussi de pouvoir répondre à la question : *étant donné une formule, y a-t-il un mouvement de base qui permet d'enlever u ici pour le mettre là*. Par exemple, avec $au = b$, pour mettre u contre b en le reliant à b avec l'opérateur qui convient. Dans cet exemple, la réponse est oui : u est *facteur* dans au , on peut l'enlever et le mettre comme *diviseur* de b . On a appliqué une règle correcte (division des deux membres par b) pour faire cela (il reste toutefois à ajouter la condition $b \neq 0$ si b contient des variables).

Nous considérons les trois familles de mouvements ci-dessous, que nous illustrons par des exemples.

Déplacement au même niveau dans une formule : Il s'agit de déplacer un argument d'un opérateur en le conservant comme argument de cet opérateur. L'application de la commutativité en est le cas typique.

Exemple 1 : étant donné $\boxed{3y} + 2x + 5$, faire passer $3y$ à droite de $2x$ pour obtenir $2x + \boxed{3y} + 5$.

Sortie d'une formule : Faire sortir u de l'expression A .

Exemple 2 : étant donné $5 + (\boxed{3x} + x + 8)$, faire sortir $3x$ de $(3x + x + 8)$pour obtenir $5 + \boxed{3x} + (x + 8)$.

Exemple 3 : étant donné $\frac{\boxed{3}x}{2}$, faire sortir 3 du numérateur pour obtenir $\boxed{3}\,\frac{x}{2}$.

Entrée dans une formule : Faire entrer u dans l'expression A .

Exemple 4 : étant donné $5 + \boxed{3x} + (x + 8)$, faire entrer $3x$ dans $x + 8$ pour obtenir $5 + (\boxed{3x} + x + 8)$.

Exemple 5 : étant donné $\boxed{3}\,\frac{x}{2}$, faire entrer 3 au numérateur pour obtenir $\frac{\boxed{3}x}{2}$.

Les mouvements peuvent se combiner.

Exemple 6 : étant donné $\frac{\boxed{3}x}{2} = 5$, faire passer 3 à droite de = , au dénominateur, pour obtenir $\frac{x}{2} = \frac{5}{\boxed{3}}$.

Ici, 3 sort de $\frac{3x}{2}$, puis passe à droite de = et entre dans 5 .

2.1.3. Le statut de l'expression déplacée

Il est nécessaire de considérer l'élément que l'on déplace avec l'opérateur qui le relie au reste de l'expression, ce que nous exprimons par un ***statut*** : 3 a le statut de ***multiplicateur*** dans $3\frac{x}{2}$, on peut le faire entrer au numérateur de $\frac{x}{2}$ en lui conservant son statut de multiplicateur, ce qui donne $\frac{3x}{2}$.

De façon analogue, 3 a le statut ***d'additionneur*** dans le membre gauche de $x + 3 = 5$, on peut le faire passer à droite de = en lui conservant son statut d'additionneur, et en le remplaçant par son opposé, ce qui donne $x = 5 - 3$. Si l'on veut détailler, 3 sort de $x + 3$ avec le statut d'additionneur, il passe à droite de = en conservant son statut d'additionneur et en devenant – 3, puis il entre dans 5 avec son statut d'additionneur.

Le statut n'est pas toujours conservé, il y a des gestes qui le changent, ainsi : 3 a le statut de multiplicateur dans le membre gauche de $\boxed{3}x = 5$ on peut faire passer 3 à droite de = en lui donnant le statut de ***diviseur***, ce qui donne $x = \frac{5}{\boxed{3}}$.

Nous considérons les trois statuts qui viennent d'être introduits : *additionneur, multiplicateur et diviseur*.

Pourquoi un statut de diviseur et pas de statut de soustracteur ?

Si l'inverse est à la multiplication ce qu'est l'opposé à l'addition, la représentation usuelle des formules et les usages ne traitent pas les opposés et les inverses de la même façon. La formule $a - b + c$ peut être considérée comme une somme de trois termes dont le deuxième est $- b$ (c'est un point de vue structurel que l'on cherche généralement à faire acquérir, et qui permet, entre autres, de considérer que l'on peut réécrire la formule en $a + c - b$ par commutativité).

La formule analogue sur le plan multiplicatif est $\frac{a}{b}c$. La considérer comme un produit de trois facteurs dont le deuxième est $\frac{1}{b}$ est très inhabituel (il est encore plus inhabituel de considérer que la transformer en $a\frac{c}{b}$ se fait par commutativité).

Dans les mouvements, dire que l'additionneur a est déplacé d'ici à là en étant remplacé par $-a$ fonctionne dans toutes les situations concernées, la situation typique étant

$$x + \boxed{3} = 5 \longrightarrow x = 5 \boxed{-3} .$$

Pour

$$\boxed{3}x = y \longrightarrow x = \frac{y}{\boxed{3}} ,$$

il nous semble plus compréhensible de dire que le *facteur* 3 est déplacé contre y en devenant *diviseur*. C'est un souci de proximité avec des formulations compréhensibles qui nous a conduits à faire ce choix.

2.1.4. Les mouvements de base étudiés

La liste des gestes décrits en 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5 porte sur les opérateurs + – × / = < ≤ > ≥ ≠ . Nous avons exclu l'opérateur puissance car nous considérons qu'il n'y a pas de mouvement de base avec lui. Il n'est pas nécessairement absent des formules, mais on ne se demandera pas si une sous-expression peut passer d'un exposant à un autre endroit d'une formule.

Nous considérons les statuts *additionneur, multiplicateur, diviseur,* et nous envisageons tous les cas possibles de déplacements au même niveau, d'entrées et de sortie. Nous indiquons les mouvements que nous retenons. L'objectif est de faire la liste des gestes de type mouvements de base pour les opérateurs choisis pour se demander si la connaissance de cette liste peut être utile à la compréhension des formules et à l'apprentissage de l'algèbre et pour mettre en œuvre ces gestes dans epsilonwriter.

