LA RUBRIQUE « POINT DE VUE »

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Elle accueille dans ce numéro une réaction d'Henri Lombardi, à propos de l'enseignement consacré à l'apprentissage du raisonnement.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ cinqs pages…

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

FAUT-IL ENSEIGNER LE RAISONNEMENT MATHEMATIQUE DE MANIERE FORMELLE ?

Henri LOMBARDI
Irem de Besançon

Ce point de vue m'a été suggéré par la lecture, dans Repères IREM n° 85 (octobre 2011), de l'article [11] intitulé *Bilan de praticiens sur la transition Lycée-Université*. Même si je me donne l'impression de me répéter (voir par exemple mes articles [6] et [7] dans Repères IREM), il me semble parfois nécessaire de remettre les points sur les " i ".

Dans cet article [11] les auteurs regrettent que les étudiants arrivant à l'Université ne connaissent pas les règles du raisonnement mathématique formalisé, et que les notions ensemblistes soient très peu utilisées au lycée.

On sent comme un regret de la distance entre " le peu de mathématiques enseignées au lycée " et la " vraie mathématique ", qui serait bien évidemment, les autorités académiques l'exigent, la théorie formelle des ensembles à la Zermelo-Fraënkel (avec pourquoi pas, tant qu'on y est, l'axiome du choix).

Malheureusement pour les auteurs, l'exemple qu'ils développent à loisir de l'enseignement de l'algèbre linéaire me semble montrer bien au contraire que l'on peut faire de la très bonne mathématique " à la Gauss ", c'est-à-dire sans aucune théorie formelle du raisonnement mathématique, et encore moins de théorie des ensembles. Ce n'est pas parce que l'on invoquera " l'ensemble des solutions d'un système linéaire ", que cela éclaircira le sujet, qui est en réalité une méthode pratique, bien expliquée et bien comprise, de résolution des systèmes linéaires, avec la description précisément expliquée de tous les cas qui peuvent se présenter.

Où est la rigueur là dedans? Elle est dans le fait qu'un étudiant sera capable d'expliquer pourquoi on est absolument certain de ne pas se tromper lorsqu'on applique telle méthode, ou telle autre. Ce sera très loin d'un raisonnement purement formel, mais cela aura le mérite de montrer que “ l’étudiant comprend ce qui se passe ”.

Cela ne signifie pas qu’il ne faut pas enseigner les espaces vectoriels, mais qu’il faut les enseigner en tant que ce qu’ils sont apparus historiquement. Une abstraction qui s’est imposée, assez tard [1], pour unifier certains concepts de géométrie, d’algèbre et d’analyse en apparence bien éloignés les uns des autres. Et ce serait mieux de ne le faire qu’après avoir enseigné de façon pratique (comme on le fait pour les systèmes linéaires) plusieurs cas concrets où la notion d’espace vectoriel peut être comprise comme une bonne abstraction.

Devenir vraiment mathématicien, c’est “ comprendre ce qui se passe, et être capable de l’expliquer ”. Ce genre de chose est totalement hors de portée du formalisme. Les ordinateurs qui vérifient les textes mathématiques ne comprennent absolument pas ce qui se passe, et sauraient encore bien moins l’expliquer.

En règle générale, l’important, c’est la signification des choses plus que leur formalisation. Une fois que quelque chose a été compris et assimilé, on peut en faire un algorithme, lequel économise ensuite la réflexion théorique qui l’a fondé [2].

J’en viens maintenant à deux passages de l’article qui traitent de logique.

Page 7, les auteurs regrettent que les étudiants ne comprennent pas que lorsque l’on applique un théorème “ supposer les hypothèses vraies ” ne revient pas à dire que l’hypothèse est vraie. A vrai dire, je me sens moi-même très étudiant face à une telle attaque. Est-ce si clair que les étudiants se trompent ? Ne savent-ils vraiment pas qu’un théorème ne s’applique que lorsque les hypothèses sont satisfaites ? Et s’ils ne le savent pas, la logique formelle leur sera-t-elle du moindre secours ?

Page 11, les auteurs donnent deux exemples de manuels de lycée qui traitent du raisonnement par récurrence. Ils critiquent la manière trop informelle dont ce raisonnement est introduit, en étant baptisé “ axiome ”. Dans le premier cas, l’explication baptisée axiome n’est en aucun cas une formule de la logique du premier ordre, c’est plutôt une explication un peu lourde, et pas totalement limpide, de ce que l’on doit faire pour réussir le raisonnement. Dans le second cas, on se rapproche un peu plus d’un axiome au sens de la logique formelle.

Je propose donc aux auteurs (aux auteurs des manuels comme aux auteurs de l’article) de relire ce que dit Poincaré du raisonnement par récurrence, et de nous dire s’ils y voient la moindre allusion à un axiome, lequel devrait en outre se rapprocher de la formulation que l’on trouve dans les manuels de logique formelle.

Extrait de : Poincaré, *La Science et l’Hypothèse.* Première partie : Le nombre et la grandeur. Chapitre premier. Sur la nature du raisonnement mathématique.

