KARL MARX ET LE CALCUL INFINITESIMAL

Pascal SERMAN
Irem de Poitiers

« Pendant mes loisirs, je fais du calcul différentiel et intégral. (…) *C'est du reste une partie des mathématiques beaucoup plus facile (pour ce qui concerne l'aspect purement technique) que par exemple l'algèbre au niveau supérieur. Pas d'études préliminaires nécessaires, sinon la connaissance des histoires habituelles d'algèbre et de trigonométrie, en dehors des notions générales sur les sections coniques.* (…) »

Marx, *lettre à Engels* (6 juillet 1863)

« Mais le miracle n'en est pas un. Cela n'en serait un que si l'élimination violente de $\dot{x}\dot{x}$ ne débouchait sur aucun résultat exact. On n'élimine qu'une erreur de calcul, qui, cependant, est une conséquence inévitable d'une méthode qui (…) parvient (…) d'emblée à introduire dans le calcul différentiel une façon de calculer différente de l'algèbre ordinaire. »

Marx, *Manuscrits Mathématiques,* p.187

Introduction

En 1984 paraissait la première traduction française des *Manuscrits Mathématiques de Marx*, par Alain Alcouffe [7], professeur d'Economie à l'université de Toulouse. Dans cet article, après quelques repères sur l'histoire du calcul infinitésimal depuis Newton-Leibniz, nous présentons au lecteur quelques extraits des *Manuscrits Mathématiques de Marx*, enfin nous nous interrogeons sur l'intérêt *actuel* de la connaissance de ces documents.

Quelques repères historiques

La mise au point du calcul infinitésimal par Newton (1671) et Leibniz (1672) a d'emblée fort embarrassé les mathématiciens et les philosophes, déclenchant une polémique qui allait traverser tout le 18^{e} siècle et conduire au début du 19^{e} siècle au calcul différentiel et intégral sous sa forme toujours actuelle.

La cause du rejet des infinitésimaux est clairement exposée par Thiénard [10] : si la fécondité du « nouveau » calcul suscite d'emblée l'enthousiasme du plus grand nombre, le recours aux *infinitésimaux* viole l'un des fondements des mathématiques depuis Euclide [4], l'axiome ou *notion commune* selon lequel « *Et le tout est plus grand que la partie* ».

Qualifiée de *fluxion* par Newton [8] ou de *différentielle* par Leibniz [6], la quantité *infinitésimale* est, au début du calcul, une quantité au même titre que n'importe quelle autre, puis n'en est plus une : allant jusqu'à diviser par elle, le mathématicien finit tôt ou tard, à un moment crucial, par l'annuler

— sans précaution particulière pour Newton, selon qui elle *s'évanouit*, sans aucune explication
— avec des précautions préliminaires pour Leibniz, qui la *néglige*, sans expliquer pourquoi il ne l'a pas négligée plus tôt.

Dans un pamphlet au vitriol publié en 1734, le philosophe Berkeley [1] énonce le plus clairement possible le dilemme qui se pose aux mathématiciens : accepter les infinitésimaux, donc mettre à bas la cohérence des mathématiques depuis Euclide, ou renoncer aux infinitésimaux, donc chercher un autre mode de calcul. A eux de choisir entre la rigueur aristotélicienne et l'efficacité des outils de calcul.

Cauchy [2] énonce en 1821 une approche qui permet au calcul infinitésimal, désormais dépourvu — sur le papier — d'infinitésimaux, d'enrichir l'édifice mathématique solidement bâti sur les *Eléments* d'Euclide ; Bolzano, Weierstrass, Dedekind et bien d'autres apportent leur pierre à la construction du « nouveau » calcul ainsi remis sur les rails du mathématiquement correct.

La polémique semble close, la page semble refermée : les mathématiciens, toujours avec Cauchy [3], s'autorisent à penser avec des *infinitésimaux* en s'interdisant de l'écrire.

Dans la deuxième moitié du 20e siècle, en 1963, Robinson [9], s'appuyant sur la théorie des modèles, redonne droit de cité aux infinitésimaux sans introduire de contradiction avec les *Eléments* ; il s'ensuit une nouvelle polémique entre mathématiciens, toujours pas close.