Dans chaque cas :

— nous décrivons la *technique,*

— nous présentons *l'explication* fournie par *epsilonwriter*,

— nous présentons, lorsqu'elle existe, la *description du geste* qui est fournie par *epsilonwriter*.

La technique est un discours pour le chercheur et l'enseignant, utilisant les termes *additionneur, multiplicateur, diviseur*. L'explication et la description du geste sont destinées à l'élève. On y parle parfois de facteur et de diviseur, jamais d'additionneur ou de multiplicateur pour ne pas ajouter de nouveaux mots au vocabulaire utilisé avec l'élève. Une partie seulement de la théorie est décrite ci-dessous. Nicaud [2013] la décrit *in extenso*.

2.2. *Les mouvements d'additionneurs dans les opérateurs + – × /*

2.2.1. Les déplacements au même niveau d'additionneurs dans les opérateurs + – × /

Descriptions	Exemples
Technique : *un additionneur se déplace par commutativité dans une somme.* Explication : commutativité.	$\boxed{a}+b+c$ $\rightarrow\ b+\boxed{a}+c$

Un additionneur ne se déplace pas d'un argument à un autre d'un produit, d'une fraction.

2.2.2. Les sorties d'additionneurs des opérateurs + – × /

Descriptions	Exemples
Technique : *un additionneur sort comme additionneur d'une somme.* Explication : associativité.	$(\boxed{a}+b+c)$ $\rightarrow\ \boxed{a}+(b+c)$

Technique : *un additionneur de l’argument d’un opposé sort comme additionneur de l’opposé en changeant de signe*. Explication : opposé d’une somme. Geste : *sortie additive d’un opposé en changeant de signe*.	$-(\boxed{a}+b+c)$ $\to \boxed{-a}-(b+c$

Un additionneur ne sort pas de façon basique d’un argument d’un produit, d’un numérateur ou d’un dénominateur.

2.2.3. Les entrées d’additionneurs dans les opérateurs + – × /

Descriptions	**Exemples**
Technique : *un additionneur entre comme additionneur dans une somme*. Explication : associativité.	$\boxed{a}+(b+c)$ $\to (\boxed{a}+b+c)$
Technique : *un additionneur entre comme additionneur dans un opposé en changeant de signe*. Explication : opposé d’une somme. Geste : e*ntrée additive dans un opposé en changeant de signe*.	$\boxed{a}-(b+c)$ $\to -(\boxed{-a}+b+c$

Un additionneur n’entre pas de façon basique dans un argument d’un produit, dans un numérateur ou dans un dénominateur.

2.3. *Les mouvements de multiplicateurs dans les opérateurs* + – × /

2.3.1. Les déplacements au même niveau de multiplicateurs dans les opérateurs + – × /

Descriptions	**Exemples**
Technique : *un multiplicateur se déplace par commutativité dans un produit*. Explication : commutativité.	$\boxed{a}bc \to b\boxed{a}c$
Technique : *un multiplicateur se déplace du numérateur d’une fraction au dénominateur en devenant diviseur*. Explication : division du numérateur et du dénominateur par *a* . *Geste : passage au dénominateur, le facteur devient diviseur*.	$\dfrac{\boxed{a}b}{c} \to \dfrac{b}{\dfrac{c}{\boxed{a}}}$
Technique : *un multiplicateur se déplace du dénominateur d’une fraction au numérateur en devenant diviseur*. Explication : division du numérateur et du dénominateur par *a*. *Geste : passage au numérateur, le facteur devient diviseur*.	$\dfrac{b}{\boxed{a}c} \to \dfrac{\dfrac{b}{\boxed{a}}}{c}$

Un multiplicateur ne se déplace pas d’un argument à un autre d’une somme.

2.3.2. Les sorties de multiplicateurs des opérateurs + – × /

Descriptions	Exemples
Technique : *un multiplicateur de l'argument d'un opposé sort comme multiplicateur de l'opposé*. Explication : opposé d'un produit.	$-\boxed{a}b \rightarrow \boxed{a}(-b)$
Technique : *un multiplicateur d'un argument d'un produit sort comme multiplicateur du produit*. Explication : associativité.	$(\boxed{a}bc) \rightarrow \boxed{a}(bc)$
Technique : *un multiplicateur du numérateur d'une fraction sort comme multiplicateur de la fraction*. Explication : le facteur du numérateur devient facteur de la fraction.	$\frac{\boxed{a}b}{c} \rightarrow \boxed{a}\frac{b}{c}$
Technique : *un multiplicateur du dénominateur d'une fraction sort comme diviseur du de la fraction*. Explication : le facteur du dénominateur devient diviseur de la fraction.	$\frac{b}{\boxed{a}c} \rightarrow \frac{\frac{b}{c}}{\boxed{a}}$

Un multiplicateur d'un argument d'une somme ne sort pas de façon basique de la somme.

2.3.3. Les entrées de multiplicateurs dans les opérateurs + – × /

Ces gestes sont les gestes inverses des sorties de multiplicateurs.

2.4. *Les mouvements de diviseurs dans les opérateurs* + – × /

Les mouvements de diviseurs sont analogues aux mouvements de multiplicateurs.

