COMMENT PEUT-ON PENSER LA CONTINUITE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DE 6 A 15 ANS ?

Le jeu sur les supports et les instruments

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN,
Laboratoire de Didactique André Revuz
Anne-Cécile MATHE,
Laboratoire de Mathématiques de Lens
Régis LECLERCQ,
Inspecteur de l'Education nationale

Résumé : L'article propose une réflexion sur l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire, du CP à la troisième en réfléchissant notamment au rôle que peuvent jouer les instruments, pour faire évoluer et enrichir le regard porté sur les figures, particulièrement à la transition école - collège, permettant de passer du regard ordinaire qu'on porte sur un dessin au regard géométrique qu'on porte sur une figure.

Cet article est également consultable en ligne sur le portail des Irem (onglet : Repères IREM) : http://www.univ-irem.fr/)

Introduction

Qu'appelle-t-on géométrie ? La question se pose de façon assez cruciale quand on s'intéresse à la continuité de l'enseignement au long de la scolarité obligatoire. De quel objet parle-t-on quand on déclare à un enfant de CP ou à un élève de troisième qu'il s'agit d'un rectangle ou d'une droite ? Est-ce le même objet ? Sinon comment se construisent les liens entre les deux objets ? Peut-on dire que l'on fait de la géométrie à l'école primaire ? Et finalement à quoi sert l'enseignement de la géométrie ? Quel est l'intérêt de lui faire une place dans l'enseignement obligatoire, pour tout un chacun ? Quelle place lui faire ? Ces questions ne sont pas nouvelles. On peut trouver beaucoup d'articles, notamment dans Repères-IREM, qui les abordent sous un angle ou un autre. Les auteurs du présent article sont, comme la plupart des auteurs des autres articles qui ont abordé le sujet, convaincus de l'intérêt de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Mais beaucoup des articles existants s'intéressent à la géométrie dans le secondaire, quelques-uns au primaire ou à la formation des enseignants du primaire. L'originalité du propos est ici de s'intéresser à la continuité entre l'école primaire et le collège et donc d'essayer de penser le lien entre les objets matériels et les objets géométriques. D'autres ont abordé le sujet avant nous, notamment Rouche (voir

Rouche et al. 2008), ainsi que Berthelot et Salin (2001) et Salin (2008) dans la suite desquels nous nous situons.

Dans une première partie, nous nous intéresserons aux rapports entre espace sensible et espace géométrique avant de nous interroger dans une deuxième partie sur la continuité du primaire au collège et les moyens de faire évoluer les objets géométriques pour les élèves. Dans la troisième partie, nous nous intéresserons au cas de la symétrie orthogonale qui est enseignée de la maternelle à la sixième et fait intervenir tous les objets géométriques et toutes les propriétés introduites dans le programme de sixième.

I. — Espace géométrique et espace sensible

La question des rapports entre mathématiques et réalité se pose particulièrement dans l'enseignement de la géométrie, et sous plusieurs aspects. Elle est indissociable des objectifs que l'on assigne à cet enseignement dans un tronc commun destiné à toute une classe d'âge. Nous commencerons par poser le problème en l'illustrant par deux extraits de manuels à cinquante ans de distance.

1.1. *Objets matériels et objets géométriques. Deux exemples extraits de manuels*

Un coup d'œil rapide sur les manuels nous montre que la façon de traiter, au début de l'enseignement secondaire, les rapports entre géométrie et monde sensible a évolué au cours du vingtième siècle. Dans les années cinquante (à cette époque une faible partie de la population accède à l'enseignement secondaire), on s'appuie sur des objets du monde sensible pour définir les objets premiers de la géométrie et on énonce quelques principes de base qu'on admet et qui sont, explicitement ou non, reconnus comme axiomes.

Ainsi, dans le Monge et Guinchan de 5ème de 1958, peut-on lire, à propos de la droite, l'extrait de la page ci-contre.

On voit apparaître les objets matériels (l'aiguille à tricoter, les trous dans la boîte), l'instrument (la règle, non graduée), les tracés, les objets géométriques (points, droites) et les relations entre eux (propriétés admises ou axiomes). Les propriétés sont énoncées sur les objets géométriques, dans le langage de la géométrie mais elles le sont à partir de propriétés des objets matériels ou d'expériences et d'observations sur les objets matériels et les tracés. La manière de nommer une droite par deux de ses points est indiquée aussi.

Le passage des objets matériels aux tracés graphiques et aux propriétés des objets géométriques est supposé transparent et négocié par ostension assumée (Salin, 1999). Il est relié à l'usage des instruments de tracé (la règle dans la figure 1). On a un appui sur des manipulations physiques conçues pour illustrer les concepts géométriques et guidées par la progression logique des concepts qu'il s'agit de présenter. Cependant, il n'y a pas d'appui sur l'expérience que peuvent avoir les élèves et on ne s'inquiète pas de savoir comment a été construite cette expérience : tout ce qui précède, en primaire et en sixième, est basé sur le nombre et la mesure. Cependant on s'inquiète de la construction des grandeurs et des opérations sur les grandeurs (par exemple, l'addition de longueurs par mise bout à bout de segments). Ce que l'on voit sur la figure n'est pas mis en doute.

