PRATIQUES PEDAGOGIQUES DE PROBLEMES OUVERTS DANS UN COLLEGE EXPERIMENTAL A ATHENES

Georgios KOSYVAS
Professeur de Mathématiques au
Lycée Expérimental Varvakeio d'Athènes

Résumé : *Ce travail est centré sur la résolution de trois problèmes ouverts dans des classes d'un collège grec. Les pratiques pédagogiques qui sont décrites ici sont liées au programme officiel. Les expérimentations sont effectuées par un enseignant-chercheur qui essaie d'impliquer ses élèves dans de véritables démarches de recherche en mathématiques. Les résultats de la recherche montrent de quelle manière des situations ouvertes peuvent conduire les élèves à réfléchir et à développer des stratégies mathématiques très variées. Chaque problème ouvert suscite l'intérêt des élèves et sert de motivation pour l'investigation des erreurs et l'approfondissement des concepts mathématiques. Les élèves développent des échanges argumentés, un esprit réflexif, ils formulent des interrogations, élaborent des conjectures et recherchent en commun les meilleures solutions. Ce sont des activités riches, qui favorisent la communication et encouragent le raisonnement mathématique.*

Introduction

En mathématiques, le terme *problème ouvert* se réfère habituellement aux problèmes qui sont restés non résolus pendant une longue période, comme par exemple le dernier Théorème de Fermat qui a été résolu en 1993 ou la Conjecture de Goldbach qui reste encore sans solution. En didactique des mathématiques, le terme "problème ouvert" renvoie à un problème de recherche qui n'engage pas les élèves à suivre une méthode spécifique de solution. Ce n'est pas un problème de routine quotidienne de la classe. C'est plutôt un problème inhabituel pour lequel l'élève ne dispose d'aucune procédure de résolution éprouvée.

L'introduction du terme "problème ouvert" est d'origine japonaise (Becker & Shimada 1997), il est apparu durant les années 70 et il avait pour but de réformer l'enseignement des mathématiques à l'aide d'approches ouvertes en pratique pédagogique (Pehkonen 1991). Chez les didacticiens des mathématiques, il n'y a pas une définition commune du problème ouvert. Il est évident que tous les problèmes ouverts ne sont pas pertinents d'un point de vue pédagogique. Nous pouvons distinguer entre autres quatre catégories de problèmes ouverts : les problèmes ouverts avec variété de stratégies de résolution, ceux dont les résultats sont multiples, ceux dont l'interprétation de l'énoncé est ouverte et enfin les problèmes ouverts-énigmes (Kosyvas 1995, Kosyvas 2010b).

Dans les problèmes ouverts, la question est formulée avec clarté seulement du point de vue grammatical-rédactionnel. Contrairement au niveau sémantique, il existe une ambiguïté dans la question. Ceci ne signifie pas que le problème soit vague en tant que problème, mais plutôt que sa formulation implique aussi la réflexion des élèves. Nous allons préciser la nature du problème ouvert à laide d'un exemple : *Problème des gardiens de musée : on s'intéresse à la surveillance d'une salle de musée, dont les murs sont rectilignes : on y place des gardiens qui sont assis sur des chaises. Ces chaises sont fixées au sol (les gardiens ne peuvent donc pas se déplacer dans la salle), mais elles sont pivotantes (les gardiens peuvent donc voir dans toutes les directions à partir de leur position). Quel est le nombre minimum de gardiens dont il faut disposer pour surveiller toute la salle, et comment faut-il les placer ?* D'après Sauter (2008), il s'agit d'une situation bien concrète mais qui pose de nombreuses questions : quelle est la forme de la salle ? Combien a-t-elle de murs ? Y a-t-il des obstacles ? Ceci signifie que le problème ouvert n'est pas déterminé de façon univoque. Il est nécessaire de clarifier de nombreuses choses préalablement. Il s'agit d'un multi-problème, un problème avec de nombreuses directions ouvertes.

La notion de problème ouvert peut être expliquée de la manière suivante : un problème est fermé si la situation initiale et la situation finale sont bien définies. Un problème est considéré comme bien défini dans la mesure où les données initiales, les contraintes et le but sont énoncés de façon explicite et opérationnelle. Dans l'énoncé du problème, la personne a en sa possession, sans devoir les définir elle-même, tous les éléments et les critères concrets et précis pour évaluer la démarche et non le but. Si la situation initiale ou la situation finale est ouverte, nous avons un problème ouvert. Le degré de précision de l'état initial et de l'état final, obtenu à la suite de la résolution des problèmes, comporte le critère du caractère ouvert.

Une étude pertinente du “problème ouvert” a été réalisée par une équipe de l'Irem de Lyon, elle a étudié des problèmes posés à des élèves du collège et du lycée, qui visaient au développement d'attitudes de recherche et de capacités de méthodologie scientifique (Arsac & Mante 2007). Une recherche scientifique développe des capacités de méthodologie multiples, comme la formulation des hypothèses de travail, la préparation du projet expérimental ou de recherche, le choix de l'échantillon, la mise en place des outils d'évaluation, l'analyse et l'interprétation des résultats. Certaines de ces capacités apparaissent à chaque problème ouvert. Selon l'équipe de l'Irem de Lyon, le problème ouvert, proposé et examiné par les élèves, présente les caractéristiques suivantes :

- L'énoncé est court.
- L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions “montrer que”). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou à l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.
- Le problème ouvert se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves sont assez familiarisés. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples. (Arsac & Mante 2007, p. 20)

De manière plus analytique, l'adoption des caractéristiques ci-dessus, que le groupe de recherche de l'Irem de Lyon considère comme nécessaires à chaque problème ouvert, est justifiée comme suit : l'énoncé du problème est habituellement court et formulé en langage courant ou mathématique ; l'énoncé simple et court favorise la lecture rapide, la compréhension et crée des conditions de facilité en ce qui concerne ce qui se maintiendra en mémoire et la gestion des données. En outre, il peut donner l'impression que le problème est facile et incite ainsi à s'y intéresser ; en aucun cas, cette solution ne devra se limiter à l'utilisation simple ou à l'application directe de conclusions ou de règles qui se sont présentées durant les derniers cours il constituerait alors un problème d'application directe et non un problème ouvert. Cependant, il est fondamental que l'énoncé du problème ouvert ne résulte pas directement de la méthode et de la solution ; le problème ouvert doit être fondé sur des notions avec lesquelles les élèves sont assez familiarisés. Il est indispensable afin que les élèves, dans le cadre des restrictions habituelles de l'horaire scolaire, puissent formuler des résultats ou produire des idées.

La dévolution du problème ouvert et l'insertion de phases a-didactiques (Brousseau 1986) provoque une rupture avec le "contrat didactique" et révèle certains aspects invisibles qui aident l'enseignant à opérer un réexamen critique de sa pratique habituelle (Balacheff 1988). L'élève conçoit très peu que, pour résoudre de tels problèmes, il n'applique pas directement des connaissances enseignées recherchant dans l'énoncé des "mots-clefs" pour trouver la bonne opération qui fournit le résultat et effectuer correctement cette opération conduisant à une seule solution. Au contraire, il faudra qu'il cherche seul et qu'il prenne des initiatives. Dans ces conditions, les élèves doivent pouvoir saisir facilement la situation et prendre part à des essais, formuler des conjectures, établir des démarches de vérification, des projets de résolution et des contre-exemples, qui visent à la découverte et à la création de la solution ou des solutions du problème ouvert.

En Grèce, les auteurs des manuels scolaires des trois classes du collège qui sont utilisés depuis 2007, malgré leurs différences, soulignent que l'amélioration de l'enseignement des mathématiques est liée à la qualité des opportunités d'apprentissage offertes aux élèves. Le contenu mathématique est organisé avec, pour axe central, les «activités». Les activités qui sont décrites dans les manuels constituent essentiellement des problèmes situés dans un contexte familier pour l'élève (réel ou mathématique) et l'on espère, à travers les procédures de solution, les amener à la nécessité d'introduire de nouvelles connaissances mathématiques. Ils visent à l'incitation active des élèves dans le processus d'apprentissage et particulièrement le déploiement du raisonnement et de la communication à l'aide du langage mathématique. Cependant, les professeurs donnent moins d'importance à « l'activité des élèves » et plus de priorité à leur propre activité. De plus, l'attitude positive que les enseignants expriment en faveur des activités est plutôt théorique et elle n'est pas liée au changement dans la pratique didactique quotidienne. Plusieurs fois, les enseignants interviennent avec des instructions, des exposés monotones ou encore des présentations complètes des solutions des activités au tableau en perpétuant le modèle d'enseignement traditionnel, revêtu peut-être d'une plus grande disponibilité à communiquer avec les élèves. Souvent ils se laissent entrainer par des pratiques pédagogiques qui sont enracinées avec la force de l'habitude acquise dans l'application des programmes anciens.

En outre, dans le cadre du nouveau programme officiel, il est recommandé d'utiliser autant des problèmes de la vie quotidienne qui ont un sens pour les élèves que d'autres problèmes, originaux ou inhabituels, qui mobilisent leurs capacités logiques. Dans cet esprit on privilégie l'apprentissage participatif des problèmes ouverts et on demande de l'initiative et une action innovatrice de la part des enseignants. Il est mentionné de manière significative : *L'activité vise à l'encouragement de la coopération et du travail en groupe…*(Argyrakis et al. 2007, p. 9). *L'enseignant doit encourager les élèves à adopter «des méthodes actives» d'apprentissage. Dans cette voie, les activités d'apprentissage qui comprennent des travaux de recherche et de travail en petits groupes d'élèves constituent un outil important* (Vandoulakis et al. 2007, p. 32). De plus, les problèmes ouverts sont mentionnés dans le même livre. *En général nous appelons problème ouvert ce qui peut être interprété de nombreuses manières et par conséquent admettre des solutions différentes… La dévolution à nos élèves des activités ouvertes au lieu d'exercices toutes les 2 ou 3 minutes, est un pas vers le transfert de responsabilité de l'apprentissage de l'enseignant à l'élève* (Ibid., p. 33). En général, dans les pratiques quotidiennes, les approches d'enseignement alternatives ne sont pas largement étendues et les problèmes ouverts représentent une activité marginale dans les pratiques de classe les plus courantes et les professeurs habituellement les évitent. Les enseignants sont obligés de couvrir les programmes et ils considèrent qu'il est inefficace de changer leurs pratiques. Bien que le manuel scolaire soit la source principale des exercices et des problèmes posés, les enseignants sont encouragés à utiliser et à viser à « *de bonnes pratiques éducatives* ». Par la suite, dans le cadre d'une certaine liberté relative, nous décrirons et analyserons certaines pratiques pédagogiques avec des problèmes ouverts dans le collège grec.