2.5. Les mouvements dans les relations $= \; < \; \leq \; > \; \geq \; \neq$

2.5.1. Les déplacements au même niveau d'additionneurs dans les relations

Descriptions	Exemples
Technique : *un additionneur* a *d'un membre d'une relation* $= \; < \; \leq \; > \; \geq \; \neq$ *passe dans l'autre membre comme additionneur en changeant de signe*. Explication : addition aux deux membres de – *a*.	$\boxed{a} + b = c \rightarrow b = \boxed{-a} + c$ $\boxed{a} + b \leq c \rightarrow b \leq \boxed{-a} + c$

2.5.2. Les déplacements au même niveau de multiplicateurs dans les relations

Descriptions	Exemples
Technique : *un multiplicateur a non nul d'un membre d'une relation = ≠ passe dans l'autre membre en devenant diviseur.* Explication : division des deux membres par *a*. Geste : *passage multiplicatif dans l'autre membre, le facteur devient diviseur.*	Quand $a \neq 0$ $\boxed{a}b = c \rightarrow b = \frac{c}{\boxed{a}}$
Technique : *un multiplicateur strictement positif d'un membre d'une relation < ≤ > ≥ passe dans l'autre membre en devenant diviseur.* Explication : division des deux membres par 2. *Geste : passage multiplicatif d'une expression positive dans l'autre membre, le facteur devient diviseur.*	$\boxed{2}b > c \rightarrow b > \frac{c}{\boxed{2}}$

2.5.3. Les déplacements au même niveau de diviseurs dans les relations

Descriptions	Exemples
Technique : *un diviseur b non nul d'un membre d'une relation = ≠ passe dans l'autre membre en devenant multiplicateur.* Explication : multiplication des deux membres par *b*. *Geste : passage multiplicatif dans l'autre membre, le diviseur devient facteur.*	Quand $b \neq 0$ $\frac{a}{\boxed{b}} = c \rightarrow a = \boxed{b}c$
Technique : *un diviseur strictement positif d'un membre d'une relation < ≤ > ≥ passe dans l'autre membre en devenant multiplicateur.* Explication : multiplication des deux membres par 2. *Geste : passage multiplicatif d'une expression positive dans l'autre membre, le diviseur devient facteur.*	$\frac{b}{\boxed{2}} \leq c \rightarrow b \leq \boxed{2}c$
Technique : *un diviseur strictement négatif d'un membre d'une relation < ≤ > ≥ passe dans l'autre membre en devenant multiplicateur avec changement de sens de l'inégalité.* Explication : multiplication des deux membres par – 2. *Geste : passage multiplicatif d'une expression négative dans l'autre membre, le diviseur devient facteur, changement de sens de l'inégalité.*	$\frac{b}{\boxed{-2}} > c \rightarrow b < \boxed{-2}c$ $\frac{b}{\boxed{-2}} \leq c \rightarrow b \geq \boxed{-2}c$

2.5.4. Les entrées d'expressions dans les relations et les sorties

Il n'y a pas d'entrée d'additionneurs, facteurs ou diviseurs dans une relation car la somme, le produit, le quotient d'une relation par une expression n'est pas une formule. C'est une description de transformation. Il en va de même pour les sorties.

2.6. Les mouvements de signe –

Le signe – peut toujours être considéré comme un facteur – 1, exemples : $-ab = (-1)ab$ et $a - bc = a + (-1)bc$. Il est donc possible de faire des mouvements de signe – avec les statuts de multiplicateur et diviseur, comme pour une sous-expression. Ainsi, le mouvement : *Un multiplicateur du numérateur d'une fraction sort comme multiplicateur de la fraction* produit : *Un signe – au numérateur d'une fraction sort comme signe – de la fraction,* exemple : $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$.

2.7. Dénombrement

Le tableau 1 dénombre les cas étudiés dans le cadre de cette théorie, ceux où l'on se demande s'il y a ou non un geste produisant une transformation correcte, et les mouvements retenus, qui sont les cas où il y a une transformation correcte.

Ainsi, pour les opérateurs fondamentaux + – × / et les relations, dans le cadre des mouvements considérés (déplacements au même niveau dans une expression, sorties d'expression, des entrées dans une expression), cadre qui comporte 74 cas, on a 56 gestes qui produisent des transformations correctes. Les gestes productifs sont nombreux : 56 sur 74, soit 76%.

Nous trouvons cette proportion assez étonnante et nous pensons qu'elle doit nous inciter à donner plus de place au geste dans l'apprentissage de l'algèbre.

Statut	Dans les opérateurs	Type de mouvement	Cas étudiés	Mouvements retenus
additionneur	+ – × /	déplacements, sorties, entrées	14	5
multiplicateurs	+ – × /	déplacements, sorties, entrées	14	11
diviseurs	+ – × /	déplacements, sorties, entrées	14	11
additionneur	= < ≤ > ≥ ≠	déplacements	6	6
multiplicateurs	= < ≤ > ≥ ≠	déplacements	6	6
diviseurs	= < ≤ > ≥ ≠	déplacements	6	6
signe –	+ – × /	déplacements, sorties, entrées	14	11
Total			74	56

Tableau 1. *Nombres de cas étudiés et de mouvements corrects retenus.*

3. — L'apprentissage des mouvements dans les formules

3.1. *L'hypothèse de la place du geste*

Lorsque nous considérons les gestes basiques des mouvements dans les formules, tels que nous les avons décrits en section 2, nous trouvons que ces gestes sont nombreux. Certains sont très utiles dans des situations fréquentes (et cela ne se limite pas à la commutativité et aux mouvements dans les relations). La question qui se pose est la suivante :

Ces gestes sont-ils des schémas mentaux utilisés par les élèves, élèves débutants ou confirmés, élèves faisant peu ou beaucoup d'erreurs ?

Les travaux que nous avons cités dans l'introduction [Kieran 2007, Wittmann et *al.* 2013, Bouhineau et *al.*, 2003, Chaachoua et *al.*, 2006, Croset, 2007] répondent clairement *oui*, en particulier pour des élèves qui calculent correctement. Il nous semble que la tendance générale à éviter le vocabulaire des gestes avec les élèves pourrait être contreproductive. Il pourrait bien se faire que l'on mette ainsi les élèves dans la situation *d'appliquer des gestes sans avoir le droit d'en parler* (au moins lorsque le professeur est présent). Cela doit induire pour les élèves des difficultés à faire le tri entre les gestes corrects et les gestes erronés.

Nous faisons l'hypothèse que l'apprentissage des mouvements dans les formules est efficace et nous proposons de l'enseigner selon les cinq principes suivants.