Dans les manuels actuels (qui s'adressent en principe à toute une classe d'âge), les objets géométriques sont en général supposés déjà là, on se méfie de ce qu'on voit sur la figure (les droites semblent parallèles ou perpendiculaires, c'est un codage qui permettra de dire qu'elles

Propriétés de la droite.

9. Perçons deux trous dans deux faces opposées d'une boîte en carton, puis introduisons dans ces trous une aiguille à tricoter fine et bien droite; nous réalisons une droite passant par deux points A et B (*fig.* 8).

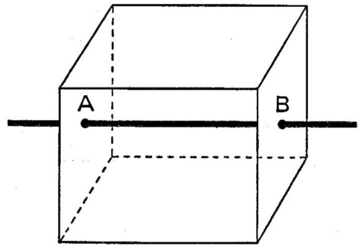


Fig. 8.

La condition de passer par ces points n'immobilise pas l'aiguille; nous pouvons la déplacer soit en la faisant glisser soit en la faisant pivoter entre les doigts. Or, si nous observons l'aiguille entre A et B, elle paraît fixe; pendant ces mouvements elle coïncide constamment avec la droite AB.

Si, au lieu d'une aiguille rectiligne, nous avions pris une tige curviligne, le pivotement aurait engendré entre A et B un fuseau dû aux positions successives de cette tige (*fig.* 9).

Nous admettrons que les résultats de ces expériences sont vrais pour une droite géométrique, et nous énoncerons :

Par deux points distincts il passe une droite et une seule.

Cette propriété est caractéristique de la droite, c'est-à-dire qu'elle n'appartient qu'à la droite.

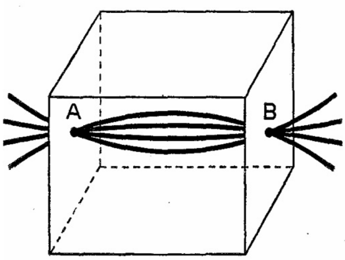


Fig. 9.

Elle peut encore s'énoncer :

Deux points déterminent une droite.

On en déduit les conséquences suivantes :

Deux droites qui ont deux points communs coïncident;

deux droites distinctes peuvent se rencontrer, au plus, en un point;

pour nommer une droite, il suffit de nommer deux de ses points.

10. Application : *Vérification d'une règle par retournement.*

On marque sur une feuille de papier deux points A et B, puis au moyen de la

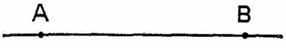


Fig. 10. — L'arête de la règle est juste.

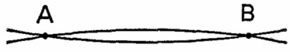


Fig. 11. — L'arête de la règle est fausse.

règle à vérifier on joint AB. On retourne la règle, puis utilisant le même bord on recommence le tracé.

La règle est juste si les deux tracés se recouvrent exactement (*fig.* 10 et 11).

Il est indispensable de vérifier successivement les deux bords d'une règle plate.

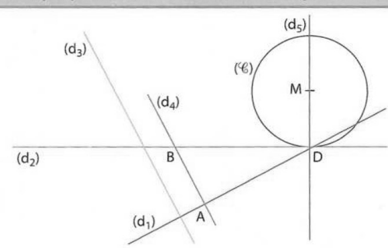
Figure 1. Extrait du manuel Monge et Guinchan de 5ème, 1958

le sont, par exemple, parce qu'on en a fait l'hypothèse). Les rapports entre géométrie théorique et objets physiques sont pudiquement passés sous silence et la question des rapports entre espace sensible et espace géométrique n'est pas vraiment abordée dans les manuels comme le montrent Berthelot et Salin (2001), ce qui fait que, comme le disaient déjà Alain Duval et Marie-Hélène Salin (Duval et Salin, 1991), « y'a un malaise ».

En revanche, on introduit un grand nombre de notations et codages. Le vocabulaire ensembliste et les notations introduites dans l'enseignement à partir des années 1970 sont utiles pour les mathématiques en général et permettent de préciser et d'alléger les formulations en géométrie ; nous ne remettons pas en cause leur enseignement mais il nous semble que leur introduction en sixième ne devrait pas occulter le reste. Comme on ne peut pas se passer de figures pour faire de la géométrie, même si on a essayé d'en minorer la nécessité à l'époque des mathématiques modernes, le rapport à l'espace sensible, dans le cas de la géométrie plane, se limite en général dans l'enseignement au rapport à l'espace graphique des tracés sur papier ou sur écran d'ordinateur et, comme il est difficile de faire entrer les élèves dans le rapport à la figure d'un mathématicien expert, on leur apprend à s'en méfier mais pas à l'utiliser de façon opératoire. Berthelot et Salin l'illustraient à partir de plusieurs manuels des années 1990-2000. Dix ans plus tard, cela n'a pas vraiment changé.

Voici, à titre d'exemple, les deux activités constituant la première page du premier chapitre de géométrie du manuel Bordas de 6ème, édition 2009 (les codages sont introduits dans les pages qui suivent).

Pour revoir Pour chaque question, trouve la ou les bonnes réponses en utilisant la figure ci-dessous.