Il pourrait sembler que de 1821 à 1963 il ne se passe rien d'intéressant en dehors du développement du calcul différentiel et intégral par les mathématiciens eux-mêmes. Pourtant, dans son exil londonien, Karl Marx travaille la question durant vingt années avec une persévérance… marxienne. De 1863 à 1883, Marx étudie le calcul différentiel et intégral. A son décès, en 1883, il laisse plusieurs manuscrits et près d'un millier de pages de notes sur le sujet. Loin d'écrire un traité de mathématiques, Marx « fait » des mathématiques en réfléchissant à la manière dont les mathématiques « se font », cherchant à éclaircir le mystère qui se cache derrière ces infinitésimales : existent-elles sans exister vraiment ?

Les Manuscrits Mathématiques de Marx

Une première publication, bilingue allemand-russe, à Moscou, sous la direction de S. Janovskaja (1968), est suivie d'une traduction allemande de la présentation originale de S. Janovskaja (RDA, 1969), de la publication des textes allemands (RFA, 1974), d'une traduction anglaise (1983), enfin de la traduction française déjà mentionnée.

Retenant — comme c'était le cas pour les éditions allemande et anglaise — les travaux de Marx sur le calcul différentiel, Alcouffe reprend les notes de l'édition russe — qui suivent les calculs de Marx pas à pas — ainsi que les commentaires de l'édition allemande de 1974 ; enfin il reproduit les appendices figurant dans l'appareil critique russe, car, écrit-il, ils brossent « un splendide panorama des pratiques mathématiques dans les sources utilisées par Marx. » [1].

Dans une passionnante introduction, intitulée *Marx, Hegel et le « calcul » – quelques repères*, Alcouffe nous présente un Hegel [5] inhabituel (mathématicien), pressentant dès 1812 les développements à venir de l'analyse mathématique, y compris de l'*Analyse Non Standard* (élaborée vers 1960 par Abraham Robinson), et inspirant les travaux mathématiques de Marx.

Après cette introduction, Alcouffe présente d'abord deux manuscrits achevés en 1881, respectivement sous les titres « *Sur le concept de fonction dérivée* » et « *Sur la différentielle* », puis divers extraits ou ébauches regroupés en deux sections intitulées « *Sur l'histoire du calcul différentiel* » et « *Le théorème de Taylor, le théorème de Mac Laurin et la théorie de Lagrange des fonctions dérivées* ».

Suivent les notes de l'édition russe, un commentaire de l'éditeur allemand et les annexes de l'édition russe.

Architecture des Manuscrits

Dans « *Sur le concept de fonction dérivée* », Marx s'intéresse au double « mystère » qui entoure la transformation des différences finies Δx et Δy en différentielles dx et dy, puis des différentielles dx et dy en 0 et 0 ou, ce qui ne revient pas au même, de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en $\frac{dy}{dx}$ puis de $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{0}{0}$.

Dans « *Sur la différentielle* », Marx s'intéresse au passage de la notation symbolique :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

à la notation fonctionnelle :

$$dy = f'(x)\, dx\ .$$

Dans « *Sur l'histoire du calcul différentiel* », Marx distingue trois moments dans l'histoire du calcul différentiel : le calcul différentiel *mystique* (Newton, Leibniz), le calcul différentiel *rationnel* (d'Alembert), le calcul différentiel *purement algébrique* (Lagrange).

Enfin, dans « *Le théorème de Taylor, le théorème de MacLaurin et la théorie de Lagrange des fonctions dérivées* », Marx s'intéresse à l'intérêt de définir une fonction à partir de ses dérivées.