1) *Apprendre des gestes corrects précis*

Si le geste n'est pas décrit avec toutes ses composantes, il devient flou et sera facilement appliqué de façon erronée. Le statut additionneur / multiplicateur / diviseur et son éventuelle évolution sont très importants. Sans cela, on peut penser que l'on peut passer du statut de multiplicateur à celui d'additionneur, et donc que l'on peut effectuer la transformation

$$\boxed{2}x = 5 \longrightarrow x = 5 + \boxed{2}$$

Dans quels termes faut-il exprimer le statut ? Nous ne le savons pas. Nous avons proposé des formulations avec *expression additive* à la place d'additionneur et de *facteur* à la place de multiplicateur pour ne pas introduire de nouveaux termes dans le langage de l'élève.

Les autres modifications liées au geste (changer le signe de l'expression ; changer le sens de l'inégalité) sont bien sûr très importantes.

2) *Apprendre des justifications*

Les gestes seuls, même précis, ne suffisent pas, car sans les justifications ils peuvent se déformer et devenir incorrects. Il faut donc connaître les formules qui les justifient ou les procédures qui les expliquent. Il faut toujours être capable de fournir la justification ou l'explication, sans pour autant la fournir chaque fois.

3) *Savoir que certains gestes sont incorrects*

Savoir que certains gestes sont incorrects est important, par exemple savoir que l'on ne sort pas une expression additive du numérateur d'une fraction pour la placer devant la fraction.

Sackur et *al.* [2005] ont constaté que « Certaines des erreurs faites par les élèves ou les étudiants sont extrêmement tenaces et résistent aux efforts d'explication et de démonstration faits par les enseignants ». Il pourrait être utile, lorsque l'erreur semble provenir d'un geste erroné, de mettre l'accent sur le caractère erroné du geste en plus du fait de prouver que le résultat du calcul est erroné.

4) *Ne pas inventer de geste*

Tout geste doit être classé dans l'une des trois familles : « geste correct », « geste erroné », « je ne sais pas ». Il ne faut pas supposer qu'un geste que l'on ne connaît pas peut s'appliquer. *Faire un geste que l'on ne connaît pas, c'est faire n'importe quoi*. Lorsque l'on n'arrive pas à résoudre les exercices par manque de connaissances opératoires, il faut apprendre de nouveaux gestes corrects ou de nouvelles règles ou procédures.

Le langage de l'algèbre a une particularité de concision que l'on ne trouve pas dans beaucoup d'autres domaines. Par exemple, en langage naturel, quelques perturbations effectuées n'importe où dans une phrase n'empêchent généralement pas de comprendre le sens de la phrase. Il n'en va pas de même du langage algébrique pour lequel toute perturbation qui n'est pas dans la liste de celles qui correspondent à des règles correctes, produit généralement une expression qui n'a pas le même sens, qui n'est pas équivalente.

5) *Les gestes complètent les règles et les procédures, toutes les règles et les procédures ne se transforment pas en gestes*

Un développement est une opération complexe qui a priori n'a rien d'un geste. Le fait que l'algèbre dynamique ait un geste qui s'interprète comme un développement (voir section 4) ne change rien à cela.

3.2. *Un outil pour aider à apprendre les gestes et leurs justifications*

L'algèbre dynamique, telle qu'elle est implantée dans epsilonwriter, est a priori un bon outil pour aider l'élève à faire le tri entre les gestes corrects et les gestes incorrects, ainsi que pour apprendre les justifications des gestes corrects.

L'élève qui utilise *epsilonwriter* avec les options *Algèbre dynamique pédagogique*, *Expliquer l'algèbre dynamique* et *Décrire le geste d'algèbre dynamique* a de riches informations qui lui sont fournies sur les gestes basiques corrects et l'indication que le geste est erroné pour les gestes basiques erronés. Cela doit lui permettre d'organiser plus facilement ses connaissances qu'il ne peut le faire dans le contexte habituel où il fait des gestes sans savoir s'ils sont corrects ou erronés, car la plupart du temps il n'a personne pour l'observer.

Nous ne prétendons pas avoir choisi la meilleure terminologie pour les descriptions des gestes et des explications. Ces descriptions sont externalisées dans des fichiers que les professeurs peuvent modifier. Dans un avenir proche, un lien sera ajouté à l'explication. Ce lien permettra d'aller sur une page web décrivant le geste de façon détaillée et donnant sa justification. Des pages web seront produites par les auteurs de cet article. Les professeurs et les chercheurs qui le souhaitent pourront construire leurs propres pages.

4. — L'algèbre dynamique dans *epsilonwriter*

Nous allons maintenant décrire l'algèbre dynamique dans toutes ses dimensions, la mise en œuvre de la théorie des mouvements dans les formules n'en constituant qu'une petite partie. Les actions d'algèbre dynamiques implantées dans epsilonwriter se décomposent en trois familles : le glisser-déposer qui effectue un calcul, le *calcul par clic* et l'application de règles de réécriture.

4.1. *Les modes opératoires du glisser-déposer d'algèbre dynamique et le* calcul par clic

Avant l'implantation de l'algèbre dynamique, epsilonwriter était un éditeur de textes et de formules proposant plusieurs résultats dans un popup (petite fenêtre surgissante) pour certaines actions, en particulier lors de la saisie, voir figure 1, ainsi que lors du collage et du glisser-déposer de formules, voir figure 2.

4.1.1. *Le mode opératoire du glisser-déposer d’algèbre dynamique*

Avec l’option Algèbre dynamique dans epsilonwriter, lorsque l’on effectue un glisser-déposer, les actions d’algèbre dynamique sont proposées dans le popup à côté des actions d’édition simple. Ces propositions d’actions comportent le résultat de la dépose ainsi que l’explication. Le popup est affiché au fur et à mesure du déplacement du curseur dans l’expression, voir figure 3.

Lorsque l’on relâche le bouton de la souris, s’il y a une seule dépose, elle est appliquée ; s’il y en a plusieurs, le popup reste affiché pour permettre de choisir. L’application de la dépose se fait en fonction des options.