Objectif et méthodologie

Objectif du travail : Ce travail s'organise en utilisant des pratiques pédagogiques centrées sur un modèle constructiviste de l'enseignement. Dans ce travail, nous allons étudier les raisonnements mathématiques des élèves du collège expérimentant et élaborant des solutions aux problèmes ouverts liés aux expériences de leur vie quotidienne. Seront présentées ici les données de la solution collaborative de trois problèmes. C'est sur ces expérimentations didactiques que va se focaliser l'intérêt de la recherche des interactions mathématiques de la classe et particulièrement sur la formulation des conjectures, des échanges argumentés et des stratégies élaborées par les élèves. On émet l'hypothèse que les problèmes ouverts ont un intérêt pédagogique pour les mathématiques du collège (d'apprentissage, méthodologique, d'autorégulation métacognitive, effectif) et qu'ils constituent des occasions créatives qui suscitent la curiosité et le goût pour la découverte en mathématiques, stimulent l'intérêt et motivent l'engagement, la participation et la persévérance des élèves.

Cadre de la recherche et participants

La recherche s'est déroulée tout au long de l'année scolaire 2008-2009 dans les trois classes du 1er Collège Expérimental d'Athènes. Les élèves avaient de 11 à 15 ans et provenaient surtout des couches sociales moyennes. L'enseignant était le professeur de mathématiques de l'école.

Recueil et analyse de données

Nous avons observé les interactions entre les élèves pendant la durée de leur coopération (par groupes de quatre ou de deux) et pendant la présentation commune à toute la classe. Pour cette expérimentation, nous avons utilisé généralement deux séances d'une heure (pour le troisième problème une heure). La première heure consistait en la recherche individuelle et collective et la rédaction des diapositives. La deuxième heure était consacrée au débat ouvert en classe. Lors de la première séance, nous avons pris des notes et nous avons considéré les écrits individuels et collectifs. Les séances ont été enregistrées en vidéo et certains épisodes des données produites par des méthodes audiovisuelles sont présentés ici. L'analyse des données est qualitative et concerne l'observation participative de la classe. Nous examinons principalement le développement du raisonnement mathématique au cours des activités (Arsac et al. 1992, Kosyvas & Baralis 2010).

Description des phases de l'expérimentation

La résolution de problèmes ouverts est liée à un travail collaboratif de la classe (Arsac & Mante 2007, Sauter 2008). Nous détaillons ci-dessous les quatre temps du scénario que nous avons choisi (Arsac et al. 1992).

1. *Recherche individuelle :* pendant les premières minutes, les élèves sont invités à investiguer le problème dont ils ont reçu chacun l'énoncé. L'enseignant passe dans les groupes (binômes et quatuors) et, s'il y a lieu, fait reformuler l'énoncé. Si beaucoup d'élèves éprouvent des difficultés avec l'énoncé, une reformulation sera faite pour toute la classe.

2. *Travail en groupe et rédaction des diapositives :* l'enseignant annonce la fin du travail individuel et le passage au travail en groupes dont le but, rappelle-t-il, est de se mettre d'accord sur la rédaction d'une diapositive. Le travail coopératif est terminé.

3. *Débat :* l'enseignant choisit une première diapositive. Il la présente à la classe.
   - Il demande aux élèves d'en prendre connaissance et de poser des questions liées à la compréhension du texte (en classe entière) ;
   - Il invite chaque groupe à donner son avis, par l'intermédiaire du porte-parole du groupe, sous forme d'une phrase commençant par : *Nous sommes d'accord car…*ou *nous ne sommes pas d'accord car…* ;
   - Il reformule les arguments de chaque groupe, en regroupant les « pour » et les « contre » ;
   - Le débat s'instaure au niveau de la classe sur la validité des arguments produits. Au moment opportun (c'est un choix décisif), l'enseignant arrête le débat et propose une deuxième diapositive.

4. *Synthèse pour la totalité de la classe :* Le déroulement de cette phase dépend de la phase du débat. Enfin l'enseignant peut faire une synthèse qui concerne l'activité de la classe. Les élèves peuvent participer à cette phase, qui contient des vérifications, des contrôles des critères de validité, et des règles du débat. Le professeur fait un résumé des stratégies, des argumentations et des conclusions de la solution du problème.

Les activités mathématiques

On a *choisi des problèmes ouverts qui pourraient susciter un véritable travail expérimental et favoriser le questionnement des élèves, l'élaboration de conjectures et les échanges argumentés. Dans chaque classe a été organisée une expérimentation. Les problèmes qui ont été cherchés sont deux problèmes d'arithmétique (quatre opérations, proportionnalité) et un problème de géométrie. Tous ces problèmes concernent des notions mathématiques compatibles avec le programme scolaire du collège grec.*

Avant l'expérimentation d'autres problèmes ouverts ont été proposés dans les classes. C'est pourquoi les élèves ont été familiarisés avec les problèmes ouverts et le travail en groupe. *On va se limiter à une description synoptique des découvertes les plus importantes qui en ont résulté tant au cours de la phase de collaboration en groupes que pendant les débats dans les classes. Pendant la présentation commune à toute la classe les élèves soutiennent leurs* *solutions ou sont convaincus par leurs camarades de les dépasser. Les arguments divers et les cheminements multiples des élèves sont liés à des types différents de raisonnement mathématique. On expose ci-dessous les comptes rendus des expérimentations.*

Les résultats de l'expérimentation du premier problème (*La tirelire*)

Ce problème favorise l'expérimentation féconde tant au troisième cycle de l'école primaire qu'au collège. Le problème a été posé et expérimenté dans une classe de $1^{\text{ère}}$ année du collège grec (Kosyvas 2011), qui correspond à la cinquième du collège français. Ce problème a été intégré dans l'unité des « problèmes des quatre opérations ». Les élèves avaient terminé le premier chapitre de leur livre qui concernait l'enseignement combinatoire de nombres entiers et décimaux. L'énoncé du problème est le suivant :

Enoncé 1 : Les élèves d'une classe ont ramassé dans leur tirelire une somme de 120 euros en 15 billets de 5 et 10 euros. Combien de billets de chaque valeur sont dans leur tirelire ?

L'objectif du problème n'était pas seulement l'émergence de la méthode par essais et erreurs, laquelle constitue essentiellement une priorité de l'école primaire, mais surtout la découverte de stratégies arithmétiques subtiles de la part des élèves.

Ce problème concerne la vie quotidienne et on s'attend à ce que les élèves de la $1^{\text{ière}}$ année du collège grec le résolvent avec des connaissances d'arithmétique pratique et non d'algèbre, puisque ils n'avaient pas encore acquis des connaissances de ce type. La structure mathématique du problème renvoie à un système linéaire de deux équations avec deux inconnues.

L'appropriation du problème par les élèves était efficace. Après quelques interventions du professeur pour les inciter à travailler en groupes, les élèves se sont bien impliqués dans l'investigation et la résolution du problème. Les procédures de résolution étaient très variées. Les stratégies spontanées que les élèves ont suivies pour la solution du problème peuvent être divisées en trois niveaux :

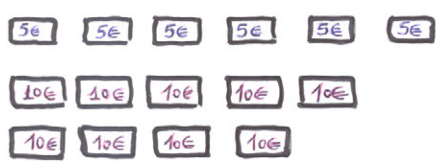
Niveau 1 : Explorations non justifiées (la méthode essai-erreur, réponses sans cohésion logique)

Certains élèves ont deviné la solution sans réflexion ou ils ont donné une réponse correcte sans qu'ils puissent convaincre de la justesse de leur choix. Le dialogue suivant est caractéristique :

M. : *Il y aura dans la tirelire 6 billets de 5 € et 9 billets de 10 €.*

Ens. : *Pourquoi y aura-t-il* 6 *billets de 5 € et 9 billets de 10 € ?*

M. : *Nous avons trouvé le résultat correct. Le voilà.*



Ens. : *Pourriez-vous écrire sur la diapositive votre justification ?*

M. : *Nous avons dessiné notre solution. La tirelire va contenir 6 billets de 5 € et 9 billets de 10 €. C'est sûr.*

Ens. : *Comment vous l'expliqueriez ?*

M. : (Silence).

Ens. : *Comment vous avez trouvé la solution ?*

D. : *… Au hasard !*

Ici, la solution du problème commence par une bonne prévision naturelle, mais cette découverte qui réussit n'est pas liée à d'autres essais expérimentaux et des vérifications. Lorsque les élèves ne disposent pas d'une méthode ou d'un algorithme de solution ils font des observations empiriques, des anticipations arbitraires ou des conjectures « hâtives» et ils contrôlent leur validité avec un nombre limité de cas numériques. Au premier niveau sont réunies surtout des réponses réussies « d'essai et d'erreur » sans une justification suffisante ou d'autres affirmations sans cohésion logique qui mènent à une solution erronée du problème et à des démarches ratées.

Souvent les élèves ne contrôlaient pas si la solution qu'ils trouvaient satisfaisait aux contraintes exigées. La solution du problème se réduit à la découverte d'une paire de nombres qui vérifient l'équation $5x + 10y = 120$ sans vérifier l'autre, c'est-à-dire le $x + y = 15$ ou même inversement.

Niveau 2 : Explorations numériques organisées et justifications

Au deuxième niveau, les stratégies des élèves sont plus systématiques. Habituellement les élèves font des tableaux sur lesquels ils placent leurs observations dans des structures organisées. Ils mettent les données par écrit (enregistrements complets ou d'ampleur limitée) et ils choisissent la solution numérique qui satisfait les deux conditions du problème.