Quelques extraits des Manuscrits

Premier manuscrit :
« Sur le concept de fonction dérivée »

Pour pouvoir parler d'un concept, il faut avant tout savoir de quoi l'on parle. Marx dérive donc diverses fonctions [2] :

— dans une première partie, la fonction (linéaire) $y = ax$;

— dans une seconde partie :

$$y = ax^3 + bx^2 + bx - e\ ;\ y = ax^m\ ;$$
$$y = a^x\ ;\ y = \sqrt{a^2 + x^2}\ .$$

1 p.2 Dans les notes, les numéros de page renvoient à [7]

2 Le lecteur constatera que Marx maîtrise des outils algébriques aujourd'hui classiques :
factorisation de $x^m - a^m$, développement en série de a^x et de $\log(x)$ [pour $\ln(x)$], utilisation des expressions conjuguées $\sqrt{a^2 + x^2}$ et $\sqrt{a^2 - x^2}$, …

En dérivant la fonction linéaire[3], Marx met en évidence le point crucial, à savoir le mystère qui entoure les transformations :

— différences finies Δx et Δy devenant différentielles *dx et dy* ,

— différentielles *dx* et *dy* devenant 0 et 0 .

Marx commente

> $y_1 - y = a\,(x_1 - x)$ transformé en : $0 = 0$.
>
> Introduire dans un premier temps la différenciation et dans un deuxième temps la faire à nouveau disparaître ne mène ainsi littéralement à rien. Toute la difficulté pour comprendre l'opération différentielle […] consiste précisément à voir comment elle se distingue de cette procédure et conduit de la sorte à des résultats effectifs.

Cherchant comment 0 = 0 peut conduire à « des résultats effectifs », Marx revient sur ses pas, et constate :

> Le facteur $(x_1 - x)$ était par conséquent *nécessairement* une *différence finie* au moment où il a divisé les deux membres de l'équation,

Divisant alors par $(x_1 - x)$ les deux membres de $y_1 - y = a\,(x_1 - x)$, Marx parvient à :

> $$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ou } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$
>
> où la constante *a* représente la *valeur limite* du rapport des différences finies des deux variables.
> Comme *a* est constante, elle ne peut subir aucun changement, aussi en va-t-il de même pour le *membre droit* de l'équation qui se réduit à elle. C'est dans ces conditions que se déroule le *procès de différentiation*, dans le membre gauche :
>
> $$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ou } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$
>
> et ceci constitue une propriété des fonctions simples comme *ax* .
>
> Si, au dénominateur du rapport, x_1 diminue, il se rapproche alors de *x* ; la limite de sa diminution est atteinte aussitôt qu'il est parvenu jusqu'à *x*.
>
> Avec cela, la différence $x_1 - x$ devient : $x_1 - x = x - x = 0$ et par conséquent, il vient aussi $y_1 - y = y - y = 0$.
>
> Nous obtenons ainsi : $\frac{0}{0} = a$. Comme dans l'expression $\frac{0}{0}$ disparaît toute trace de son origine et de sa signification, nous la remplaçons par $\frac{dy}{dx}$ dans laquelle les différences finies $x_1 - x$ ou Δx et $y_1 - y$ *ou* Δy apparaissent en tant que différences « annulées » ou « évanouies », ou $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se transforme en $\frac{dy}{dx}$. Aussi : $\frac{dy}{dx} = a$.

Marx conclut :

> La consolation à laquelle se raccrochent quelques mathématiciens rationalisants et selon laquelle *dy* et *dx* ne seraient quantitativement qu'infiniment petits, [leur rapport] tendant seulement vers $\frac{0}{0}$ est une

3 p.115 et suivantes

chimère, comme cela sera montré de façon encore plus sensible dans le II.[4]

En clair, au moment où le mathématicien *annule* la différence finie, elle n'existe plus, donc rejoint le néant représenté par zéro. Mais parvenir de Δx à zéro ou de Δy à zéro, ce n'est pas la même chose ; d'où la nécessité de distinguer dx, zéro atteint par l'annulation de la différence finie Δx, de dy, zéro atteint par l'annulation de la différence finie Δy. *La manière dont on atteint une limite laisse une trace dans la limite elle-même*[5].

Deuxième manuscrit :
« *Sur la différentielle* »

Marx étudie les règles de dérivation ou de différenciation d'un produit, puis d'une fonction composée.

La dérivation de $y = uz$, où u et z sont fonctions de x, conduit immédiatement[6] aux deux formules[7]

A) $\dfrac{dy}{dx} = z\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dz}{dx}$

et

B) dy ou $d(uz) = z\,du + u\,dz$.