Avec l’option *Expliquer les calculs sur la même ligne,* on obtient :

$4 = 3x$
$0 = -4 + 3x$ Addition aux deux membres de – 4

Avec l’option *Expliquer les calculs dans un tableau,* on obtient :

$4 = 3x$

$\boxed{4} = 3x \rightsquigarrow 0 = \boxed{-4} + 3x$
Explication : Addition aux deux membres de – 4.

$0 = -4 + 3x$

Avec l’option *Décrire le geste d’algèbre dynamique,* on obtient la description du geste et l’explication :

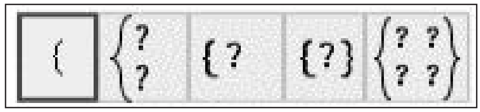

Figure 1. *Menu présenté dans un popup lors de la frappe de { dans du texte. On peut prendre l’accolade telle quelle ou passer en math avec un système (ayant 2 lignes ou 1 ligne), un ensemble ou une matrice.*

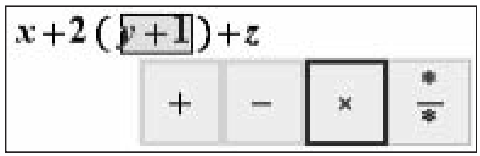

Figure 2. *Situation apportée par le collage de* $\mathbf{y+1}$ *dans* $\mathbf{+2+z}$*, le curseur étant derrière* **2** *. Il y a 4 propositions : collage avec + × /. Lorsque l’on survole un bouton, la proposition correspondante est affichée. Lorsque l’on clique, elle est choisie.*

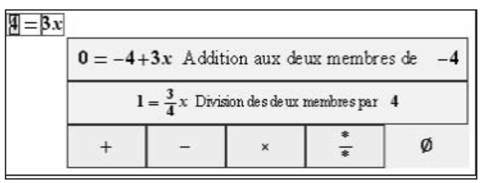

Figure 3. *L’expression sur laquelle s’effectue le travail est en haut à gauche. Après la sélection de 4, on effectue un glisser sur la droite. Lorsque la souris se trouve juste devant 3, un curseur est affiché à cet endroit et deux possibilités de dépose d’algèbre dynamique sont présentées dans un popup à côté de quatre possibilités de dépose d’édition simple et de Ø qui signifie « ne rien faire ». Si l’on continue le glisser, le popup est remplacé par un autre ou disparaît.*

$4 = 3x$

$\boxed{4} = 3x \rightsquigarrow 0 = \boxed{-4} + 3x$
Geste : Passage additif dans l'autre membre en changeant de signe Explication : Addition aux deux membres de – 4.

$0 = -4 + 3x$

Toutes les actions ont une explication. Certains gestes seulement ont une description. Les textes des explications et des descriptions de gestes peuvent être modifiés par les enseignants. On peut n'afficher ni explication ni geste. On peut aussi ne pas dupliquer auquel cas l'expression transformée remplace l'expression initiale.

4.1.2. Le *calcul par clic*

Le *calcul par clic* concerne les calculs numériques, l'addition de termes semblables et la multiplication de facteurs semblables. Le domaine sur lequel s'effectuent les calculs numériques est choisi par l'utilisateur dans les options. Actuellement, ce domaine peut être les entiers, les décimaux ou les rationnels.

Le *calcul par clic* donne aussi accès aux formules du discriminant et aux formules de Cardan pour résoudre les équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ et $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Le *calcul par clic* peut s'effectuer de deux façons.

Sélectionner une expression ou une sous-expression et demander son calcul par un Ctrl+Clic

Exemples :

— Sélection de $\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$ et Ctrl+Clic, résultat $\frac{11}{6}$ (calcul sur les rationnels).

— Sélection de $2(x-2) + 3(x-2)$ et Ctrl+Clic, résultat $5(x - 2)$ (addition de termes semblables).

— Sélection de $(x-2)(x-2)^2$ et Ctrl+Clic, résultat $(x - 2)^3$ (multiplication de facteurs semblables).

Faire un Ctrl+Clic sur un opérateur pour demander de calculer l'expression dont cet opérateur est l'opérateur principal

Exemple :

Dans $6x\,(\frac{3}{2} + \frac{1}{3})$ Ctrl+Clic sur + , résultat $6x\,\frac{11}{6}$ (calcul sur les rationnels de $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}$).

Comme pour les glisser-déposer, les options permettent d'afficher ou non une explication, et de dupliquer, ou de ne pas dupliquer. Il n'y a pas de description de geste ici.

4.1.3. Le panneau Calcul et les modes d'algèbre dynamique

Le panneau *Calcul* (figure 4 de la page suivante) permet de paramétrer l'algèbre dynamique et de lancer certaines actions. Il y a quatre modes d'algèbre dynamique et un mode *Sans algèbre dynamique*. Le mode *pédagogique* est celui qui met en œuvre la théorie des mouvements dans les formules. Il concerne les actions *basiques*. Les autres modes contiennent en plus des actions qui ne sont pas basiques (de plus en plus en passant de *faible* à *fort*) et en moins certaines actions *basiques* qui sont compliquées ou peu utiles comme : $\frac{\boxed{a}b}{c} \to \frac{b}{\frac{c}{\boxed{a}}}$ (les actions *basiques* ont été définies en section 2. Elles ne sont pas forcément simples).

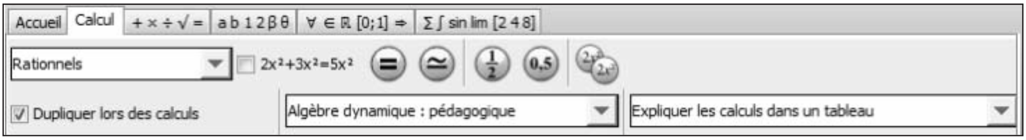

Figure 4. *Le panneau de calcul permet de choisir, en haut, le domaine des calculs numériques exacts (ici, ce sont les rationnels), l'addition ou non des termes semblables (case à cocher $2x^2 + 3x^2 = 5x^2$). En bas, il permet de choisir de présenter le résultat en dessous ou à la même place (Dupliquer), de choisir le mode d'Algèbre dynamique (expliqué ci-dessous) ainsi que le mode d'affichage des résultats (expliqué en 4.1.1.). En haut, les boutons permettent de demander : un calcul exact, un calcul approché, une conversion de décimal en fraction, une conversion de fraction en décimal, une duplication.*

4.2. Deux exemples

4.2.1. Résolution d'une équation élémentaire avec les options *Algèbre dynamique pédagogique* et *Expliquer le geste*

Les lignes en italique décrivent le geste qui est fait. Elles ne sont pas présentes à l'écran, contrairement aux autres lignes.