De plus, au cours de la communication mathématique, les élèves formulent et contrôlent des conjectures et font paraître des explications. Cependant leurs solutions ne sont pas les plus brèves possibles. Ils font apparaître des stratégies « de pluralité invariable de billets de la tirelire » et « de somme totale invariable de la tirelire ». Ces découvertes sont en accord avec d'autres recherches de problèmes semblables de « fausse position » (Porcheron & Guillaume 1984, Silver et *al*. 1990, Sauter 1998, Pluvinage 2008). Les stratégies précédentes ont conduit à deux types de tableaux :

- Au premier type, qui a été observé surtout chez les groupes A et B, les élèves maintiennent invariable la somme des billets de la tirelire ($x + y = 15$) et forment successivement des sommes de 15, lesquelles ils vérifient en essayant de créer progressive-ment le nombre 120 ($5x + 10y = 120$).
- Au deuxième type de tableau (groupe D, voir le tableau ci-dessous) ils travaillent en constituant des compositions du chiffre 120, et ensuite ils procèdent à des contrôles pour constater s'ils forment la somme 15. Dans ce cas est effectuée une numération de remplacements : Nous avons des remplacements répétés, où les billets de 5 € sont réduits de deux et donnent leur place à un billet de 10 €, donc il augmente d'un la pluralité des billets de 10 €, tandis que la tirelire a toujours la même somme totale d'argent.

Le dénombrement organisé de toutes les données spécifiques du tableau prend du temps, cependant il a une valeur pédagogique importante. Bien que les opérations numériques qui sont insérées dans le tableau soient fondamentales et récurrentes et que l'équilibre penche davantage vers les explorations numériques et non pas vers la force convaincante de l'argumentation mathématique élaborée, il s'agit d'une méthode scientifique qui exige vérification exacte et organisée, où les élèves prennent confiance. La présentation du tableau engendre la réflexion et favorise l'observation de structures et de relations. Dans ce cas, l'utilisation de la méthode essai-erreur n'est pas arbitraire, occasionnelle ou imprévue. Nous reformulons brièvement une voie régulière et adaptative des enfants que nous avons constatées aux groupes B et F :

Si les 15 billets de la tirelire étaient des billets de 10 € , alors la valeur totale serait 150 € , tandis que si tous étaient des billets de 5 € , alors la tirelire aurait 75 euros. Cependant puisque le contenu de la tirelire est 120 € , on doit essayer des combinaisons intermédiaires appropriées:

Avec 11 billets de 10 € et 4 billets de 5 € nous trouvons 130 € .

Avec 7 billets de 10 € et 8 billets de 5 € nous trouvons 110 € .

De nouveaux essais s'approchent davantage du nombre 120 :

Avec 10 billets de 10 € et 5 billets de 5 € nous trouvons 125 € .

Avec 8 billets de 10 € et 7 billets de 5 € nous trouvons 115 € .

Enfin en essayant 9 billets de 10 € et 6 billets de 5 € nous trouvons 120.

Pour cette méthode les élèves s'occupent des essais étudiés. Chaque nouvel essai est justifié, il se forme sur la base du précédent et l'améliore. Progressivement l'erreur est corrigée, alors que les essais successifs s'approchent de plus en plus du résultat souhaitable. C'est pourquoi il vaut mieux parler « d'essais successifs multiples », « de corrections successives » ou « d'approches successives » (Polya 1962). L'usage de cette méthode a une valeur didactique distincte.

Niveau 3 : Abrégement et généralisation de la solution.

Au troisième niveau, les élèves, tant en groupes qu'en classe entière, justifient leurs conjectures et perfectionnent leurs stratégies en inventant des solutions élégantes et économiques qui sont caractérisées par la reformulation et l'organisation originale de l'argumentation logique. Trois solutions ont été observées qui s'intègrent à cette catégorie (Kosyvas 2011). On va mentionner une de celles-ci.

Groupe D La solution du groupe a été donnée par un tableau différent de celui des groupes A et B. Ici, on maintient stable la somme totale en € ($5x + 10y = 120$) et on recherche la combinaison appropriée des billets de 5 et 10 € qui forment une somme de 15 ($x + y = 15$). Les explications du représentant du groupe ont pris la forme du dialogue suivant :

P. : *Dans notre groupe nous avons pensé faire l'hypothèse que les 120 € qui existent dans la tirelire sont tous des billets de 5 €* (Il a montré le tableau suivant sur la diapositive).

S. : *Si ceci était vrai, nous aurions 120 : 5 = 24 billets de 5 € . Cependant dans notre tirelire il existe au total 15 billets et non 24.*

D. : *Vous dites qu'il existe 15 billets qui font 120 € . Je ne comprends pas pourquoi nous voulons qu'il en existe 24. Puisque ce ne sont pas tous des billets de 5 € .*

P. : Je *ne soutiens pas qu'ils sont réellement 24. Eh bien ! Nous prétendons qu'ils sont 24 ! Nous savons que ceci n'est pas vrai. C'est pourquoi nous avons pensé à diminuer les billets deux par deux. Si, des 24 billets de 5 €, nous enlevons deux billets de 5 € et nous les remplaçons par un billet de 10 €, nous aurons à nouveau 120 € (*$120 - 2\times5 + 1\times10 = 120$*). Ainsi maintenant nous aurons 23 billets (24 – 2 + 1 = 23). En continuant de la même façon nous avons construit le tableau suivant.*

Tableau des remplacements du groupe D

TABLEAU DES REMPLACEMENTS DU GROUPE D				
numérotation des remplacements	**nombre de billets de 5 €**	**nombre de billets de 10 €**	**total stable de la tirelire en €**	**somme des billets**
1.	24	0	$24\cdot5+0\cdot10=120$	$24+0=24$
2.	22	1	$22\cdot5+1\cdot10=120$	$22+1=23$
3.	20	2	$20\cdot5+2\cdot10=120$	$20+2=22$
4.	18	3	$18\cdot5+3\cdot10=120$	$18+3=21$
5.	16	4	$16\cdot5+4\cdot10=120$	$16+4=20$
6.	14	5	$14\cdot5+5\cdot10=120$	$14+5=19$
7.	12	6	$12\cdot5+6\cdot10=120$	$12+6=18$
8.	10	7	$10\cdot5+7\cdot10=120$	$10+7=17$
9.	8	8	$8\cdot5+8\cdot10=120$	$8+8=16$
10.	6	9	**$6\cdot5+9\cdot10=120$**	**$6+9=15$**

Il faut souligner, au cours de la solution précédente, l'importance d'exploration de la conjecture. L'émission de l'hypothèse erronée « *Eh bien ! Nous prétendons qu'ils sont 24 !* », (*des billets de 5 €*) cette « fausse position » était un processus mathématique important lié au raisonnement d'exploration, elle implique en plus des étapes de justification et de validation. Dans le tableau précédent, nous observons que les élèves essaient des remplacements successifs, où ils enlèvent deux billets de 5 € et donnent leur place à un billet de 10 €, donc ils augmentent la pluralité des billets de 10 €, tandis que la tirelire a toujours le même total d'argent. La solution sera trouvée lorsque la somme des billets sera devenue 15 : 6 billets de 5 € et 9 billets de 10 €. Lors des échanges argumentés, qui ont suivi, un élève a réussi à trouver une autre solution originale :

A. : *J'ai regardé le tableau avec attention. J'ai observé que nous pourrions trouver dès le début combien de remplacements sont nécessaires, sans construire un tableau et ainsi gagner du temps.*

Ens. *C'est-à-dire ?*

A. : *Alors! Chaque remplacement réduit les billets de un et nous voulons que les 24 billets deviennent 15. D'accord ?*

Ens. *Continue!*

A. : *Pour trouver combien de remplacements sont nécessaires, nous ferons une soustraction. De 24 nous retirons 15, c'est-à-dire 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15. Donc nous trouvons 9 remplacements* (il compte avec les doigts).

Ens. *Continue !*

E. : *Pourquoi ? Je n'ai pas compris !*

Ens. *Pour comprendre il faut que vous fassiez attention !*

A. : *Donc! Ainsi les remplacements qui sont nécessaires sont 24 – 15 = 9. Je crois que c'est mieux de calculer avec le cerveau plutôt que de les compter un par un.*

M.- K. : *Ni compter avec les doigts. Moi je ne suis pas d'accord ! Il nous faut le tableau entier. Comme celui-ci que nous avons construit.*

Ens. *Chacun a sa propre manière. Respectons-le. Je vous prie ne pas interrompre. Continue A !*

A. : *Le tableau est bon mais il exige beaucoup de temps pour le construire. Donc nous observons que grâce aux 9 remplacements existeront dans la tirelire 120€ à 15 billets. Nous constatons qu'avec les 9 remplacements que nous ferons on en enlèvera au total 9×2 = 18 billets de 5€. Alors nous aurons 24 – 18 = 6 billets de 5€ et enfin nous aurons 9 billets de 10€, puisque 15 – 6 = 9.*

P. *Le tableau est utile. Si nous avons fait ce tableau…*

A. : *Le tableau nous a aidés à trouver une solution plus courte …*

…..

A. : *Notre solution est la meilleure. Si la tirelire avait par exemple 100 billets, de 5 € et de 10€, ce qui ferait une valeur de 950 €, alors construiriez-vous un tableau ?*

M.- K. : *Alors non…* (silence).

A. : *C'est impossible ! Avec notre idée on peut résoudre le problème pour 100 ou 1000 billets dans la tirelire. Bien que les nombres du problème puissent être complètement différents, l'argument arithmétique reste toujours le même.*

M.- K. : *Je ne suis pas sûre que je puisse réfléchir à votre propre solution.*

L'argumentation précitée a été répétée par un autre membre du groupe et est devenue acceptable, suscitant pour certains de leurs camarades un regard réflexif sur leur pratique. Il est évident que la création du tableau a donné à cette élève l'idée de la description de relations numériques générales qui ont conduit à la solution simple et synoptique précédente, laquelle s'applique aussi à de grands nombres. L'observation subtile de l'organisation systématique du tableau et la corrélation mentale de ses éléments ont contribué à l'omission des calculs inutiles, à la découverte de régularités cachées importantes et à l'abstraction logique. La condensation de la solution montre une compréhension plus profonde.