A propos de la formule A), Marx remarque[8] :

Si nous introduisons la forme primitive des rapports $\dfrac{du}{dx}$ et $\dfrac{dz}{dx}$, dans le membre droit, il devient $z\dfrac{0}{0} + u\dfrac{0}{0}$: Aussi si nous multiplions z et u par le numérateur du rapport correspondant à chacun nous obtenons : $\dfrac{0}{0} + \dfrac{0}{0}$ et comme les variables z et u sont elles-même devenues égales à 0, il en va de même pour leurs dérivées, et finalement il vient : $\dfrac{0}{0} = 0$.

Marx alors constate que

cette façon de procéder est mathématiquement fausse. Considérons [par exemple] : $\dfrac{u_1 - u}{x_1 - x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, il ne vient pas d'abord 0 au numérateur parce que l'on aurait commencé à poser $u_1 - u = 0$, au contraire le numérateur ne devient nul (soit $u_1 - u = 0$), que parce que le dénominateur, la différence des valeurs de la variable indépendante x, l'est devenu (c.-à-d. $x_1 - x = 0$).

En effet

ce qui soudain apparaît en face des variables u et z n'est pas 0, mais $\dfrac{0}{0}$, [rapport] *dans lequel le numérateur est indissociable du dénominateur*. En tant que multiplicateur $\dfrac{0}{0}$ ne pourrait, par conséquent, annuler son coefficient que si et seulement si $\dfrac{0}{0} = 0$.

4 « le II » désigne la deuxième partie de ce premier manuscrit.
5 « le néant d'un quelque-chose quelconque est aussi un néant déterminé » (Hegel, [5], édition de 1812)
6 p.125
7 Marx emploie *équation* pour *formule*
8 p.126

Après diverses réflexions, Marx en arrive à la transformation essentielle[9] :

> La différentielle $dy = f'(x)dx$ apparaît à première vue plus suspecte que le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ dont elle est dérivée. Dans $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, le numérateur et le dénominateur sont inséparablement liés, dans $dy = f'(x)dx$, ils sont manifestement séparés de sorte que l'on est forcé de conclure qu'il ne s'agit que d'une expression déguisée de $0 = f'(x)dx$ ou $0 = 0$ dans laquelle « il n'y a rien à faire ».

Marx poursuit

> Un mathématicien français du premier tiers du XIXe siècle, Boucharlat, […] écrit :
>
> « $\frac{dy}{dx} = 3x^2$
>
> ou plutôt sa valeur $3x^2$ est le coefficient différentiel de la fonction y.
>
> Remarquons que $\frac{dy}{dx}$ étant le signe qui représentre la limite $3x^2$, […] dx doit toujours être placé sous dy. Cependant, pour faciliter les opérations algébriques de l'algèbre on peut momentanément faire évanouir le dénominateur […] et l'on a $dy = 3x^2\,dx$. Cette expression $3x^2\,dx$ est ce qu'on appelle la différentielle de la fonction y. »

Marx commente :

> Ainsi, pour « faciliter les opérations algébriques », introduit-on une formule dont la fausseté est démontrée que l'on baptise « différentielle ».

Mais, poursuit Marx[10] :

> En réalité le cas n'est pas aussi difficile. Dans $\frac{0}{0}$, le numérateur est devenu nul parce que le dénominateur [l'était devenu]. Associés, tous deux sont nuls et perdent par conséquent leur signification symbolique, leur raison.
>
> Mais dès que $x_1 - x$ perd avec dx la forme qui la manifeste invariablement en tant que différence évanouie de la variable indépendante x et de même également pour dy en tant que différence évanouie de la fonction de x ou de la variable dépendante y, la séparation entre le numérateur et le dénominateur devient une opération parfaitement licite [...]. $dy = f'(x)dx$ nous apparaît comme une autre forme de $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ et est toujours susceptible d'être écrite sous cette dernière forme.

Peut-on dire plus clairement que, si la différence évanouie n'existe plus, par contre la différentielle existe, objet et outil du « nouveau » calcul … ?

9 p.132

10 p.133

Troisième manuscrit (ébauches) :
« Sur l'histoire du calcul différentiel »

Dès les premières lignes de « *La marche du développement historique »* [11] Marx présente crûment la démarche de Newton & Leibniz comme *mystique*.