	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Quelles droites semblent perpendiculaires ?	(d_1) et (d_2)	(d_1) et (d_3)	(d_2) et (d_4)
2	Quelles droites semblent parallèles ?	(d_2) et (d_5)	(d_3) et (d_4)	(d_3) et (d_5)
3	La mesure du segment [AB] est :	supérieure à celle du segment [MD]	inférieure à celle du segment [MD]	égale à celle du segment [MD]
4	Un rayon du cercle $(\mathscr{C})$ de centre M est :	le segment [MD]	la droite (d_1)	la droite (d_5)
5	Quelles sont les affirmations qui semblent vraies ?	ABD est un triangle équilatéral	ABD est un triangle isocèle	ABD est un triangle rectangle

Figure 2. Extrait du manuel de Sixième, Bordas, édition 2009

ACTIVITÉ **1. Droites perpendiculaires, droites parallèles**

1. a) Placer sur une feuille deux points A et B.
b) Tracer la droite passant par le point A et le point B.
On note cette droite **(AB)**.
c) Placer un point C qui n'appartient pas à la droite (AB).
On note **C $\notin$ (AB)** pour dire que **le point C n'appartient pas à** la droite (AB).
d) Tracer la droite (d), perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point C.
On note **C $\in$ (d)** pour dire que **le point C appartient à** la droite (d).
e) Tracer la droite (h), perpendiculaire à la droite (d) passant par le point C.
f) Que peut-on dire des droites (d) et (h) ?

2. a) Sur une nouvelle feuille, tracer une droite (KT).
b) Placer deux points H et P tels que H $\in$ (KT) et P $\notin$ (KT).
c) Tracer la droite (d_1), parallèle à (KT) qui passe par P.
d) Tracer la droite (d_2), perpendiculaire à (KT) passant par H.
e) Que peut-on dire des droites (d_1) et (d_2) ?

Figure 3. Extrait du manuel de Sixième, Bordas, édition 2009

La première activité s'intitule « pour revoir ». Pourtant on y trouve déjà toutes les notations qui seront introduites ensuite. Rien n'est spécifié sur la manière dont on peut trouver et justifier la réponse : à l'œil par perception directe ou en se servant des instruments ? Pour les questions 1, 2, 5, le verbe « sembler » renvoie peut-être à la perception directe. Mais pour les questions 3 et 4 il disparaît ; cela signifie-t-il qu'on peut se fier au compas ou à la règle graduée pour comparer des longueurs, que le fait qu'un point (D) appartienne à un cercle peut se lire sur la figure ? L'activité suivante qui se présente comme la première activité pour introduire du nouveau, est centrée sur des notations et des manières de dire...

1.2. *Finalités de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire*

Les premiers chapitres de géométrie des manuels de sixième commencent encore le plus souvent par l'introduction du vocabulaire et des notations ensemblistes comme si on voulait le plus vite possible arriver à des manières de dire et d'écrire qui assureront la rigueur des démonstrations, dégagée de l'intuition apportée par l'expérience spatiale dont disposent les élèves. Pourtant, l'enseignement de la géométrie pour tous a nécessairement au moins deux finalités : l'enseignement d'un savoir géométrique, c'est-à-dire d'un cadre théorique cohérent, régi par une axiomatique (explicite ou non), mais aussi l'utilisation de ce cadre pour résoudre des problèmes concrets. Il en a aussi une troisième : la géométrie comme moyen de représentation pour d'autres champs de savoir, y compris à l'intérieur même des mathématiques, ce qu'on appelle parfois la pensée géométrique ou l'intuition géométrique, constituant un puissant outil heuristique par le fait que l'on peut transférer dans ces champs des intuitions issues de notre rapport à l'espace (cf. jeux de cadres, Douady, 1987, 1994). Le rapport de la commission Kahane (2002) donne bien tous ces objectifs à l'enseignement de la géométrie en y ajoutant l'apprentissage du raisonnement qui, pour nous, ne se résume pas à l'apprentissage de la démonstration. Ce n'est pas l'aspect que nous mettons en avant dans cet article mais il est bien sûr très important aussi à nos yeux.

Nous choisissons d'insister sur les rapports entre la finalité pratique et la finalité théorique de la géométrie car elles sont souvent vécues comme antinomiques voire contradictoires dans l'enseignement alors que, selon nous, elles devraient pouvoir s'enrichir mutuellement : pour que les savoirs géométriques puissent aider à résoudre des problèmes qui se posent dans l'espace, les axiomes qui ont permis à Euclide de définir un cadre théorique cohérent pour la géométrie il y a plus de 2000 ans n'ont pas été choisis au hasard : ils permettent de modéliser des problèmes qui se posent dans l'espace sensible. Comment les élèves pourront-ils se servir de leur savoir géométrique à l'extérieur des mathématiques et se créer une intuition géométrique utile ailleurs si on n'aborde pas la question des rapports entre géométrie et réalité ? En 1955, Fréchet[1] écrivait déjà :

> Ma conclusion est qu'il faut donc cesser d'enseigner une géométrie qu'on ne s'est pas donné le droit d'appliquer à la réalité. La géométrie qu'on enseigne est une géométrie tronquée, parce que réduite à sa partie axiomatique. Il faut, sans y consacrer longtemps, prononcer les mots nécessaires pour que les élèves aient entre les mains une géométrie applicable, une géométrie totale.

Comme le rappelle Bkouche (2009)[2], « on peut considérer la géométrie élémentaire comme l'étude des corps solides du point de vue de la grandeur et de la forme. Son premier objectif est donc de préciser les notions de grandeur et de forme ». Bkouche souligne aussi que c'est la limite aussitôt rencontrée de la définition de l'égalité par le principe de superposition (comment superposer deux objets de l'espace ?) qui amène la nécessité de donner des critères pour assurer que deux objets sont superposables sans avoir besoin de réaliser matériellement l'opération.