À la fin, une discussion a porté sur le choix de la meilleure solution. Certains considéraient qu'il est meilleur d'utiliser des méthodes analytiques et de faire des tableaux où on peut essayer de nombreuses solutions (peut-être toutes) et choisir la correcte et d'autres croyaient qu'il valait mieux utiliser les méthodes d'élaboration d'hypothèses et la vérification via des opérations numériques ou autres arguments qui se sont enchaînés de façon logique. Il a été remarqué qu'avec des raisonnements originaux les solutions sont brèves et élégantes. Il est remarquable que la manipulation dynamique du problème ait engendré de nouvelles solutions dérivées que les élèves ont recherchées avec de nouvelles stratégies. La stratégie précitée est améliorée, elle ne s'appuie ni sur la chance ni sur le recensement complet de nombreux cas, quand ce n'est pas nécessaire. Des solutions intégrées à ce niveau ont été observées dans les trois groupes (à cause du manque d'espace, elles ne sont pas mentionnées). Ces solutions mettent en valeur les éléments empiriques du problème et sont confrontées avec succès à d'autres problèmes concernant de grands nombres. Elles ont un caractère de généralisation, puisque la réponse numérique unique du problème peut être considérée comme un cas particulier. Par conséquent, le rapport étroit entre le raisonnement numérique et algébrique devient évident. La pensée algébrique n'est pas liée automatiquement à l'utilisation de lettres. Ces solutions sont composées et comprennent des méthodes sophistiquées, fondées sur l'introduction de conjectures au problème, en développant un raisonnement généralisé, numérique, ou presque algébrique (bien que les nombres du problème puissent être complètement différents, l'argument arithmétique reste toujours le même). Cette caractéristique les place en relation de prééminence par rapport aux mises en tableaux inefficaces.

De plus, puisque les raisonnements mathématiques des élèves sont directs et éloquents, ils ont un avantage par rapport aux formalismes où domine le maniement algorithmique mécanique, qui souvent aboutit à la perte du sens d'idées importantes. L'utilisation des lettres en tant que symboles numériques abstraits représentant les variables inconnues du système linéaire constitue une évolution des stratégies informelles. Cette méthode exige la traduction de la langue quotidienne en langue algébrique. Elle peut être appliquée avec succès tant pour les petits nombres que pour les grands nombres. Elle n'exige pas l'invention d'une stratégie originale et ainsi elle est efficace pour une grande catégorie de problèmes analogues. Cela constitue le stade suivant auquel parviennent les élèves lorsqu'ils se trouvent en 3^{ième} année du collège Grec (correspondant à la troisième du collège français).

- La généralisation algébrique comprend seulement certains aspects du partiel, tandis qu'au cas spécial sont inhérents des avantages mathématiques rajoutés (structures, propriétés, régularités) et esthétiques (beauté, élégance) qui habituellement restent dans l'obscurité, cependant à notre expérience d'enseignement se sont été révélés aux solutions originales des élèves.
- En outre, les élèves utilisent diverses procédures mathématiques et algorithmes, sans réaliser le besoin de s'engager sur leur sens sous-jacent et décortiquer ces concepts. Avec la force puissante des symboles algébriques coexiste l'absence de sens référentiel. Leur déconnexion des expériences directes du monde réel aux yeux des enfants les rend incompréhensibles et arbitraires.

Enfin, nous pouvons généraliser davantage le problème en remplaçant les nombres du deuxième membre avec des variables paramétrées. Cette généralisation est enseignée au lycée.

En résumé, le problème ouvert que nous avons expérimenté s'est avéré propice à l'action coopérative des élèves, en révélant des différences qui ont facilité l'interrogation et la recherche. Les résultats de cette étude montrent que 5 des 6 groupes ont résolu le problème de la tirelire avec des stratégies spontanées multiples, qui n'avaient pas été enseignées aux élèves. Bien sûr la plupart des 26 élèves ont déployé des aptitudes impressionnantes d'émission de conjectures, en exposant avec leurs propres moyens des stratégies logiquement argumentées. Les élèves réunissent, enregistrent, écrivent des données sur les tableaux, observent et organisent des cas particuliers, examinent des conclusions, généralisent, expliquent et communiquent leurs découvertes. Parmi ces solutions, il y en a trois arithmétiques, originales et uniques, qui ont été inventées et présentées par les élèves. *L'élégance et la beauté de ces solutions arithmétiques sont perdues dans les équations algébriques abstraites*. De plus, il en résulte que les raisons subtiles et les généralisations des élèves sont étroitement liées entre elles en élargissant leur pensée mathématique.

Les résultats de l'expérimentation du second problème (*Les caravaniers)*

L'énoncé a été posé et expérimenté (Kosyvas 2010b) dans une classe de 2^{ième} année du collège grec (correspondant à la quatrième en France). Deux observateurs étaient présents au cours de cette expérimentation. Le problème décrit de manière amusante une situation qui renvoie au partage, mais non pas au partage équitable. Grâce à son analogie, nous avons intégré ce problème dans l'unité de la proportionnalité. On avait enseigné aux élèves des équations simples et la proportionnalité l'année précédente, cependant ce problème possède une structure différente et ne constitue pas une application directe de la proportionnalité. Les élèves devaient distinguer avec une attention subtile les grandeurs qui sont proportionnelles. Le problème n'introduit pas de notions mathématiques nouvelles, mais suscite une réflexion critique sur des méthodes et des notions déjà connues.

Enoncée 2 : Deux caravaniers A et B qui voyageaient dans le désert avaient avec eux l'un 2 pains et l'autre 3. Sur leur route, ils ont rencontré un voyageur riche C, qui avait faim. Après avoir mangé tous ensemble le voyageur leur a laissé 15 écus d'or. Comment faudrait-il procéder au partage de l'argent ?

C'est un problème traditionnel que nous avons reformulé. Incontestablement, l'énoncé le rend très attractif et ludique. C'est pourquoi nous avons considéré qu'il mobiliserait l'intérêt et la curiosité des élèves. La solution exige des opérations arithmétiques avec des nombres entiers ou fractions et la notion du partage en parties proportionnel. La raison de l'utilisation de la proportionnalité renvoie aux conventions sociales. Dans ce problème on suppose que le nombre des écus d'or que C a payés est proportionnel à la quantité des pains qu'il a reçue. Le choix de stratégie dépend de facteurs liés au type du problème et aux relations qui dépendent des données numériques. En accord avec ce qui avait été enseigné, on s'attendait à ce que les élèves résolvent le problème en utilisant la méthode suivante :

Chacun a mangé 5/3 de pains. On partage le nombre 15 en parties proportionnelles aux nombres 1/3 et 4/3. On construit le tableau ci-desous.

On multiplie diagonalement :

Donc A va recevoir : $x = 3$ *écus.*

Et B : $15 - 3 = 12$ *écus.*

Cependant la méthode précédente n'est pas apparue. Il se peut que son absence soit due aux difficultés de représentation correcte de ce problème. Ou bien ce mode standardisé de raisonnement n'avait pas été bien maîtrisé par les élèves dans le cas des fractions.

Pendant la phase de recherche (individuelle et en groupe) le problème semblait difficile, il y a eu beaucoup d'incompréhension, ne disposant pas d'un algorithme prêt, ils étaient bloqués. Au début, les essais et les tâtonnements des élèves se faisaient au hasard et sans aucune organisation systématique. On a fait une mise au point générale en encourageant les élèves à réfléchir au problème. Progressivement ils ont mis en place leurs différentes idées, qui ne se sont pas toujours organisées en solutions complètes. On présente brièvement un bilan de l'élaboration des productions des groupes.

Première rédaction (une diapositive) : D'après cette production, l'argent devrait être partagé équitablement entre A et B. Ils ont écrit : « *Un partage juste ! Donc 7,5 l'un et 7,5 l'autre* ». Il est évident que ces élèves avaient une représentation inadéquate et erronée du problème. Pendant le débat beaucoup d'élèves ont formulé l'argument « *B a donné plus de pain que A. Pourquoi devraient-ils recevoir la même somme* ? ». La discussion était très riche et a conduit à la notion de proportionnalité.

	A et B	*A*	*B*
Quantité de pains que C a reçue (fractions de pains)	*5/3*	*1/3*	*4/3*
Nombre d'unités monétaires que C a payé (écus d'or)	*15*	*x*	*y*

Seconde rédaction (quatre diapositives) : Une source d'erreurs était l'erreur de compréhension suivante : l'argent a été partagé entre A et B proportionnellement aux pains que chacun avait. Avant la présentation, on a parlé des difficultés de compréhension initiale comme d'une étape nécessaire et naturelle ainsi que de la reconnaissance du droit des élèves à l'erreur. On présente deux solutions. Les autres sont semblables :

GROUPE 5

On complète le tableau de proportionnalité:

	A et B	*A*	*B*
Nombre de pains	*5*	*2*	*3*
Nombre d'écus	*15*	*x*	*y*

On a : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{5} = \frac{15}{5} = 3$.

Par suite : $\frac{x}{2} = \frac{3}{1}$

or $x \times 1 = 2 \times 3$ or $x = 6$.

Donc A va recevoir 6 écus d'or.
Et B : 15 – 6 = 9 écus.

GROUPE 3

On utilise la méthode de passage à l'unité.

Les 5 pains coûtent 15 écus d'or.

1 pain coûte 15 : 5 = 3 écus.

Les 2 pains de A font 2 × 3 = 6 écus.

Les 3 pains de B font 3 × 3 = 9 écus.

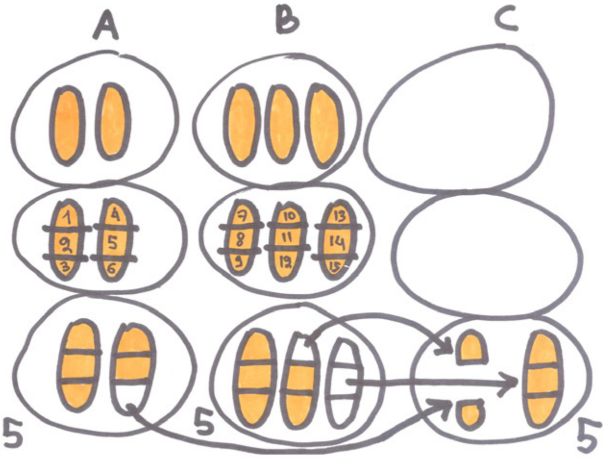
Vérification : 6 + 9 = 15 écus.

Pendant le débat de mise en commun, les élèves ont discuté de l'application correcte de la proportionnalité et ont mis en évidence la validation de la stratégie. Une élève a objecté : « *Ils ont utilisé la proportionnalité pour les pains qu'ils avaient et non pour les pains qu'ils ont donnés. C'est faux* ». On peut constater que les erreurs commises ont rendu le débat très intéressant. Quelques élèves ont montré un esprit plus critique sur leurs productions écrites.