$2x + 4 = 1$
4 *est déplacé derrière* 1

$2x + \boxed{4} = 1 \rightsquigarrow 2x = 1\boxed{-4}$	*Geste : Passage additif dans l'autre membre en changeant de signe* Explication : Addition aux deux membres de – 4

$2x = 1 - 4$
Un Ctrl+Clic est effectué sur –

$1 - 4 \rightsquigarrow -3$	Calcul numérique

$2x = -3$
2 *est déplacé devant* 3

$\boxed{2}x = -3 \rightsquigarrow x = \dfrac{-3}{\boxed{2}}$	*Geste : Passage multiplicatif dans l'autre membre, le facteur devient diviseur* Explication : Division des deux membres par 2

$x = \dfrac{-3}{\boxed{2}} \rightsquigarrow x = -\dfrac{3}{\boxed{2}}$	Explication : Opposé d'une fraction

$x = -\dfrac{3}{2}$

A noter que l'explication dans un tableau peut comporter plusieurs lignes.

4.2.2. Factorisation avec les options *Algèbre dynamique moyen* et *Expliquer les calculs sur la même ligne*

Ce qui est affiché à l'écran	Le geste effectué pour passer à la ligne suivante
$(x-3)(6x+4)+4x(3x+2)$	Le 6 de $6x$ est déplacé devant $(x-3)$
$2(x-3)(3x+2)+4x(3x+2)$ PGCD en facteur : 2	L'un des $(3x+2)$ *est déplacé devant l'expression*
$(3x+2)(2(x-3)+4x)$ Mise en facteur de $3x+2$	*Le* 2 *devant* $(x-3)$ *est déplacé dans* $(x-3)$
$(3x+2)(2x-6+4x)$ Développement	$4x$ est déplacé sur $2x$
$(3x+2)(6x-6)$ Addition de termes semblables	L'un des 6 est déplacé devant l'expression
$6(3x+2)(x-1)$ Mise en facteur de 6	

A noter qu'aucune de ces actions n'est *basique* (donc aucune n'est accessible en option *pédagogique*) et qu'elles sont toutes accessibles en option *faible* sauf «PGCD en facteur» qui nécessite l'option *moyen*.

4.3. *Le glisser-déposer interne et ses actions non basiques*

Le glisser-déposer interne s'effectue à l'intérieur d'une expression polynomiale ou rationnelle, d'une égalité ou d'une inégalité. Les actions de la théorie des mouvements dans les formules sont des glisser-déposer internes. Le glisser-déposer interne préserve l'équivalence. Il est toutefois nécessaire d'ajouter parfois des conditions telles que $x \neq 0$ pour cela.

Le glisser-déposer interne comporte des gestes non *basiques* : mise en facteur, développement, addition de termes semblables, simplification, etc. Pour ces gestes l'expression qui a été déplacée disparaît parfois, est dédoublée d'autres fois. Le tableau 2 (voir page suivante) présente les principaux glisser-déposer internes non basique.

Ces actions sont puissantes. Les deux dernières permettent par exemple de résoudre les équations du second degré sans utiliser le discriminant. Des démonstrations sont présentées sur le site http://epsilonwriter.com

4.4. *Le glisser-déposer externe*

Dans le glisser-déposer externe, on prend une expression a pour la déposer sur une expression b, les deux expressions étant disjointes en ce sens que a et b ne font pas partie d'une même expression polynomiale ou rationnelle, égalité ou inégalité. Par exemple, a est suivi de texte qui est suivi de b (cas que nous appelons *véritablement externe*), ou encore a et b sont deux équations d'un système d'équations (cas que nous appelons *assimilé externe*). Le pointage du glisser-déposer externe est différent du pointage du glisser-déposer interne, car il ne s'agit pas d'indiquer une position de curseur comme destination, mais d'indiquer une expression. Cela se fait en survolant l'opérateur principal de l'expression de destination, celle-ci étant alors affichée sur fond bleu. Voir figure 5…

Tableau 2. *Les principales actions non basiques glisser-déposer internes.*

Description	Exemple
Mise en facteur par sortie d'un facteur d'une somme	$\boxed{a}b + c \rightarrow \boxed{a}\left(b+\frac{c}{a}\right)$
Mise en facteur du PGCD	$\boxed{4}x + 6 \rightarrow \boxed{2}(2x + 3)$
Développement par entrée d'un facteur dans une somme	$\boxed{a}(b+c) \rightarrow \boxed{ab + ac}$
Développement par entrée d'un exposant dans une somme	$(x-3)^{\boxed{2}} \rightarrow \boxed{x^2 - 6x + 9}$
Entrée d'un exposant dans un opposé, un produit	$(-x)^{\boxed{4}} \rightarrow x^{\boxed{4}}$ $\quad (2x)^{\boxed{4}} \rightarrow \boxed{16x^4}$
Entrée d'un exposant dans une fraction, une puissance	$\left(\frac{2x}{y}\right)^{\boxed{3}} \rightarrow \boxed{\frac{8x^3}{y^3}}$ $\quad (x^3)^{\boxed{4}} \rightarrow \boxed{x^{12}}$
Sortie additive d'une fraction	$\frac{\boxed{3}+a}{6} \rightarrow \boxed{\frac{3}{6}} + \frac{a}{6}$
Entrée additive dans une fraction	$\boxed{2} + \frac{a}{5} \rightarrow \frac{\boxed{2\times 5}+a}{5}$
Addition de termes semblables	$\boxed{\frac{(x-1)^2}{3}} + \boxed{2(x-1)^2} \rightarrow \boxed{\frac{7(x-1)^2}{3}}$
Simplification dans une fraction de facteurs semblables, simplifications des signes −	$\frac{2\boxed{x^2}}{\boxed{x}y} \rightarrow \frac{2\boxed{x}}{y}$
Simplification dans une fraction par le PGCD	$\frac{\boxed{24}x}{\boxed{15}y^2} \rightarrow \frac{\boxed{8}x}{\boxed{5}y^2}$
Mise sous forme canonique en déposant ax sur x^2	$\boxed{x^2} + \boxed{6x} \rightarrow \boxed{(x+3)^2 - 3^2}$
Décomposition d'une équation de la forme $\mathrm{A}^2 = b$ en déposant l'exposant 2 de l'autre côté du signe =	$(x-3)^{\boxed{2}} = 5$ $\rightarrow \boxed{x - 3 = \sqrt{5} \text{ ou } x-3 = -\sqrt{5}}$