> 1) *Le calcul différentiel mystique* :
> $$x_1 = x + \Delta x\ ,$$
> *transformé désormais en* $x_1 = x + dx$ ou $x + \dot{x}$, où dx est supposée par une explication métaphysique. Il existe d'abord et il est expliqué ensuite.

Ainsi, dx ou $\dot{x}$, c'est du pareil au même. *Au commencement était dx ou* $\dot{x}$ ... Mais, poursuit Marx :

> […] ensuite, on a aussi $y_1 = y + dy$ ou $y_1 = y + \dot{y}$. De l'hypothèse arbitraire découle la conséquence que, dans le développement du binôme $x + \Delta x$ *, ou* $x + \dot{x}$, il faut *escamoter* en chemin les termes en $\dot{x}$ et Δx que l'on obtient [par exemple] à côté de la dérivée première, pour obtenir le résultat correct etc. Puisque pour la fondation première du calcul différentiel on part de ce dernier résultat, plus précisément des différentielles qui sont anticipées et non dérivées, mais au contraire supposées par cette explication ; il en va de même de $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, le coefficient différentiel symbolique *anticipé* par cette explication.

Un peu plus loin [12], Marx pose la question cruciale :

> Pourquoi y a-t-il la suppression violente de certains termes que l'on trouve en chemin ? Cela suppose précisément que l'on sache qu'ils encombrent le chemin et n'appartiennent pas réellement à la dérivée.

Et il y répond :

> *Réponse* très simple : on l'a trouvée de façon purement expérimentale. Non seulement les dérivées effectives de beaucoup de fonctions de x parmi les plus élaborées étaient connues depuis longtemps, ainsi que leurs formes analytiques en tant qu'équations de courbes etc., mais on découvrit cela également grâce à l'expérimentation la plus décisive qu'il soit, précisément en manipulant la plus simple des fonctions algébriques du deuxième degré, [par exemple] $y = x^2$ […]. »

Marx développe alors le carré du binôme, qu'il écrit indifféremment $(x + dx)^2$ ou $(x + \dot{x})^2$, jusqu'au résultat classique :

$$dy = 2xdx + dx^2 \quad \text{ou} \quad \dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\,\dot{x}\ .$$

A ce moment il décrit le tour de passe-passe de Newton et Leibniz [13] :

> Si j'élimine les derniers termes dans les deux membres [droits], on a $dy = 2x\,dx$; $\dot{y} = 2x\dot{x}$
>
> et enfin
> $$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$$
> […]
>
> On parvient ainsi de façon expérimentale — précisément dans un deuxième temps — nécessairement à concevoir que dx^2 ou $\dot{x}\,\dot{x}$ doivent être escamotés pour obtenir le vrai résultat mais même pour obtenir un résultat quelconque.

11 p.193
12 p.194
13 p.195

Cependant, en second lieu, on avait affaire, avec $2xdx + dx^2$ ou $\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\,\dot{x}$, à la véritable expression mathématique (deuxième et troisième terme) du binôme$(x + dx)^2$ ou $(x + \dot{x})^2$. On ne savait pas que ce résultat mathématiquement correct reposait sur la supposition tout aussi mathématiquement fondamentalement fausse que $x_1 - x = \Delta x$ *puisse être* [confondu] *avec* $x_1 - x = dx$. Sinon on aurait obtenu le même résultat non pas par un escamotage mais par une opération algébrique du style le plus simple et on l'aurait présenté au monde mathématique.

Après avoir exposé *l'incohérence logique* des fondateurs du « nouveau » calcul, Marx donne son avis [14] :

Ainsi on croyait même au caractère mystérieux de la façon de calculer que l'on venait de découvrir et qui fournissait des résultats exacts (et en outre véritablement surprenants dans leurs applications géométriques) grâce à des procédés positivement faux. On était si profondément mystifié, on appréciait la nouvelle trouvaille d'autant plus, on rendait la troupe des vieux mathématiciens orthodoxes d'autant plus enragée et on provoquait tellement la clameur opposée qu'elle retentit même chez les profanes et qu'elle est nécessaire pour frayer le chemin de la nouveauté.