Troisième rédaction (une diapositive) : Premièrement, il faut que les pains soient partagés équitablement entre A, B et C et que les écus soient partagés proportionnellement entre A et B (conformément à la quantité de pain qu'ils ont donnée à C).

Ce groupe (voir leur solution dans l'encadré, en haut de la page suivante) n'a pas résolu le problème avec la méthode formelle de proportionnalité enseignée, comme le groupe 5 l'avait fait sans succès ; mais les élèves ont étayé leur rédaction en utilisant un langage naturel, libéré de tout formalisme. Les images qu'ils ont dessinées, ont facilité leur raisonnement arithmétique. D'après la présentation de leur solution, ils ont utilisé des stratégies informelles de partage et ils ont préféré des modèles additifs par rapport à des modèles proportionnels. L'idée de l'utilisation de la proportionnalité comme modèle social nécessite la réalisation de l'équité ou l'égalisation des parts ce qui constitue le premier niveau de l'abstraction de la part des élèves, « *C a reçu au total 5 morceaux* ». En réalisant une distribution « régulière », s'est créé intuitivement le concept de ratio de part constante d'écus par morceau, « *3 écus pour chaque morceau* ». Par conséquent « *A a vendu 1 morceau et a reçu 3 écus et B 4 morceaux et a reçu 4 × 3 = 12 écus* » qui est influencé par la compréhension de la multiplication et de la division et nécessite un deuxième niveau d'abstraction.

GROUPE 2



Les A, B, C partageront équitablement les 5 pains. Ainsi nous séparons chacun des 5 pains en 3 morceaux égaux, un pour chacun. Sur ce dessin nous avons compté 15 morceaux de pain, c'est-à-dire que chacun devait manger 5 morceaux. A avait 6 morceaux. Il a gardé les 5 et il en a donné 1 à C. B avait 9 morceaux. Il a gardé les 5 et il en a donné 4 à C. C a reçu au total 5 morceaux, 1 de A et 4 de B (1 + 4 = 5). C pour 5 morceaux de pain a payé 15 écus d'or, c'est-à-dire 3 écus pour chaque mor-ceau. Donc A a vendu 1 morceau et a reçu 3 écus et B 4 morceaux et a reçu 4 × 3 = 12 écus.

La découverte de la solution a été obtenue par la collaboration de deux élèves. Les deux autres membres du groupe se sont enthousiasmés et ont changé leur attitude en cours de mathématiques, devenant actifs et demandeurs. La solution trouvée par ce groupe était compréhensible et convaincante. Au cours de la discussion en commun, certains élèves ont contesté la méthode du dénombrement sur le dessin en utilisant des stratégies de l'arithmétique mentale : « *Au lieu de compter on peut calculer : Puisque il y a 3 personnes A, B et C, on partage les pains de chacun en 3 morceaux égaux. A avait 2 × 3 = 6 et B 3 × 3 = 9. Au total il y a 6 + 9 = 15 morceaux du pain pour les trois. Chacun a mangé 15 : 3 = 5 morceaux. A a donné 6 – 5 = 1 et B 9 – 5 = 4, etc.* ».

L'élaboration de stratégies informelles par les élèves peut préparer des stratégies formelles. Resnick et Singer (1993) soutiennent que des concepts fondamentaux des mathématiques, comme sont les rapports et la proportionnalité, peuvent être développés avec succès seulement s'ils s'appuient sur ou intègrent les connaissances informelles et non standardisées des élèves. Les concepts de rapport et de proportionnalité ne sont pas isolés, ils s'intègrent aux champs multiplicatifs conceptuels et se forment en interaction avec la multiplication, la division, la fraction, les nombres rationnels et les fonctions linéaires (Vergnaud 1988).

Avant même que les enfants reçoivent l'enseignement de ces notions, ils disposent déjà d'un répertoire riche de stratégies sur leur résolution.

Quatrième rédaction (une diapositive) :

GROUPE 1

Personnes	*Il a eu*	*Il a mangé*
A	*2=6/3 pains*	*5/3 pains*
B	*3=9/3 pains*	*5/3 pains*
C	*0=0/3 pains*	*5/3 pains*

A a donné 1/3 de pains.

B a donné 4/3 de pains.

C a reçu 1/3 +4/3=5/3 de pains.

5 :3=1,666…

Ce groupe n'a pas complété sa solution. Les élèves ont fait la division 5 : 3 mais c'était impossible de trouver un nombre décimal fini. La périodicité 5 : 3 = 1,66… était un obstacle.

Elève : — Est-ce qu'on peut simplifier et le faire 1,7 ?
Enseignant : — Tu pourrais réfléchir un peu plus.

Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées n'est pas transparent pour certains élèves. Cette différence a des conséquences visibles sur les résultats du problème. Pendant le débat, un élève a donné la solution suivante (passage à l'unité) :

Les 5/3 des pains (C) font 15 écus d'or.

Le 1/3 du pain (que A a donné à C) fait 15 : 5 = 3 écus.

Les 4/3 de pains (que B a donnés à C) font 4 × 3 = 12 écus.

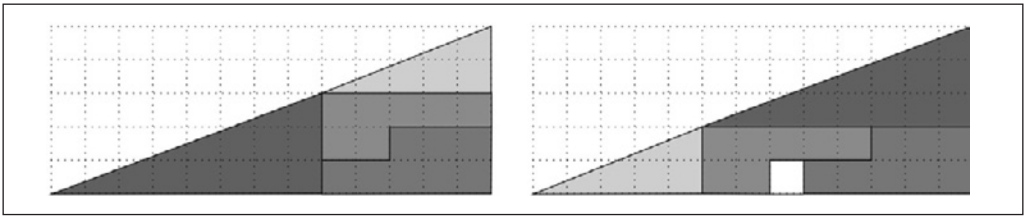
Cette stratégie a attiré l'attention des élèves qui s'étaient trompés et a suscité une attitude réflexive de leur part.

Le passage à l'unité est considéré par Nesher & Sukenik (1991) comme une méthode performante parce qu'il inclut la notion de la partition qui aide à la compréhension conceptuelle du rapport. Conformément à celle-ci, les élèves trouvent d'abord la valeur d'un objet et ensuite la valeur de nombreux objets similaires. Elle est efficace lorsque le prix d'un objet est un nombre entier, tandis que le passage à la fraction de l'unité fonctionne négativement, et conduit à une impasse lorsque les données ne mènent pas à un prix entier de l'unité.

En résumant, les résultats de cette activité montrent que deux solutions correctes du problème ont été exposées. Bien que le problème se situe dans le champ des connaissances des élèves, nombre d'entre eux ont exposé des représentations inadéquates. Quatre groupes ont utilisé une proportionnalité erronée « *pour les pains qu'ils avaient et non pour les pains que chacun a donnés* », et un groupe a procédé au « *partage équitable des écus* ». Incontestablement, la discussion riche dans la classe fut une procédure active et créative, ce qui souligne que les mathématiques ne sont pas la mémorisation de formules mystérieuses et de règles injustifiables, mais *ce que font et pensent les élèves lorsqu'ils communiquent entre eux*. C'est un défi intéressant avec des motivations abondantes pour les élèves.

Les résultats de l'expérimentation du troisième problème (Situation de surprise : 32 = 33 *!*)

Le problème suivant est un paradoxe géométrique fameux, présenté par Paul Curry, magicien amateur, à New York en 1953, il a été nommé paradoxe de Curry (Gardner 1995, Cohen 2005). Il s'agit de découper une figure et de réarranger les morceaux de façon à en « faire disparaître » une petite partie. Il existe plusieurs variantes.

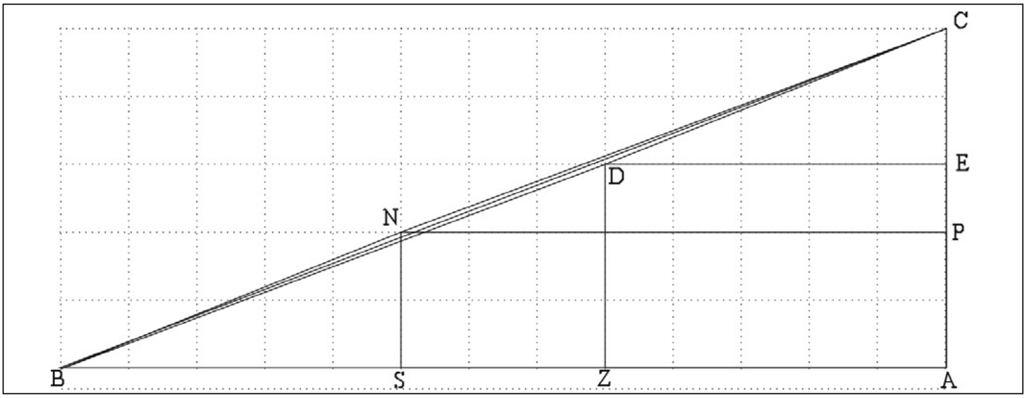


Enoncé 3 : Les figures ci-dessus montrent deux puzzles qui ont été construits avec les mêmes morceaux. Si nous réarrangeons les morceaux du premier puzzle, alors il se forme un deuxième auquel cependant un carreau blanc est en trop. Comment expliquer ce paradoxe ?

Les deux figures ci-dessus semblent être constituées toutes les deux par un grand triangle rectangle, deux triangles rectangles plus petits et dans la première figure par un rectangle de dimensions 5 × 3 et dans le deuxième par un rectangle de dimensions 8 × 2 (divisés en deux hexagones non convexes), alors que dans le deuxième cas apparait en plus un petit carré blanc. Les deux puzzles couvrent apparemment « des triangles égaux » dont l'aire diffère ! L'explication pour ce paradoxe est que « le grand triangle n'est pas un triangle ! ».

A l'agrandissement de la figure (ci-dessous) nous pouvons observer que l'hypoténuse réelle du triangle ABC relie les points B et C, tandis que les « hypoténuses » BNC ou BDC du « triangle» ne sont pas des segments de droite, mais sont constituées par deux parties « brisées ». Par conséquence, l'« hypoténuse » de la figure gauche est infléchie légèrement vers l'intérieur, tandis que l'« hypoténuse » de la figure droite est infléchie vers l'extérieur. Tout ceci montre que nous ne pouvons pas avoir une confiance illimitée dans notre intuition, en supposant que les points D et N se trouvent sur l'« hypoténuse ».