De leur côté, Berthelot et Salin (2001) insistent sur le fait que l'acquisition des savoirs géométriques et la résolution de problèmes de géométrie s'appuient sur la maîtrise de connaissances spatiales que l'élève construit depuis son enfance à l'école et hors de l'école. La distinction entre espace sensible et espace géométrique et celle entre connaissances géométriques et connaissances spatiales les amènent à distinguer trois problématiques dans l'enseignement de la géométrie élémentaire : la problématique géométrique qui correspond à une résolution de problème dans le modèle théorique de la géométrie, avec une validation théorique par un discours (la démonstration), la problématique pratique qui correspond à une résolution de problème dans l'espace sensible avec des moyens de l'espace sensible et une validation dans l'espace sensible et la problématique de modélisation ou spatio-géométrique qui correspond à un problème de l'espace sensible qu'on représente dans le modèle théorique, pour lequel on met en œuvre des résultats théoriques mais qu'on valide au final dans l'espace sensible. Cette problématique nous paraît très intéressante pour penser, dans l'enseignement, les rapports

1 Fréchet M. (1955) *Les mathématiques et le concret,* PUF, Paris, cité par Berthelot et Salin (2001).

2 Nous partageons totalement la vision de la géométrie exposée dans cet article de synthèse de R. Bkouche, mais nous ne partageons pas la vision de la didactique qui transparaît à travers les articles antérieurs donnés en référence en appui de cet article.

entre espace sensible et espace géométrique, géométrie à finalité pratique et géométrie théorique, et notamment pour penser un enseignement cohérent de la géométrie au long de la scolarité obligatoire, ce qui, selon nous, nécessite de considérer sérieusement les deux aspects et de les mettre en relation avec le développement de l'enfant. La notion de problématique, au sens que lui donnent Berthelot et Salin, nous paraît productive pour les questions que nous abordons dans la mesure où elle met l'accent sur les problèmes qui sont susceptibles de faire évoluer les conceptions et les pratiques.

Il nous faut aussi considérer que l'enseignement obligatoire s'adresse à tous les élèves, aussi bien ceux qui vont poursuivre leur cursus dans l'enseignement général qu'à ceux qui se dirigeront vers l'enseignement professionnel. Peu de travaux de didactique se sont pour l'instant intéressés aux besoins en mathématiques de l'enseignement professionnel et à la question de la cohérence entre l'enseignement des mathématiques au collège et dans l'enseignement professionnel mais nous soupçonnons que la question des rapports entre espace sensible et espace géométrique est très importante dans cette perspective aussi.

Alain Kuzniak et Catherine Houdement [3], en s'appuyant sur les travaux de Gonseth [4], distinguent différents paradigmes [5] pour la géométrie, notamment la géométrie I qui porte sur des objets matériels, utilise des instruments de tracé ou de mesure et a des visées pratiques, voire théoriques mais alors finalisées par la pratique (c'est donc en particulier celle qui sera valorisée dans l'enseignement professionnel) et la géométrie II ou axiomatique naturelle qui porte sur des objets idéels et des relations entre ces objets, sur lesquels on a posé des axiomes et on établit des théorèmes. L'interprétation de la géométrie en termes de paradigmes leur permet d'expliquer des malentendus entre professeur et élèves dans la résolution de problèmes géométriques. Pour la question qui nous occupe, la construction d'une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie au long de la scolarité obligatoire, ce sont surtout les relations entre ce qu'ils appellent géométrie I et géométrie II qui nous intéressent. La notion d'espace de travail géométrique, en rapport étroit selon nous avec celles de contrat didactique en théorie des situations (Brousseau, 1998) et de rapport personnel/institutionnel au savoir en théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992), leur permet d'interroger les relations entre les deux paradigmes du point de vue des individus qui pratiquent la géométrie voire des institutions qui attendent et légitiment certaines pratiques.

Cependant, la notion de paradigme nous paraît séparer voire opposer les deux finalités principales de la géométrie. Or il nous semble que l'enseignement primaire au moins, voire celui du début du collège, se trouve en amont de cette dualité et que parmi les questions essentielles soulevées par Houdement et Kuzniak aussi bien que par Berthelot et Salin quand ils parlent du collège, on trouve le regard porté sur les figures et l'usage des instruments qui est, comme de multiples travaux l'ont montré, une des difficultés importantes rencontrées dans l'enseignement de la géométrie. Pour approfondir la question de la continuité de l'enseignement de la géométrie, nous avons donc éprouvé le besoin d'analyser d'un peu plus près le rapport à la figure et aux instruments dans la résolution des problèmes de géométrie.

3 Voir Houdement (2007) et les articles cités dans les références de cet article.

4 Gonseth F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne : éditions du Griffon.

5 Au sens de Kuhn (1962, 2ème édition 1970, traduction 1983) *La structure des révolutions scientifiques*. Paris : Flammarion.