VI

Le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence peut être mis sous d’autres formes ; on peut dire par exemple que dans une collection infinie de nombres

1. Nettement plus tard que la théorie de Galois et l’introduction de la notion de groupes.

2. Ce qui pouvait ravir Claude Allègre, mais ne légitimait pas ses attaques contre notre belle science.

entiers différents, il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres.

On pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre et se donner ainsi l'illusion qu'on a démontré la légitimité du raisonnement par récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un axiome indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage.

On ne peut donc se soustraire à cette conclusion que la règle du raisonnement par récurrence est irréductible au principe de contradiction.

Cette règle ne peut non plus nous venir de l'expérience ; ce que l'expérience pourrait nous apprendre, c'est que la règle est vraie pour les dix, pour les cent premiers nombres par exemple, elle ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une portion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite.

Or, s'il ne s'agissait que de cela, le principe de contradiction suffirait, il nous permettrait toujours de développer autant de syllogismes que nous voudrions, c'est seulement quand il s'agit d'en enfermer une infinité dans une seule formule, c'est seulement devant l'infini que ce principe échoue, c'est également là que l'expérience devient impuissante. Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori.* On ne saurait d'autre part songer à y voir une convention, comme pour quelques-uns des postulats de la géométrie.

Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.

Mais, dira-t-on, si l'expérience brute ne peut légitimer le raisonnement par récurrence, en est-il de même de l'expérience aidée de l'induction ? Nous voyons successivement qu'un théorème est vrai du nombre 1, du nombre 2, du nombre 3 et ainsi de suite, la *loi est manifeste,* disons-nous, et elle l'est au même titre que toute loi physique appuyée sur des observations dont le nombre est très grand, mais limité.

On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

Et comme la réponse est évidemment négative, faudrait-il en déduire que Poincaré ne comprenait pas bien ce qu'est un raisonnement mathématique correct ? Même chose pour le texte fondateur de Pascal, où, dans une analyse moins poussée que celle de Poincaré, il fait quand même l'essentiel du travail en ne traitant qu'un seul exemple.

Il devrait sembler évident à tout bon pédagogue (et à tout didacticien) que pour faire assimiler le raisonnement par récurrence, il faut l'avoir mis en œuvre dans quelques exemples où le résultat n'est pas trop intuitivement évident [3]. Exposer le raisonnement sur des exemples, et discuter à cette occasion de son caractère convaincant, ou pas.

3. Le texte remarquable de Poincaré ne remplit pas ce dernier critère, celui de Pascal, sans visée philosophique, est meilleur de ce point de vue.

Ce qui ressort naturellement d'une telle pratique pédagogique, ce n'est pas un axiome (Poincaré récuse clairement l'analogie avec les axiomes " conventionnels " de la géométrie), mais une méthode de raisonnement qui donne accès à une infinité de vérités (un énoncé général valable pour tous les entiers naturels) par la vertu d'un raisonnement purement fini.

Si l'on veut faire un exposé plus formel de cette méthode de raisonnement, on la présentera comme " une règle de déduction " et non pas comme un axiome que l'on utiliserait ensuite à l'intérieur d'un système formel à la Hilbert ne comportant pratiquement aucune règle de déduction [4].

C'est pourquoi la remarque des auteurs de l'article (au sujet de l'axiome de récurrence) selon laquelle " l'axiome et le mode de raisonnement sont deux choses différentes du point de vue logique " me semble totalement non pertinente, et insister sur cet aspect ne peut que semer la confusion dans l'esprit des étudiants tant que l'on n'a pas mis en place un cours de logique formelle, lequel ne peut pas être légitime au début du cursus universitaire.

Le but d'un cours de logique formelle ne peut pas être d'apprendre à bien raisonner. C'est une fois que l'on a appris à bien raisonner, et que l'on se trouve cependant face à certains problèmes de fondements soulevés par la pratique mathématique, qu'il devient utile et nécessaire de se poser la question : et si on analysait le discours mathématique lui-même par des méthodes purement mathématiques, est-ce que cela ne pourrait pas nous apporter quelques lueurs ? D'où un cours de logique formelle, et la discussion des règles de déduction qu'il doit inclure. Mais ceci ne peut se comprendre qu'après qu'ait déjà été introduite une certaine quantité de théorie mathématique abstraite, c'est-à-dire au niveau du master.

Les auteurs de l'article adoptent implicitement le point de vue dominant actuel selon lequel, " l'affaire est pliée " depuis l'introduction du sytème formel **ZFC** [5]. Il n'y aurait plus de problème à poser, et le raisonnement mathématique ne ferait plus l'objet d'aucunes analyses ou discussions, réduit qu'il a été à un pur mécanisme algorithmique certifiable par machine.

C'est oublier un peu vite que le programme de Hilbert quant à la possibilité de mécaniser complètement les mathématiques a lamentablement échoué, non pas seulement pour **ZFC**, mais même pour la formalisation de portions limitées de l'activité mathématique (comme par exemple le système formel de l'arithmétique primitive récursive, qui n'utilise même pas les quantificateurs universels et existentiels).