La surprise, l'admiration et la curiosité sont considérées comme des subterfuges pédagogiques ludiques et attrayants de l'enseignant pour exciter l'intérêt des élèves, la progression de l'apprentissage et la croissance de la pensée critique. La surprise constitue essentielle-



ment un agréable étonnement ou suscite la curiosité d'un événement inhabituel ou inattendu et elle inclut les caractéristiques de la joie, de l'admiration, du divertissement et de la satisfaction. La surprise peut produire de la tension et de l'inquiétude aussi bien que de l'excitation et de l'énergie. Lorsque les élèves sont surpris, ils vivent une attraction intense et générale et ils sont impliqués existentiellement. Il reste à examiner si le rôle de la surprise dans la classe de mathématiques est didactiquement fécond. Dans ce puzzle, on s'attendait à ce qu'il provoque un conflit cognitif chez les élèves entre la perception optique et leurs connaissances des aires.

L'énoncé précédent a été posé dans une classe de 3$^{\text{ième}}$ année du collège grec (Troisième française). Ce problème est intégré à l'unité de la trigonométrie du triangle rectangle. Les élèves avaient appris le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès. La durée de l'expérimentation était d'une heure. Le professeur distribue l'énoncé et présente la séance, il annonce qu'il y aura un temps de recherche puis un temps de bilan, que les élèves doivent travailler par deux, que ce travail ne sera pas noté. On observe les interactions mathématiques entre les élèves pendant la durée de leur collaboration par deux et lors de la mise en commun des résultats dans la classe.

La majorité des élèves a trouvé bizarre que les mêmes morceaux laissent un carreau blanc au deuxième puzzle. Les réactions émotionnelles des élèves variaient : d'un côté il y a ceux qui ont exprimé leur désir de résoudre le problème et de l'autre ceux qui ont manifesté de la perplexité, de la peur, du mécontentement, de l'inquiétude, de la confusion et de la déception. Des 28 élèves de la classe, bien que la plupart aient voulu connaitre la solution du problème, ils ressentaient de l'incertitude pour ce qu'ils voyaient et ne savaient pas par où commencer. Les élèves ont bien senti qu'ils ne se trouvaient pas dans un domaine de certitudes habituelles. Ils considéraient que bien qu'en essayant sérieusement, ils ne trouveraient pas la solution. Tandis que les élèves travaillaient par binômes, certains premiers échanges explicatifs, pour éclairer le paradoxe ont été nécessaires.

Ens. *Comment pouvons-nous calculer l'aire du puzzle gauche?*

Élè. : *C'est un triangle rectangulaire. Pour calculer l'aire, on choisit un des côtés perpendiculaires comme base et l'autre comme hauteur. Son aire est : ½ × base × hauteur.*

Ens. *C'est-à-dire combien est-il, l'aire du premier puzzle ?*

Élè. : *Son aire est égale à* $\frac{5 \times 13}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5\ cm^2$.

Ens. *On découpe le puzzle en morceaux et on assemble les morceaux d'une autre façon. Alors ces morceaux peuvent-ils reconstituer une figure différente de la même aire?*

Élè. : *Oui c'est sûr! Avec la décomposition, l'aire ne change pas. Si on ajoute les aires de tous les morceaux, l'aire totale sera la même et égale à 32,5 cm². D'ailleurs, deux triangles ayant la même base et la même hauteur, ont la même aire.*

Ens. *Je vous propose à tous de calculer les aires des deux puzzles en utilisant leurs morceaux. Qu'observez-vous ?*

…..

Un élève écrit au tableau :

1er puzzle : $3.\frac{8}{2} + 3.5 + 2.\frac{5}{2} = 32\ cm^2$

2ème puzzle : $2.\frac{5}{2} + 2.8 + 3.\frac{8}{2} = 32\ cm^2$

La notion de la conservation des aires après découpage, déplacement et reconstitution était bien naturelle, une connaissance vraiment intuitive et les élèves l'utilisaient dans la résolution de problèmes analogues. Cependant ce problème conduisait à une conclusion bizarre, opposée au bon sens. Les élèves en agissant par formules, ont trouvé les aires des figures constituées de « triangles » et ils les ont ajouté : 32 cm^2 le premier et 33 cm^2 le second. La réorganisation des morceaux du premier puzzle a conduit au second. Tout paraissait correct. Alors ? Où se trouvait le truc magique ? Il était évident que quelque part existait une erreur. Le problème a suscité chez les élèves un conflit cognitif profond et une déstabilisation et il en a poussé certains à chercher une justification.

Ens. *Qu'avez-vous constaté pour l'aire de la première figure ?*

Élè.-1 : *D'un part nous avons trouvé que l'aire du grand triangle est 32,5 cm^2 et l'autre, si nous le divisons, est 32 cm^2.*

Ens. *Et pour la seconde figure ?*

Élè.-2 : *Le grand triangle a encore une aire 32,5 cm^2, tandis que si nous le séparons c'est 33 cm^2. Il y a un carreau blanc en trop. Je me suis embrouillé et je ne sais plus ce que je pense. Quel est le résultat correct ? Est-il 32 ou 33 ? Peut-être que l'aire correcte est 32,5 cm^2 qui est au milieu. Qu'en dites-vous Monsieur ?*

Ens. *J'attends que vous l'examiniez. Comment expliquez-vous ces résultats différents ?*

Élè.-3 : *Celui-ci est impossible! Vous nous avez donné un problème qui est incorrect !*

Élè.-1 : *Moi, je pense qu'il n'y a qu'un seul résultat juste ! Pour expliquer quel est le résultat correct on a besoin d'une preuve.*

Ens. *Essayez donc de trouver une preuve !*

Bien que les interventions précédentes aient apporté une contribution bénéfique à l'éclaircissement du problème et la conscience de la nécessité d'une preuve, peu d'élèves ont fait des progrès dans leur recherche. Malgré l'encouragement continu de l'enseignant, certains manifestaient une confusion et une déception et ils n'étaient pas disposés à réfléchir sur ces différences. Il y avait aussi des élèves qui s'étaient engagés dans un véritable travail de recherche et l'enseignant a apprécié leurs efforts et leur persévérance. Une élève a pris la parole et a dit :

> "*Puisque la conclusion est erronée, quelque part il y a une erreur. Il est possible que l'idée initiale que le grand triangle a une aire de 32,5 cm^2 soit incorrecte ou il peut exister une erreur dans les raisonnements intermédiaires… On pourrait commencer inversement. Les deux rectangles de dimensions 5×3 et 8×2 ont des aires 15 cm^2 et 16 cm^2. Donc ils sont inégaux. En ajoutant les deux triangles rectangles plus petits, qui sont par deux isométriques, on forme les deux puzzles triangulaires avec des aires égal à 32 cm^2 et 33 cm^2, c'est-à-dire on n'obtient pas une aire de 32,5 cm^2 … Ceci n'est pas possible*".

Cette élève a posé le sujet sur une base correcte. L'erreur peut être inhérente soit à l'hypothèse soit à la procédure de la preuve, avant le résultat obtenu. Mais, ce raisonnement inverse a été compris par peu d'élèves. Le nouveau contrôle des calculs des aires n'a pas apporté de résultat. Deux élèves ont tracé un dessin agrandi, ils se sont lancés dans les mesures des deux segments « brisés » de l'hypoténuse avec une règle graduée et des vérifications sur la figure, mais ils avaient un doute sur l'exactitude de leurs mesures. C'est pourquoi les élèves se sont tournés principalement vers le raisonnement géométrique. Certaines dyades d'élèves ont reformulé et raffiné les conjectures convergentes suivantes :

- *Nous n'avons pas vraiment des triangles, mais des quadrilatères puisque l'un « entre dedans » et l'autre « sort en dehors ».*
- *Lorsque nous reconstituons les morceaux, comment connaissons-nous qu'on va créer*

la deuxième configuration ? J'estime que ça n'est pas sûr ! Peut-être s'agit-il d'une illusion optique de triangle.

- *Il ne se forme pas un triangle rectangle réel, puisque les trois points sur l'hypoténuse supposée ne s'alignent peut-être pas.*

Les formulations précédentes sont des résultats provisoires et plausibles. Polya (1962) a beaucoup insisté sur l'importance du processus heuristique et du raisonnement de plausibilité pour la découverte de la solution. D'un côté de nombreuses dyades d'élèves ont manifesté des doutes et des hésitations et n'ont pas laissé de trace de leur travail, ni rédigé leur diapositive. Il est probable que ces élèves n'ont pas abouti à des solutions complètes ou ont cru que leurs idées ne seraient pas acceptables. De l'autre côté certains élèves ont développé de véritables attitudes scientifiques : expérimenter, conjecturer, prouver. Pour la démonstration de la conjecture émise, ils ont utilisé le théorème de Pythagore, la similitude des triangles, la pente et la trigonométrie. Nous présentons certains extraits des élaborations de preuves (pas de démonstrations formelles) de trois dyades qui ont été exposées pendant la mise en commun des résultats dans la classe.

Première rédaction (Giannis et Theodoros)

Nous avons pensé que lorsque certaines dimensions de la figure sont connues alors les autres ne sont pas arbitraires, mais dépendent de celles-ci. Si nous appliquons le théorème de Pythagore aux triangles DEC et BZD de la première figure nous aurons :

$$DC = \sqrt{ED^2 + EC^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \simeq 5{,}4$$

$$BD = \sqrt{BZ^2 + ZD^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \simeq 8{,}5$$

Du triangle ABC on va obtenir :

$$BC = \sqrt{BA^2 + AC^2} = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194} \simeq 13{,}9$$

On a : BC = 13,9, BD + DC = 8,5 + 5,4 = 13,9. Par suite : BC = BD + DC et les point B, D, C sont alignés. Même raisonnement pour les points L, N, M.