Ainsi, Marx prend clairement parti pour la *nouveauté*. Cependant, cela ne résout pas la question des fondements. Sa correspondance et ses notes l'attestent, Marx cherchera, jusqu'à la fin de ses jours, à y répondre.

Les deux autres moments de *l'histoire du calcul différentiel* vue par Marx sont tout aussi dignes d'intérêt : la présentation du *calcul différentiel rationnel (d'Alembert)*, premier pas pour dégager le « nouveau » calcul du mysticisme initial, puis celle du *calcul différentiel purement algébrique (Lagrange)*.

Quatrième manuscrit : *le théorème de Taylor, le théorème de MacLaurin et la théorie de Lagrange des fonctions dérivées* [15]

Marx s'intéresse d'abord au lien entre le *binôme de Newton* et les *formules de Taylor* et de *MacLaurin* [16] .

La découverte par Newton du théorème du binôme (dont les applications s'appliquent également aux polynômes) révolutionna toute l'algèbre en permettant pour la première fois une *théorie générale des équations*.

Le théorème du binôme, cependant, est aussi la base capitale du calcul différentiel comme les mathématiciens l'ont reconnu de façon décisive, précisément depuis Lagrange. Au premier coup d'oeil, on voit que toutes les différentielles monômiques comme x^m, a^x, $\log x$, etc. sont développées à l'aide du seul théorème du binôme […].

[…] le rapport entre le théorème du binôme et ces théorèmes n'a nulle part été éclairé dans sa simplicité toute primitive, même pas chez Lagrange dont la théorie des fonc-

[14] Il est, pensons-nous, intéressant de comparer ce jugement de Marx à ceux de Berkeley [1], puis de Hegel [5].

[15] Sous ce titre, Alcouffe regroupe plusieurs manuscrits dont certains sont de simples ébauches.

16 p.209 & 210

tions dérivées a donné une nouvelle base au calcul différentiel et il est important ici comme partout ailleurs d'arracher à la science le voile du mystère.

Le théorème de Taylor, qui, historiquement, précède celui de MacLaurin, donne — sous des hypothèses déterminées — pour chaque fonction de x qui croît d'un accroissement positif ou négatif h, c'est-à-dire, de façon générale pour $f(x \pm h)$, une série d'expressions symboliques indiquant à travers quelle série d'opérations différentielles $f(x \pm h)$ est susceptible d'être développée. Il s'agit ici, du développement *d'une fonction de x arbitraire, sitôt qu'elle varie*.

Pour sa part, MacLaurin, sous des hypothèses déterminées, fournit également le développement général de *toute fonction de* x, dans une série d'expressions symboliques qui montre comment une telle fonction, dont la résolution algébrique est souvent longue et compliquée, est facile à trouver grâce au calcul différentiel.

Les deux théorèmes sont de grandioses généralisations dans lesquelles les symboles différentiels, eux-mêmes, apparaissent dans le contenu de l'équation. [...] On obtient ainsi deux formules qui sont applicables à toutes les fonctions particulières [de] x ou [de] $x + h$, à quelques restrictions près.

Formule de Taylor :

$f(x + h)$ ou $y_1 =$

$$y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + etc.$$

Formule de MacLaurin : $f(x)$ ou $y = y +$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{h}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + etc.$$

Marx commente sobrement :

Un simple coup d'oeil montre qu'ici, historiquement comme théoriquement, on suppose qu'existe et est connue ce que l'on peut appeler *l'arithmétique du calcul différentiel*, c'est-à-dire le développement de ses opérations fondamentales. Il importe de ne pas l'oublier par la suite, où je suppose cela connu.

A propos de la théorie de Lagrange des fonctions [analytiques], nous noterons cette remarque [17] de Marx selon laquelle Lagrange

s'amarre directement au théorème de Taylor naturellement, d'un point de vue dans lequel, d'une part les héritiers de l'époque Newton Leibniz lui ont fourni la version corrigée des $x_1 - x = dx$, ainsi que $y_1 - y = f(x + h) - f(x)$, tandis que d'autre part il a produit directement dans l'algébrisation de la formule de Taylor sa propre théorie des fonctions « *dérivées* ».