1.3. *Le rapport à la figure et aux instruments de tracé en géométrie*

Dans la perspective qui est la nôtre, penser une progression sur la géométrie de 6 à 15 ans, il nous faut d'abord souligner que nous entendons géométrie, figure, instrument dans des sens très larges. Ainsi, nous considérons que nous travaillons déjà la construction de concepts géométriques et que nous commençons à mettre en place des pratiques de géométrie au cours préparatoire, voire à la maternelle, quand nous demandons aux élèves de reproduire des figures constituées d'assemblages de pièces de papier ou carton coloré (puzzles ou tangrams par exemple). Pour nous, une figure ne se limitera donc pas à un tracé avec les instruments de géométrie usuels sur papier ou sur écran d'ordinateur ; elle pourra être obtenue aussi par un assemblage de formes par juxtaposition ou par superposition. Aux instruments classiques de géométrie, il nous faudra ainsi ajouter tous les objets utilisables pour la réalisation matérielle de ces figures comme les gabarits et pochoirs et même les ciseaux et la gomme. Ceci nous amène à revenir sur les rapports entre espace sensible et espace géométrique et sur les rapports entre objets matériels et objets géométriques. Nous le ferons à partir d'un exemple.

Problème pratique ou problème théorique ?

Nous prendrons comme exemple le problème bien connu d'Abul Wafa : comment faire un carré d'aire triple d'un carré donné[6] ? On peut imaginer plusieurs moyens de résoudre ce problème en le situant dans une problématique pratique au sens de Berthelot et Salin ou, selon la terminologie de Houdement et Kuzniak, dans le paradigme de la géométrie I. Nous en choisirons deux, l'un appuyé sur des gabarits déplaçables, l'autre sur des tracés avec des instruments. Dans les deux cas, on peut aussi chercher à démontrer que les procédés employés sont valides, quel que soit le carré de départ. Nous considérons qu'on entre alors dans une problématique théorique, même si on continue à manipuler du matériel. C'est en effet le passage à la généralisation qui nous paraît caractéristique de la problématique théorique.

1. *Résolution du problème pratique avec du matériel déplaçable* : on dispose de 3 carrés superposables découpés dans du papier (ici, un foncé, deux plus clairs) ; on en découpe deux (les clairs) selon une diagonale ; on dispose les 5 morceaux obtenus et on les colle sur une feuille de papier blanc dans la disposition ci-dessous ; on joint les sommets des angles droits des triangles rectangles isocèles, on coupe ce qui dépasse pour le replacer dans les vides. Les morceaux s'ajustent (si on a réussi à bien découper, ce qui n'est pas évident) et forment un carré qui a bien une aire triple du carré initial puisqu'on a utilisé tous les morceaux sans superposition, sans en ajouter, sans en perdre.

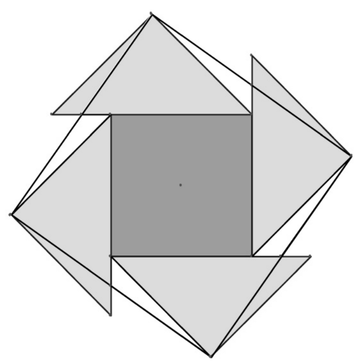


Figure 4.

6 Voir dans Moyon (2012) la traduction du texte d'Abul Wafa. Les artisans de l'époque utilisaient une méthode approchée réfutée par Abul Wafa (voir Moyon, 2011) mais qui était sans doute plus efficace pour partager des carrés de pierre avec une moindre casse. On voit ici nettement la différence entre le problème pratique et le problème théorique.

Cette première expérience (validation par découpage et déplacement de morceaux) ne permet qu'une validation sur un objet particulier et à la précision des découpages près. Elle permet un travail sur des surfaces.

2. *Résolution du problème pratique par une construction aux instruments* : on dispose d'un carré[7] dessiné sur une feuille de papier ; on prolonge les côtés du carré d'un côté en reportant la longueur de la diagonale et en tournant d'un quart de tour trois fois de suite. On construit quatre triangles rectangles isocèles superposables à un demi-carré (au compas ou à l'équerre si on a de plus un instrument permettant de prendre un milieu). En joignant les sommets des angles droits des quatre triangles on obtient un carré ; les petits triangles qui dépassent sont superposables aux petits triangles ajoutés (par exemple par vérification au compas de l'égalité des longueurs des côtés). Le grand carré a une aire triple du carré initial puisqu'elle est égale à la somme des aires du carré initial et des quatre triangles.

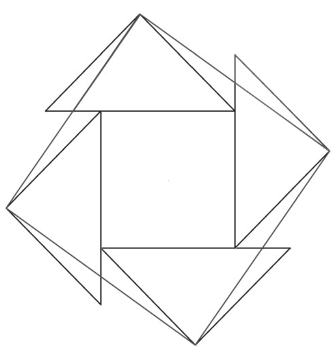


Figure 5.

La seconde expérience (graphique) suppose de savoir construire des triangles rectangles isocèles superposables au demi-carré. Elle demande une déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005 ; Duval et Godin, 2006) des triangles en unités visuelles de dimensions inférieures : pour reporter la longueur des diagonales du carré sur une demi-droite, voir le sommet du triangle comme intersection de cercles ou le triangle comme composé de deux triangles moitié dont les sommets se joignent au milieu de la base.