Ainsi, les élèves ont placé incorrectement le point D sur [BC] et le N sur [LM], ils ont donc considéré ABDC et KLNM comme des "triangles". Conformément à la discussion dans la classe entière, l'égalité 13,9 = 8,5 + 5,4 était à la base de l'illusion optique et a conduit à une interprétation erronée du dessin. Deux élèves ont proposé les justifications suivantes :

- *En utilisant la calculatrice on a trouvé des calculs plus exacts :* $DC = \sqrt{29} \simeq 5{,}385$, $BD = \sqrt{73} \simeq 8{,}544$, *et* $BC = \sqrt{194} \simeq 13{,}898$.

  Puisque

  $BC=13{,}898$ *et* $BD + DC = 8{,}544 + 5{,}385 = 13{,}929$,

  est valable BC < BD + DC

  et non BC = BD + DC.

  Il en résulte que les points B, D, C *ne sont pas alignés. Même conclusion pour les points* L, N, M.

- *Si la figure était exacte, le nombre* $\sqrt{29} + \sqrt{73}$ *serait égal à* $\sqrt{194}$. *Cependant si :*

  $(\sqrt{29} + \sqrt{73})^2 = \sqrt{194}^2$

  $\Rightarrow 29 + 73 + 2\sqrt{29 \times 73} = 194$

  $\Rightarrow 2\sqrt{29 \times 73} = 194 - 29 - 73 = 92$

  $\Rightarrow 4 \,.\, 29 \,.\, 73 = 92^2$

  $\Rightarrow 8\,468 = 8464$!

  Incorrect.

Les élèves de la classe ont infirmé l'idée que « *les point B, D, C sont alignés* » en faisant appel à un ensemble de savoirs connus et ils ont compris et validé leurs preuves avec une argumentation logique dépassant l'incertitude.

Seconde rédaction (Irène et Marie)

Si on compare la pente des triangles DBE et CDE, c'est-à-dire les $\frac{3}{8}$ et $\frac{2}{5}$ avec la pente du triangle rectangle «réel» ABC les côtés perpendiculaires 13 et 5, on constate que : $\frac{2}{5} \neq \frac{5}{13}$ et $\frac{5}{13} \neq \frac{3}{8}$.

Puisque on a des pentes différentes, ainsi les aires diffère-ront.

Le même raisonnement peut être appliqué à la deuxième figure.

Avec les pentes (coefficients directeurs) la discussion s'est déplacée vers la vérification de la similitude des triangles. Le travail précédent a conduit solidement à la conclusion que nous ne pouvons pas combiner les deux plus petits triangles pour obtenir un grand triangle. Pourtant, puisque

$$\frac{2}{5} > \frac{5}{13} > \frac{3}{8} \quad , \; 2 \times 13 - 5 \times 5 = 26 - 25 = 1 \text{ et}$$

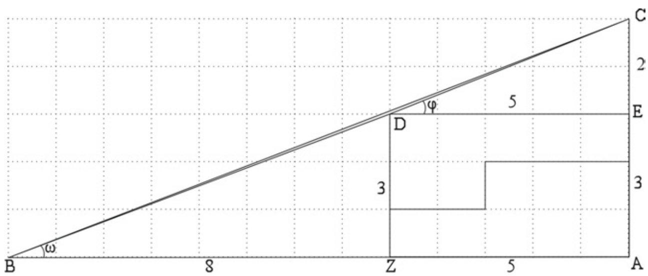
$$5 \times 8 - 3 \times 13 = 40 - 39 = 1$$

nous observons que les trois fractions sont proches, ainsi les deux « triangles » paraissent semblables.

Troisième rédaction (Elli et Sophie)

Les triangles rectangles DBZ et MNP sont isométriques puisque ils ont leurs côtés perpendiculaires égaux une par une. Cela s'applique aussi pour les triangles CDE et NLS.

Puisque les deux triangles sont isométriques, on a : $\widehat{DBZ} = \widehat{NMP} = \omega$ et $\widehat{CDE} = \widehat{NLS} = \varphi$.

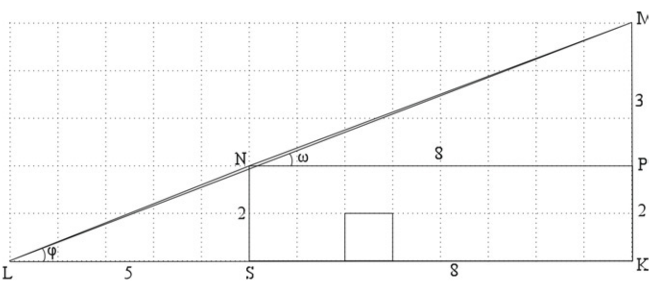


Puisque DE//BA et NP//LK, les angles φ et ω ont des positions d'angles correspondantes. Aux deux figures pour les angles aigues φ et ω on déduit : $\tan \omega = \frac{3}{8}$ et $\tan \varphi = \frac{2}{5}$. Mais $\frac{2}{5} \neq \frac{3}{8}$ Par conséquent $\tan \omega \neq \tan \varphi \Rightarrow \omega \neq \varphi$.

Donc les points B, D, C ne sont pas alignés. De même pour les points L, N, M.

Dans la première figure le triangle ABC a un demi carreau d'aire de plus que le puzzle (32,5 – 32 = 0,5), tandis qu'au deuxième triangle, le KLM a un demi carreau de moins que puzzle avec le carré blanc (33 – 32,5 = 0,5).

Ces deux demi carreaux expliquent la présence étrange du carreau blanc.



On a vu des inférences d'élèves clairement argumentées des conjectures jusqu'à la conclusion. Ces processus de justification sont associés aux manipulations géométriques et au travail algébrique. La démonstration précédente a été accompagnée par la construction des figures correspondantes au tableau comme support visuel à la résolution et mathématisation et elle est devenue acceptable par les élèves de la classe. Un élève a observé que les côtés perpendiculaires aux trois triangles sont (5, 2), (8, 3) et (13, 5), ne sont pas arbitraires et l'enseignant a ajouté qu'ils renvoient aux régularités de la suite de Fibonacci. La recherche n'est pas terminée, le problème reste toujours ouvert et il y a d'autres prolongements intéressants.

En résumant, nous avons constaté qu'initialement les élèves ont conclu que les sommets des morceaux qui visuellement sont placés sur l'« hypoténuse du triangle » constituent des points alignés. Le paradoxe est dû à l'illusion d'optique. Les quatre morceaux du puzzle ont aussi dans les deux cas la même aire, mais ils ne forment pas des triangles rectangles comme il apparaît trompeusement. Avec l'aide de papier quadrillé ou d'instruments de géométrie, les mesures directes sont inexactes parce que les imperfections du dessin sont imperceptibles et à la limite de l'erreur expérimentale. Cependant, bien que le tracé ne soit jamais exact, l'expérience accumulée des élèves par rapport aux dessins, constitue une base intuitive précieuse qui les a incités à imaginer les dessins comme modèles de figures précises ou idéales et les a aidés à déduire des propriétés géométriques et à composer des preuves convaincantes. Progressivement, certains élèves se sont rendus compte de la fraude perceptive et ont été conduits à une interprétation appropriée en décodant des informations condensées de la figure. Ils se sont appuyés sur les propriétés de la figure prises comme conjectures qui pourraient être validées par une démonstration. Ainsi, en mobilisant un raisonnement géométrique, ils ont mis en valeur diverses idées géométriques comme l'isométrie de triangles rectangles, le parallélisme, la perpendicularité, les estimations de côtés et d'angles, des pentes, des proportionnalités etc., et en faisant une étude théorique de la figure avec des processus logiques comme l'utilisation du théorème de Pythagore et la trigonométrie, ils ont abouti à des conclusions sûres.

La figure géométrique est un guide utile de raisonnement, mais elle peut conduire à des erreurs. Dans la pratique de la géométrie et particulièrement dans son apprentissage, les figures géométriques jouent un rôle heuristique et constituent un support intuitif en facilitant la transition du concret à l'abstrait. Duval (2005) distingue au moins deux modes d'appréhension de la figure : *la perceptive et la conceptuelle*. Nous avons une perception optique lorsque nous voyons la figure en tant que forme iconique. Il s'agit d'une reconnaissance spontanée, à partir d'objets géométriques élémentaires tels que la droite, le triangle rectangle, les différents quadrilatères, etc. Nous avons une appréhension opératoire quand on a une mobilisation par un raisonnement géométrique, une démarche faite de réflexions et d'initiatives. Cette appréhension conceptuelle est plus « dynamique » que la perceptive. On pense les objets géométriques à travers leurs propriétés, on pose des conjectures et on construit des structures et des relations. Cette appréhension peut s'approfondir en complétant la figure par de nouvelles traces (points, lignes, figures) et en procédant à des «reconfigurations» (Duval, 1994). De plus, Fischbein (1993) met en lumière l'importance des « *concepts figuraux* » qui constituent « *un processus idéal de fusion et d'achèvement entre les aspects logiques et iconiques*» (Fischbein, 1993, p. 150). Le concept figural du triangle rectangle constitue simultanément l'ensemble de toutes les images mentales (propriétés de la figure, position, magnitude) et les propriétés conceptuelles (relations abstraites et générales comme le théorème de Pythagore, les rapports trigonométriques etc.). Le concept figural peut expliquer non seulement le raisonnement géométrique qui amène aux solutions correctes, mais aussi les erreurs qui pourraient résulter de la fusion incomplète entre les deux aspects.

Dans notre problème, nous avons constaté des difficultés évidentes de la plupart des élèves dans la gestion des « concepts figuraux», ce qui est dû à notre avis à une inflexibilité perceptive liée à la prédominance de la visualisation de la figure géométrique au détriment d'une étude théorique fondée sur des définitions géométriques et des preuves. Les élèves sont attachés aux représentations iconiques visibles et ils étaient dans l'impossibilité de se déplacer vers la connaissance abstraite.

Enfin, le paradoxe perceptif avec la faille du raisonnement a aidé certains élèves à réaliser la nécessité de la preuve. La création de la situation d'incertitude les a conduits à surmonter la conception « réaliste » initiale et à tourner leur attention vers l'étude théorique des objets géométriques (Zimmermann & Cunningham, 1991, Hershkowitz et al.1996). Incontestablement, la spécificité de la preuve géométrique est initiée par le statut de la figure et ses difficultés.

Conclusions

> *« En conclusion nous pouvons dire que le problème ouvert nous a permis de prendre du recul par rapport à notre pratique habituelle, qu'il nous a permis de prendre conscience que nous pouvions enseigner autrement : en nous centrant davantage sur l'élève plutôt que sur le savoir à enseigner »* (Arsac & Mante 2007, p. 69) .