Les considérations de Poincaré, prophétisant plus de 20 ans à l'avance le théorème d'incomplétude de Gödel [6], basées sur l'évidence qu'un système formel est au moins aussi compliqué que le système des

4 Dans la logique formalisée à la Hilbert, les seules règles de déduction sont usuellement le Modus Ponens et une règle permettant d'introduire le quantificateur universel.

5 C'est la théorie formelle des ensembles de Zermelo-Fraenkel, avec l'axiome du choix.

6 Dans le même texte que cité précédemment. Si enfin la science du nombre était purement analytique, ou pouvait sortir analytiquement d'un petit nombre de jugements synthétiques, il semble qu'un esprit assez puissant pourrait d'un seul coup d'œil en apercevoir toutes les vérités ; que dis-je ! on pourrait même espérer qu'un jour on inventera pour les exprimer un langage assez simple pour qu'elles apparaissent ainsi immédiatement à une intelligence ordinaire. Si l'on se refuse à admettre ces conséquences, il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créa-

entiers naturels, ne semblent pas avoir été assimilées par l'école bourbakiste.

On commet un contresens fondamental lorsque, ayant constaté la puissance du point de vue structurel en mathématiques, et par voie de conséquence l'importance de la méthode axiomatique, on fait le grand saut dans le vide consistant à dire que les mathématiques elles-mêmes devraient être axiomatisées pour devenir respectables.

C'est dans tous les cours de mathématiques à l'université que l'on devrait discuter des problèmes du raisonnement mathématique, à travers l'histoire des concepts et des controverses qu'ils ont suscitées. La vérité n'est pas une et indivisible en mathématiques comme on tente trop souvent de le faire croire (notamment en imposant un système formel dont on affirme qu'il réaliserait le miracle convoité).

Le cursus universitaire de mathématiques, pures et/ou appliquées, devrait en outre comprendre dans le master, une fois que l'on connaît suffisamment d'objets théoriques litigieux, un cours d'Epistémologie de notre science. Cela peut même prendre la forme d'un cours de logique formelle, à condition que l'on se garde bien d'enseigner la logique classique et la théorie des ensembles comme des vérités révélées. Cela permettrait notamment aux futurs enseignants de collège et lycée d'avoir le recul nécessaire.

Quant aux gens qui écrivent les programmes dans l'esprit formaliste bourbakiste (dans la forme, ils ont renoncé, fort heureusement), ils auraient besoin d'un sérieux recyclage.

Je me permettrai ici de faire de la publicité pour le livre de logique formelle [1]. Bien qu'il ne remplisse pas complètement l'objectif qui serait de discuter sérieusement en tant que telles [7] les règles de la logique et les axiomes de la théorie des ensembles, au moins il fournit un cadre clair dans lequel ces discussions peuvent être menées. C'est en effet (à ma connaissance) le premier livre d'enseignement de la logique formelle en français dans lequel est mis au premier plan le point de vue de Gentzen, qui analyse la structure du raisonnement mathématique comme donnée par des règles de déduction (pour tous les connecteurs et quantificateurs) et non pas à travers des axiomes. Bien que les deux présentations de la logique formelle du premier ordre soient " formellement " équivalentes, celle de Gentzen est conceptuellement de beaucoup supérieure.

---

trice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme. La différence doit même être profonde. Nous ne trouverons pas par exemple la clef du mystère dans l'usage fréquent de cette règle d'après laquelle une même opération uniforme appliquée à deux nombres égaux donnera des résultats identiques.
Tous ces modes de raisonnement, qu'ils soient ou non réductibles au syllogisme proprementdit, conservent le caractère analytique et sont par cela même impuissants.

7. Ceci n'est pas une faute d'orthographe, mais une règle d'accord naturelle : accord avec le (la) plus proche concerné(e).

Références

[1] David R., Nour K., Raffali C. *Introduction à la logique*, Dunod (2001).

[2] Dowek G. *Les métamorphoses du calcul. Une étonnante histoire de mathématiques*, Le Pommier. (2007).

[3] Giusti E., *La naissance des objets mathématiques* (traduction française, Barthélémy G.) Ellipse, l'Esprit des sciences. 2000.

[4] César Jean, d'après un exposé de Merker Jean. *Le théorème de Gödel*. Brochure IREM de Besançon. 1980

[5] Lakatos I. *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*, Version française, Hermann (1984).

[6] Lombardi H. *Le raisonnement par l'absurde*. Revue Repères IREM n° 29 (octobre 1997) p. 27–42.

[7] Lombardi H. *Le programme de Hilbert et les mathématiques constructives*. Revue Repères IREM n 50 (janvier 2003) p. 85–103.

[8] Lombardi H. *Épistémologie mathématique*. (2011), Ellipses.

[9] Poincaré H. *Le nombre et la grandeur*, Réédité dans *La Science et l'hypothèse*.

[10] Poincaré H. *La logique de l'infini*, Revue de Métaphysique et de Morale **17**, 461–482, (1909). Réédité dans *Dernières pensées*. On peut le trouver sur le web.

[11] Théret D. et *alii*. *Bilan de praticiens sur la transition Lycée-Université*, Repères IREM n 85 (octobre 2011), 5–30.