Dans les deux cas, le raisonnement est appuyé sur une expérience au moins mentale de déplacement, replacement et de découpage de triangles mais, quelle que soit l'expérience matérielle réalisée, la finalité devient théorique et pas seulement pratique dès qu'on dépasse la fabrication d'un carré particulier et qu'on se pose la question de la généralité de la méthode[8] : Est-ce que, pour n'importe quel carré de départ, on obtient bien toujours un carré d'aire triple ? La démonstration du fait qu'on obtient bien un carré et que son aire est triple de celle du carré initial, dépend des outils théoriques disponibles, notamment triangles isométriques ou rotation[9]. Quoi qu'il en soit, elle est difficile à mettre en texte sans nommer des éléments de la figure. L'économie de la rédaction des démonstrations et de la dénomination amène à porter le regard sur les points utiles et à nommer les autres éléments (segments, surfaces) à partir de ces points.

7 Il s'agit maintenant d'un carré-ligne : le même mot désigne la surface et la ligne polygonale mais il y a déjà un changement de point de vue dans la construction de lignes pour produire des surfaces.

8 On est au moins au niveau de l'exemple générique selon les termes de Balacheff (1988)

9 Remarquons qu'avec les nouveaux programmes ces démonstrations ne sont plus accessibles à aucun niveau du secondaire. On dispose encore des parallélogrammes et des symétries centrales pour démontrer que A'EI et AHI sont superposables ; mais il reste à voir que A'IE et BJE le sont aussi pour conclure que l'angle IEJ est droit (cf. fig.6).

* *À l'aide de la superposabilité de triangles* : l'égalité des angles en A et A' en se servant des angles droits des triangles rectangles isocèles et du carré conduit d'abord à dire que les triangles AIH et A'IE sont semblables ; l'égalité des longueurs des côtés homologues [AH] et [A'E] permet de conclure. On en déduit que I est le milieu de [AA'] et de [EH]. Il en est de même des couples de triangles homologues de sommets J, K, L. De plus le triangle EJB est superposable au triangle EA'I (angle compris entre côtés de même longueur, puisqu'on vient de démontrer que JB = IA'). On en déduit que les huit petits triangles sont superposables puis que le quadrilatère EFGH a ses côtés égaux et quatre angles droits.

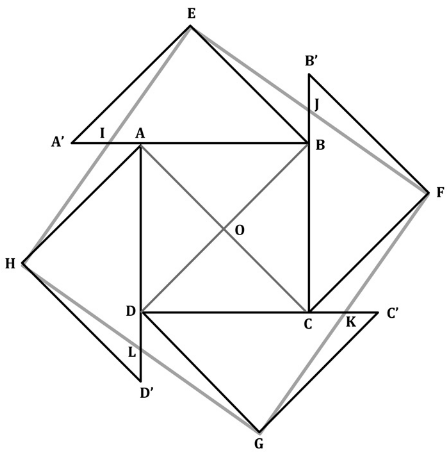


Figure 6.

* *Avec les rotations* il faut voir que la rotation de centre O qui amène A sur B, B sur C etc. amène tout le triangle A'EB sur le triangle B'FC (conservation des angles et des longueurs) (etc. pour les autres) et donc transforme E en F, F en G et donc [EF] en [FG] ce qui permet d'en déduire que les deux segments ont même longueur et sont perpendiculaires…

Cette esquisse rapide nous indique des jalons dans une progression sur la géométrie : identifier des relations entre des objets qu'on manipule, pour repérer les décompositions possibles d'une figure en éléments visuels de dimension 1 (segments) ou 0 (points) [10] en vue de la construire au moyen de tracés avec des instruments ou d'identifier ses propriétés. Elle nous montre aussi que les axiomatiques choisies pour les démonstrations ne sont pas équivalentes du point du vue du rapport entre expérience et démonstration, entre espace sensible et espace géométrique : par exemple l'usage des triangles isométriques est compatible avec une vision de la figure comme assemblage de surfaces alors que la rotation demande de considérer des points (le centre) et des lignes qui ne font pas partie de la figure et d'utiliser finement les relations entre points et droites (une droite et un segment sont définis par deux points, un point est l'intersection de deux droites ou de deux segments...). Que la finalité soit pratique ou théorique, le regard porté sur la figure joue un rôle considérable dans le raisonnement en géométrie. Nous allons l'illustrer dans les deux cas à partir d'exemples.

Changements de regard sur la figure dans la démonstration

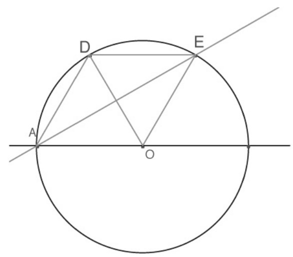
Prenons d'abord un exemple de démonstration qui pourrait être traité en quatrième ou en troisième. Le problème a été utilisé dans une recherche (Robotti, 2008) qui étudie les échanges langagiers entre élèves dans la recherche de la démonstration mais on voit aussi dans les dialogues que ce texte rapporte, l'usage que les élèves font de la figure et le lien entre l'identification d'éléments de la figure et l'appel à des définitions ou théorèmes.

10 Voir Duval (1995). Dans la suite nous dirons D1 pour dimension 1, D0 pour dimension 0.

Soit C un cercle de centre O et de diamètre [AB] et un point D sur ce cercle, tel que AD = AO.

La perpendiculaire à (DO) passant par A recoupe le cercle C au point E.

Montrer que le quadrilatère ADEO est un losange.



Examinons une des démonstrations possibles et, en italiques, les changements de regard sur la figure qu'elle suppose :

AD=AO donc A est sur la médiatrice de [DO].