Dans ce travail, nous focalisons l'intérêt de notre effort sur le changement des conceptions qui dominent dans le secteur de l'enseignement. Nous continuons à cultiver dans la classe un climat de recherche, de questionnement, de réflexion et de communication, lesquels encouragent les élèves à exercer leur imagination et à émettre leurs propres questions et leurs propres conjectures. En plus, il nous a permis de réaliser que nous pouvons enseigner différemment, en ouvrant des possibilités pour l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.

La pratique d'enseignement grâce aux problèmes ouverts dans les classes du collège grec s'est avérée un apprentissage fécond. D'une certaine manière, le problème ouvert a piqué la curiosité des élèves et a motivé leur recherche, en leur donnant le goût de faire des mathématiques. Les élèves ont réussi à se rapprocher des notions mathématiques familières d'une manière nouvelle et inhabituelle qui leur a causé des surprises, des désaccords et des déstabilisations cognitives. Les expériences d'enseignement précitées dévoilent l'importance pédagogique du problème ouvert et révèlent ses divers aspects, méthodologiques, métacognitifs, émotionnels et fondamentalement cognitifs. Dans les situations ouvertes de problématisation qui ont été exposées, les élèves sont obligés de penser en profondeur, de prendre part activement aux discussions mathématiques de la classe, en contestant les automatismes habituels incorrects, en dépassant des contradictions et en faisant apparaître des arguments convaincants.

Les problèmes ouverts étaient des opportunités propices qui ont suscité des conflits cognitifs en favorisant des restructurations qui ont mené à une plus grande cohésion intérieure des connaissances des élèves. C'est à des conclusions analogues qu'ont abouti aussi d'autres recherches (Arsac & Mante 2007, Silver et al.

1990). Cependant, il y avait aussi des cas d'élèves où la technique didactique du conflit cognitif a causé une confusion passagère et une déception (particulièrement pour le problème géométrique où la surprise a motivé la curiosité et l'effort actif de peu d'élèves). Avec l'encouragement on obtenait un renforcement de la confiance en soi et un retour de l'espoir.

En outre, les découvertes de cette recherche conduisent à la conclusion que pendant la présentation de la solution de problèmes ouverts dans la classe il faudra que soit attribuée une importance primordiale non pas aux procédures algorithmiques formelles et aux démonstrations déductives qui, habituellement sont recommandées par les manuels, mais au déploiement des idées originales et des stratégies des élèves. Les manuels en général débordent d'exercices mais manquent de véritables problèmes. De plus, en offrant des solutions toutes faites, ils présentent surtout le « comment » et non le « pourquoi » de la pensée mathématique et par conséquent ils ne devraient pas constituer la source unique de la matière didactique. Il est évident que l'engagement et la persévérance des élèves à la solution des problèmes ouverts sont inhérents au mode de gestion de la classe par l'enseignant (Potari & Jaworski 2002).

Les élèves peuvent trouver des solutions originales, inventer des stratégies multiples, construire des hypothèses et s'impliquer dans leur contrôle, essayer et examiner des idées, prouver leur validité, réfléchir, justifier, développer la responsabilité du travail individuel et collectif. De plus, ils apprennent à écouter, à critiquer, à juger les idées de leurs camarades et à défendre leur propre thèse. Des attitudes analogues ont été rapportés dans d'autres recherches (Brown & Wallet 1983, English 1997, Sauter 2008). Tout ceci prouve que les problèmes ouverts que nous avons étudiés sont un moyen favorable au développement de la créativité mathématique des élèves. Avec l'organisation de telles activités nous obtenons la culture de l'attitude de recherche, ainsi que la progression du raisonnement mathématique des élèves.

Conformément à la pratique habituelle, il est considéré comme acquis que l'enseignant de mathématiques connaît les réponses correctes sur les questions qu'il pose, tandis que les élèves connaissent avec certitude que ces questions n'admettent qu'une réponse à laquelle un bon élève peut répondre. Progressivement il est indispensable que soient modifiés les termes du contrat didactique qui enracinent l'enseignant dans le rôle du détenteur exclusif et incontestable du juste et du faux. À condition que le professeur n'ait pas le rôle d'offrir rapidement un héritage scientifique bien empaqueté, les maladresses et les erreurs sont inévitables.

Les observations nous montrent que la résolution coopérative de problèmes ouverts stimule d'excellentes motivations, en favorisant chez les élèves une réflexion et un réexamen critique des connaissances mathématiques qui sont exigées et encourage un apprentissage fondé sur le sens. Pendant cette riche confrontation scientifique, les élèves vivent un climat fait de certitude et de doute. *Le doute éveille la curiosité et leur intérêt et la certitude leur donne la force de penser et de soutenir leurs arguments*. Les élèves qui prennent la parole s'expriment dans un langage quotidien en commençant par leurs propres questionnements.

La «méthode du problème ouvert» en mettant l'accent sur la découverte active des mathématiques, améliore le cours quotidien. L'expérience nous assure que la méthode précitée, avec des adaptations appropriées, peut être appliquée à toutes les classes. Elle enrichit autant les élèves que l'enseignant : elle implique personnellement les élèves « dans les défis mathématiques » et les aide à explorer leurs idées, à scruter en profondeur et mieux comprendre les notions qu'ils étudient. Elle permet aussi, à l'enseignant de mathématiques de découvrir ses élèves d'une nouvelle manière, de suive leurs stratégies informelles ou formelles et peut-être, d'apprendre eux-mêmes de leurs erreurs. Incontestablement, le problème ouvert est une école de réflexion, qui nous permet de concevoir de manière critique notre pratique habituelle.

Bibliographie

Argyrakis D., Vourganas P., Mentis M. Tsikopoulou S. & Chrisovergis M. (2007). *Mathématiques en 3ère année du collège, livre du professeur*. Athènes : OEDB.

Arsac G. & Mante M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

Arsac G., Chapiron G., Colonna A., Germain G., Guichard Y., Mante M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon.

Balacheff N. (1988). Le contrat et la coutume : deux registres des interactions didactiques. Au C. Laborde (ed) *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 15-26.

Becker J. & Shimada S. (eds) (1997). *The open-ended approach : A new proposal for teaching mathematics*. Reston VA : NCTM.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **7-2**, pp. 33-115, Grenoble : La pensée sauvage.

Brown S.I. & Walter M. I. (2005). *The art of problem Posing*, Mahwah, New Jersey : Lawrence Arlbaum Associates, 3rd Edition.

Cohen G. (2005). Bibliothèque Tangente. Hors série. Num. **24**. *Les triangles. Trois points, c'est tout*, Editions Pôle Paris, Collection : Bibliothèque Tangente, monographie, polycopié.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, **17**, pp. 121-138

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et de Sciences Cognitives,* **10**, pp. 5-53.

English L. (1997). Promoting a Problem Posing Classroom, *Teaching children Mathematics,* **3**, pp. 172-179.

Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, **24(2)**, 139-162.

Gardner M. (1995). *Mathématiques, magie et mystère*. Strasbourg : Magix Unlimited.

Hershkowitz R., Parzysz B. & von Dormolen, J. (1996), *Space and Shape*, in A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric & C. Laborde (eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers.

Kosyvas G. & Baralis G. (2010). Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré, *Repères IREM,* **78**, pp. 13-36.

Kosyvas G. (1995) : Approches de la notion et du rôle du problème ouvert dans l'enseignement des mathématiques, *Euclide C*, **43**, pp. 11-33, Athènes : Société mathématique hellénique.

Kosyvas G. (2010a). Problèmes ouvertes : notion, catégories et difficultés, *Annales de Didactique et des Sciences cognitives*, **15**, IREM de Strasbourg*,* pp. 43-71.

Kosyvas G. (2010b) : La méthode de solution du problème ouvert, *Communauté Educationnelle*, **92**, pp. 21-24, Athènes.

Kosyvas G. (2011) : Types de raisonnement pendant la résolution coopérative du problème de la tirelire en 1ère année du Collège grec, *Euclide C*, **74**, pp. 56-82. Athènes : Société mathématique hellénique.

Nesher P. & Sukenik M. (1991). The effect of formal representation on the learning of ratio concept, *Cognition and Instruction*, **1**, pp.161-175.

Pehkonen E. (1991). Introduction : Problem solving in mathematics, *ZDM* **23(1)**, pp. 1-4.

Pluvinage F. (2008). Préalables à une analyse didactique de l'emploi des modèles. Au A. Kuzniak, B. Parzysz & L. Vivier (Eds). *Du monde réel au monde mathématique – un parcours bibliographique et didactique*, Cahier de DIDIREM. **58**, Paris : IREM de Paris 7.

Polya G. (1962). *Mathematical Discovery : On understanding, learning, and teaching problem solving*, New York Wiley.

Porcheron J. & Guillaume J. (1984). Peut-on résoudre un problème que l'on n'a pas appris à résoudre? Au : Comment font-ils? *Rencontres pédagogiques*, I.N.R.P.

Potari D., & Jaworski B., (2002). Tackling Complexity in Mathematics Teaching Development : Using the Teaching Triad as a Tool for Reflection and Analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education* **5**, 351–380, 2002.

Resnick L. & Singer J. (1993) Protoquantitative origins of ratio reasoning. In : T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (eds.) *Rational Numbers. An integration of research,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp. 107-130.

Sauter M. (1998). Narration de recherche : une nouvelle pratique pédagogique, *Repères IREM,* **30**, pp. 9-21.

Sauter M., Combes M.-C., De Grozals A., Droniou J. & Lacage M., Saumade H., Theret D. (2008). Une communauté d'enseignant pour une recherche collaborative de problèmes, *Repères IREM,* **72**, pp. 25-45.

Silver E., Kilpatrick J., Schlesinger B. (1990). *Thinking through mathematics*, College Entrance Examination Board, New York.

Vandoulakis I., Kalligas Chr., Markakis N. & Feredinos S. (2007). *Mathématiques en 1ère année du collège, livre du professeur*. Athènes : OEDB.

Vergnaud G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Reston, VA : NCTM.

Zimmermann W. & Cunningham S. (1991), *Visualisation in Teaching and Learning Mathematics*. Washington : Mathematical Association of America.