Conclusion

Les *Manuscrits Mathématiques de Marx* appartiennent indéniablement à l'histoire, aussi bien à l'histoire des mathématiques qu'à celle de la philosophie.

Au-delà de l'aspect historique se pose la question de l'actualité des Manuscrits *: leur*

17 p.217

lecture présente-t-elle aujourd'hui un intérêt pour le mathématicien ou le philosophe, et si oui, lequel ?

A cette question, Alcouffe répond en 1984 par l'affirmative dès les premières pages de son introduction. La raison majeure en est, selon lui, « *l'intérêt qui s'exprime en France pour la philosophie des sciences, en général, pour les rapports philosophie-mathématique, en particulier* ». Ne cachant pas que son attention pour les travaux mathématiques de Marx a été attirée « *du point de vue de l'économie politique, à la fois en tant qu'enseignant et en tant qu'historien de la pensée* », Alcouffe conclut que les *Manuscrits « sont un matériau important pour l'économiste mais aussi pour le mathématicien et le philosophe, qu'ils se réclament, ou non, de Marx* ».

Notre avis est le suivant : les *Manuscrits* sont, en quelque sorte, des matériaux *bruts* dont la lecture peut apporter des éléments de réflexion à quiconque s'interroge sur la nature et sur les fondements de l'activité mathématique. Cela s'applique également à l'introduction d'Alcouffe dans laquelle celui-ci, en particulier, nous invite à (re)découvrir Hegel deux fois : d'une part, Hegel inspirant les travaux mathématiques de Marx [18], d'autre part, Hegel pressentant l'analyse non standard à venir. Cette dernière thèse d'Alcouffe, au demeurant étayée par une argumentation solide, mérite d'être examinée pour se forger sa propre opinion. Si la lecture de cet article peut inciter le lecteur de *Repères-Irem à se plonger dans la lecture des Manuscrits mathématiques de Marx*, le but que nous nous sommes fixé en le rédigeant aura été atteint.

18 Le contraire, pensons-nous, aurait été surprenant !

Bibliographie

[1] Berkeley G., *L'Analyste, ou dissertation à un mathématicien incrédule, où l'on examine si l'objet, les principes et les inférences de l'analyse moderne sont conçus plus distinctement, ou déduits avec plus d'évidence, que les mystères de la religion et les règles de la foi*, 1734 – , traduction française par André Leroy, PUF, Paris, 1936

[2] Cauchy A. L. , *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, Paris, 1821 – cité dans [9] et dans [10]

[3] Cauchy A. L. , *Mémoire sur l'analyse infinitésimale*, Paris, 1844 – cité dans [9] et dans [10]

[4] Euclide, *Les Eléments*, *Traduction et commentaires de Bernard Vitrac*, PUF, Paris, 1990

[5] Hegel G. W. F. , *Science de la Logique*, -(édition de 1812) traduction *française* de *P. J. Labarrière et G. Jarczik*, Aubier, Paris, 1972 -(édition de 1831) *traduction française de S. Jankelewitch*, Aubier-Montaigne, Paris, 1949

[6] Hospital, G. F. A. de L'., *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes,* 1696, suivi de Varignon M., *Eclaircissements sur l'analyse des infiniments petits*, Paris 1725 – réédition par ACL, Paris, 1988

[7] Marx K., Manuscrits Mathématiques, *étude et présentation par Alain Alcouffe (première traduction française),* éditions Economica, Paris, 1985

[8] Newton I., *La méthode des fluxions et des suites infinies*, 1671 – traduit par M. de Buffon, Paris, 1740 – réédition par Albert Blanchard, Paris, 1994

[9] Robinson A., *Non-standard Analysis,* North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, revised edition 1974 (1st edition 1966)

[10] Thiénard J.C.*, Pour une introduction de l'enseignement de l'analyse par le calcul infinitésimal,* IREM de Poitiers, 1991

Eléments de bibliographie complémentaires :

[11] Giusti E., *La naissance des objets mathématiques*, traduit de l'italien par G. Barthélémy, Ellipses, Paris, 2000

[12] Hemily*, Textes fondateurs du calcul infinitésimal*, Ellipses, Paris, 2006

[13] IREM, *Aux origines du calcul infinitésimal*, Ellipses, Paris, 1999