Isolement du triangle isocèle ADO comme sous-figure et mobilisation d'une des définitions de la médiatrice.

Il existe une seule perpendiculaire à [DO] passant par A donc (AE) est la médiatrice de [DO].

Sous figure : triangle ADO et le segment [AE] perpendiculaire à [DO]. Mobilisation d'un axiome et de l'autre définition de la médiatrice.

E est sur la médiatrice de [DO] donc DE = EO.

Voir les deux autres côtés du quadrilatère comme joignant un point de la médiatrice aux extrémités du segment. Mobilisation à nouveau de la définition de la médiatrice en termes d'équidistance mais dans l'autre sens.

Mais [OA] et [OE] sont des rayons du même cercle donc OA = OE.

Isoler le cercle et ses rayons.

Finalement AD = AO = OE = ED

Relier les deux points de vue pour conclure en utilisant la caractérisation du losange par l'égalité des quatre côtés.

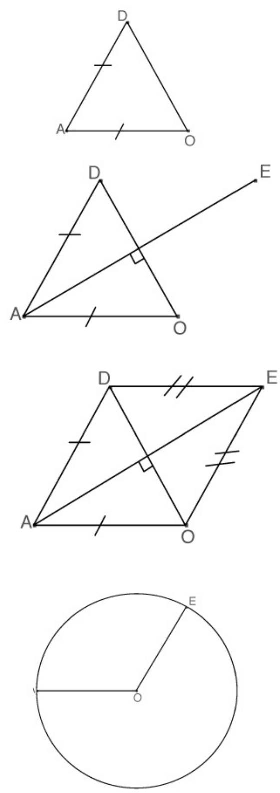


Figure 7.

Au long de la démonstration il faut voir la figure comme assemblage de plusieurs figures superposées. De plus, le recours aux théorèmes ou définitions nécessaires accompagne ces changements de regard sur la figure.

On reproche souvent aux élèves de se fier trop à la figure et d'être prisonniers des cas particuliers : Ne dit-on pas que la géométrie c'est l'art de raisonner juste sur une figure fausse ? Pourtant, il est très difficile de raisonner sur une figure qui ne respecte pas certaines propriétés visuelles. L'exemple suivant, extrait de Dehaene (1997), est assez convaincant. Je laisse au lecteur le plaisir de trouver l'erreur dans la démonstration proposée. Pour avoir donné cet exercice à de nombreux PLC2 [11] au fil des années, je sais qu'il est presque impossible pour la plupart des professeurs de mathématiques de trouver l'erreur sans refaire la figure.

Démonstration : *Soit un quadrilatère ABCD tel que les côtés AB et CD soient égaux et que l'angle $\delta = \angle BAD$ soit droit. L'angle $\delta' = \angle ADC$ est arbitraire. Nous allons pourtant prouver qu'il égale l'angle droit δ.*
Soit L la médiatrice du segment AD et L' celle du segment BC. Soit O l'intersection de L et L'. Par construction, O est équidistant des points A et D (OA = OD) et également des points B et C (OB = OC). Comme AB = CD, les triangles OAB et ODC ont des côtés égaux et sont donc semblables. Donc leurs angles sont égaux :
$\angle BAO = \angle ODC = \alpha$.
Le triangle OAD étant isocèle, on a également $\angle DAO = \angle ODA = \beta$.
D'où nous déduisons $\delta = \angle BAD = \angle BAO - \angle DAO = \alpha - \beta$; et $\delta' = \angle ADC = \angle ODC - \angle ODA = \alpha - \beta$; soit $\delta = \delta'$. Ce qu'il fallait démontrer.
Où est l'erreur ? *Réponse page 295 !*

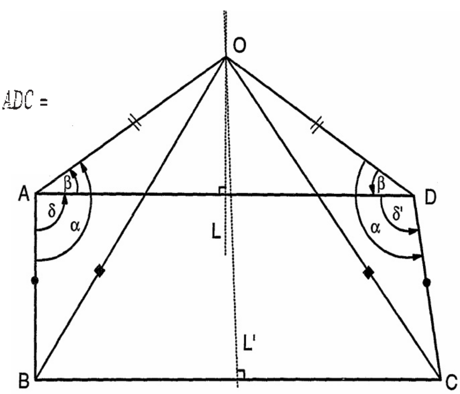


Figure 8.

Démonstration : *Soit un quadrilatère ABCD tel que les côtés AB et CD soient égaux et que l'angle $\delta = \angle BAD$ soit droit. L'angle $\delta' = \angle ADC$ est arbitraire. Nous allons pourtant prouver qu'il égale l'angle droit δ.*
Soit L la médiatrice du segment AD et L' celle du segment BC. Soit O l'intersection de L et L'. Par construction, O est équidistant des points A et D (OA = OD) et également des points B et C (OB = OC). Comme AB = CD, les triangles OAB et ODC ont des côtés égaux et sont donc semblables. Donc leurs angles sont égaux :
$\angle BAO = \angle ODC = \alpha$.
Le triangle OAD étant isocèle, on a également $\angle DAO = \angle ODA = \beta$.
D'où nous déduisons $\delta = \angle BAD = \angle BAO - \angle DAO = \alpha - \beta$; et $\delta' = \angle ADC = \angle ODC - \angle ODA = \alpha - \beta$; soit $\delta = \delta'$. Ce qu'il fallait démontrer.
Où est l'erreur ? *Réponse page 295 !*

Dans la résolution d'un problème de démonstration, il y a interaction permanente entre la figure et le discours, aussi bien pour prendre en compte les hypothèses que pour mobiliser définitions et théorèmes [12].