substitution $\boxed{\begin{cases} x = 2u+3 \\ y = u-1 \end{cases}}$ et expression $\frac{\boxed{3x+y+1}}{x-y}$	$\frac{3(2u+3)+u-1+1}{x-y}$

Figure 5. *A gauche* $\begin{cases} x = 2u + 3 \\ y = u - 1 \end{cases}$ *a été sélectionné, il apparaît sur fond jaune.*

Un glisser a ensuite été effectué et la souris se trouve au-dessus d'un signe + ce qui sélectionne l'expression dont c'est l'opérateur principal, à savoir $3x + y + 1$*, qui apparaît sur fond bleu, et l'application de la substitution est proposée (non affichée dans la figure). En relâchant le bouton de la souris à ce moment, on obtient l'expression de droite.*

Le glisser-déposer externe comprend en premier lieu l'application d'une substitution à une expression ou sous-expression. Dans ce cas, il n'y a pas d'équivalence entre l'expression d'origine et l'expression transformée. Il comporte aussi la dépose d'une expression numérique a (avec ou sans variable) sur une égalité ou inégalité. Dans ce cas, *epsilonwriter* propose d'effectuer une opération avec a sur les deux membres de l'égalité ou l'inégalité parmi *ajouter, soustraire, multiplier, diviser*, les deux dernières opérations n'étant proposées pour les inégalités que lorsque a est constant et non nul. Cette opération préserve l'équivalence lorsque a est constant.

Il comporte enfin la dépose d'une égalité ou inégalité sur une autre égalité ou inégalité, pour les ajouter ou les soustraire membre à membre, si l'on est dans un cas où le résultat de l'opération est impliqué par les deux égalités ou inégalités (par exemple, l'addition membre à membre de $x < 2$ avec $y > 3$ n'est pas proposée).

4.5. *Le discriminant et les formules de Cardan*

Le *calcul par clic* s'applique aux équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ et $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ en présentant le schéma de résolution de ces équations et en fournissant les éléments pour les résoudre avec l'algèbre dynamique. Si l'on effectue en mode *Algèbre dynamique fort* un Ctrl+Clic sur l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, on obtient le déroulement ci-contre.

On peut alors faire un glisser-déposer de $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$ sur $\Delta = b^2 - 4ac$ qui produit $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1(-1)$ puis obtenir $\Delta = 5$ par un *calcul par clic*.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$x = x_1$ ou $x = x_2$

$S = \{ x_1 ; x_2 \}$

$$\Delta = 0$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

$x = x_1$

$S = \{x_1\}$

$$\Delta < 0$$

Pas de solution

$S = \emptyset$

On peut ensuite supprimer les parties correspondant à $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$ qui ne sont pas concernées, puis faire des glisser-déposer de

$\Delta = 5$ et de $\begin{cases} a = \ \ 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$ sur les formules des

solutions dont on termine le *calcul par clic*. On peut enfin faire un glisser-déposer des formules obtenues sur $x = x_1$ ou $x = x_2$ ou sur $S = \{x_1\ ;\ x_2\}$ selon la forme finale souhaitée.

Pour les équations qui sont de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, quand $a \neq 1$, *epsilonwriter* conseille de diviser les deux membres par a. Et pour les équations de la forme $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, quand $b \neq 0$, *epsilonwriter* conseille de faire le changement de variable $y = x + b/3$ qui permet de faire disparaître le terme de degré 2.

Pour les équations de la forme $x^3 + px + q = 0$ *epsilonwriter* propose les formules de Cardan de façon analogue aux formules du discriminant présentées ci-dessus.

4.6. *La réécriture*

Une règle de réécriture est une formule de la forme $a \longrightarrow b$ qui se lit « a se réécrit en b ». Ces règles constituent l'un des mécanismes fondamentaux de l'informatique et sont utilisées dans des contextes variés allant du traitement de formules mathématiques au traitement du langage naturel. En algèbre, nous les utilisons lorsque nous appliquons des identités (l'application d'une identité se fait dans un sens, la règle de réécriture précise ce sens). Ainsi $a^2 - b^2 \longrightarrow (a-b)(a+b)$ est une règle de réécriture de factorisation, son inverse étant une règle de réécriture de développement. Dans cette notation, nous disons que a et b sont des variables d'unification car elles sont faites pour être unifiées (mises en correspondance) avec n'importe quelle sous-expression.

Par exemple $a^2 - b^2$ s'unifie à $(\frac{x}{3})^2 - y^2$.

La réécriture fonctionne actuellement dans *epsilonwriter* dans le mécanisme du *Chercher/Remplacer* : on écrit la partie gauche de la règle dans la partie *Chercher* et la partie droite dans la partie *Remplacer*. Les variables d'unifications doivent être indiquées à l'aide d'un opérateur qui les place dans des cercles. Ainsi, si l'on écrit :

$$@^2 - b^2$$

@ est une variable d'unification pouvant correspondre à n'importe quoi tandis que b est une lettre fixe ne pouvant correspondre qu'à b.

Le tableau 3 fournit des exemples de réécritures effectuées *avec epsilonwriter*.

Dans le futur, la réécriture sera enrichie dans *epsilonwriter*. Il sera possible de faire un glisser-déposer d'une règle exprimée sous la forme $a \longrightarrow b$ ou d'un ensemble de règles sur une formule pour obtenir la liste des règles applicables et pouvoir choisir celle qui sera appliquée, ou pour demander l'application des règles applicables de l'ensemble fourni jusqu'à terminaison (jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucune règle applicable, ce qui n'est pas toujours possible).

4.7. *Les usages de l'algèbre dynamique non basique*

Dans les sections 2 et 3, nous avons développé nos idées sur les usages de la partie *basique* de l'algèbre dynamique, partie utile aux élèves surtout pendant les premières années de calcul algébrique. La partie complémentaire, que nous venons de présenter en section 4, est très riche. Elle permet de faire de très nombreux calculs, étape par étape, à partir de gestes, en obte-

***Tableau 3.** Réécritures effectuées avec epsilonwriter.*

Forme cherchée	**Forme réécrite**	**Formule unifiée**	**Réécriture obtenue**
$(@ + \textcircled{b})^2$	$@^2 + 2\, @\, \textcircled{b} + \textcircled{b}^2$	$\left(xy + \frac{\sqrt{x}}{3}\right)^2$	$(xy)^2 + 2(xy)\frac{\sqrt{x}}{3} + \left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)^2$
$\frac{@}{\textcircled{b}}$	$@\, \textcircled{b}^{-1}$	$\frac{x-1}{2+\frac{3}{y}}$	$(x-1)(2+3y^{-1})^{-1}$ en exécutant deux fois l'action
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - @\right)$	$\cos @$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3}\right)$	$\cos\frac{\theta}{3}$

nant des explications. C’est aussi l’intermédiaire entre la rédaction papier, dans laquelle l’élève doit tout faire, et le calcul formel, avec lequel l’élève ne fait aucun calcul et voit disparaître les étapes intermédiaires. Elle est utilisable par les élèves comme par les professeurs.

5. — Conclusion

Nous développons des logiciels pour les mathématiques et l’éducation. C’est l’objectif de la société Aristod, startup du Laboratoire d’Informatique de Grenoble. Il s’agit, d’une part, de faciliter le traitement informatique des formules mathématiques pour les débutants aussi bien que pour les experts, traitement qui est très en retard sur celui des autres objets (texte, image, son, vidéo) et, d’autre part, de développer des outils pour l’éducation bénéficiant de ces nouveaux traitements. L’algèbre dynamique se situe pleinement dans le cadre de cet objectif. Sur le plan général, elle doit permettre d’éditer beaucoup plus facilement les formules que les éditeurs actuels. Sur le plan de l’éducation, nous pensons qu’elle peut apporter une aide importante à la rédaction de raisonnements par les professeurs et par les élèves, mais aussi qu’elle peut favoriser l’apprentissage de l’algèbre en aidant l’élève à connaître les gestes corrects et leur justifications, et à savoir que certains gestes qu’il a envie de faire sont erronés.

On dit parfois que certains logiciels permettent de réifier la pensée à travers des objets qui sont montrés à l’écran ou de la concrétiser à travers des gestes qui la traduisent. Il nous semble que l’algèbre dynamique entre dans la deuxième catégorie.

Bien sûr, ces apports potentiels restent à prouver. Nous espérons que des psychologues, des didacticiens et des professeurs mettront en place des expérimentations nombreuses pour valider ou invalider ces idées et chercheront le vocabulaire le plus adapté pour décrire les gestes et les explications.

Références

[Bouhineau et al., 2003] Bouhineau D., Bronner A., Chaachoua H., Huguet T. Analyse didactique de protocoles obtenus dans un EIAH en algèbre. Dans *Actes de Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain*. Strasbourg, France (2003).

[Chaachoua et al., 2006] Chaachoua H., Bittar M., Nicaud J.F. Student's modelling with a lattice of conceptions in the domain of linear equations and inequations. In *Proceedings of the 30th Conference of Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, 2006, p 281-288.

[Croset 2007] Croset M.C. Prise en compte du contexte algébrique dans la modélisation des connaissances d'un élève. Le cas de la factorisation. Dans Actes de *Environnements Informatiques pour l'apprentissage Humain,* Lausanne, Suisse (2007).

[Kieran 2007] Kieran C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 707–762). Charlotte: Information Age Publishing.

[Nicaud et al. 2004] Nicaud, J.F., Bouhineau, D., and Chaachoua H. Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra, in *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* Volume 9, Issue 2, Springer-Verlag.

[Nicaud et al. 2006] Nicaud J.F., Bittar M., Chaachoua H., Inamdar P., Maffei L. Experiments with Aplusix in Four Countries. In *International Journal for Technology in Mathematics Education,* v13 n2 p79-88, 2006.

[Nicaud & Viudez 2009] Nicaud J.F., Viudez C. EpsilonWriter: implementing new ideas for typing text and math. In *Proceedings of The MathUI workshop 2009*. Grand Bend, Ontario, Canada.

[Nicaud & Mercat 2012] Nicaud J.F., Mercat C. Algèbre dynamique, glisser-déposer par équivalence. Actes des *Journées mathématiques de l'Institut Français de l'Éducation* (ENS de Lyon), 2012.

[Nicaud 2013] Nicaud J.F. La théorie des mouvements dans les formules. http://epsilon-writer.com/TMF

[Sackur et al., 2005] Sackur C., Assude T. Maurel M., Drouhard J.P., Paquelier Y. L'expérience de la nécessité épistémique. Dans *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 25, no1, pp. 57-90. La Pensée sauvage, Grenoble, France.

[Wittmann et al. 2013] Wittmann M.C., Flood V.J., Black K.E. Algebraic manipulation as motion within a landscape. In Educational Studies in Mathematics vol 82(2), pp 169–181, 2013.