Faire de la géométrie demande de porter un regard spécifique sur les figures, qui n'est pas le regard qu'on porte ordinairement sur des dessins (voir notamment Duval et Godin, 2006) :

— Il faut être capable de passer d'une vision de figures juxtaposées à des figures superposées (et réciproquement), en ajoutant, effaçant des lignes…

— Il faut être capable de voir des objets de plusieurs dimensions dans les figures : des surfaces, des lignes, des points et des relations entre eux (penser à l'exemple du rectangle).

— Il faut être capable de repérer des éléments homologues d'une figure à une autre, c'est-à-dire des changements de taille, de position des éléments visuels qui constituent une figure. C'est par exemple une difficulté spécifique pour reconnaître les triangles semblables dans le cas où ils sont emboîtés avec un côté (non homologue) commun.

Duval (1995) avait déjà mis l'accent sur l'articulation entre le registre du langage et le registre des figures dans les démonstrations en géométrie. Mais les schémas et figures jouent un rôle tout aussi important dans une problématique de modélisation de l'espace sensible.

Schémas et figures dans une problématique de modélisation de l'espace sensible

Prenons d'abord un exemple au niveau CM2, extrait de la thèse de Sophie Gobert (situation « terrain et tige », Gobert, 2001), dans lequel l'interaction avec l'espace sensible est effective.

Un terrain de forme polygonale est dessiné dans la cour (rectangle pour la séance 1, quadrilatère quelconque pour la séance 4). On ne peut pas entrer dans ce terrain, on ne peut pas le survoler non plus. Une tige joint deux côtés consécutifs. Le problème consiste à déterminer la longueur de cette tige inaccessible à la mesure directe, sans faire de calcul (précision apportée dans un deuxième temps, au vu des premières procédures). Différents types « d'instruments » sont à la disposition des élèves (cordes, baguettes de bois, règles graduées, équerres de tailles diverses …).

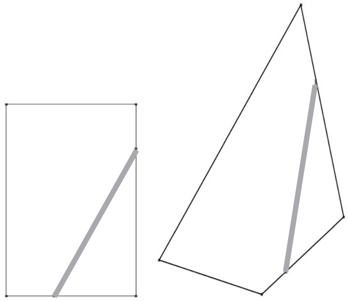


Figure 9.

Lors de la première séance, dans la cour de l'école, les élèves sont tous dans une problématique pratique. La majorité d'entre eux essaient de reporter la longueur cherchée à l'extérieur, mais en prenant des repères à l'œil, notamment pour prolonger des segments. Certains entreprennent des calculs fantaisistes à partir de mesures

11 Enseignants stagiaires de deuxième année d'IUFM entre 1991 et 2010, ayant en responsabilité une classe du secondaire.

12 Arsac le rappelait encore récemment dans son exposé au colloquium de didactique (Arsac, 2010).

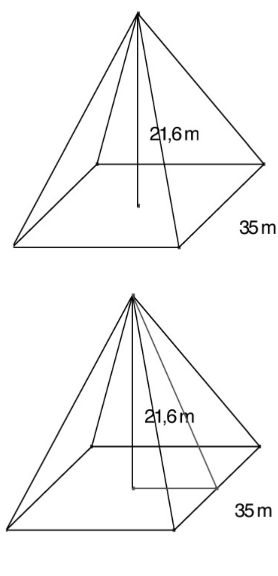
d'autres longueurs. Les deuxième et troisième séances se passent en classe sur papier. Il s'agit, dans la deuxième séance, d'expliciter ce qu'on a fait sur le terrain et, à la troisième, de prévoir ce qu'on va faire à la séance suivante avec un autre terrain.

Dans les deux environnements, le contrôle des actions et des propriétés se fait par la vue. L'usage des instruments est le même (par exemple, des élèves prolongent un segment avec leur règle sans prendre appui dessus, aussi bien sur le papier qu'avec la grande règle dans la cour). Cependant, des procédures géométriques apparaissent plus facilement dans l'environnement papier-crayon où il s'agit non plus de trouver la longueur mais de formuler des méthodes qu'on a utilisées ou qu'on prévoit de mettre en œuvre : les élèves proposent notamment de reproduire ailleurs un triangle identique ou de dessiner un triangle symétrique. Explicitées avec l'aide de l'enseignant à la séance 2 [13], les méthodes sont à adapter à la séance 3 pour tenir compte de la nouvelle forme du terrain, notamment celle recourant à la symétrie : il ne suffit plus de prolonger un segment et de reporter une longueur. Le caractère de généralité de la méthode est imposé par le fait que l'on ne dispose pas du terrain. On est ainsi dans une situation de formulation et non plus seulement une situation d'action (Brousseau, 1998). La référence à la réalisation dans la cour empêche le pliage dans le cas de la symétrie et oblige à chercher des propriétés géométriques.

On voit ici que les figures jouent un double rôle : d'une part, ce sont des schémas qui représentent la situation réelle dans la cour ; d'autre part, ce sont des figures sur lesquelles on raisonne et auxquelles on fait subir des transformations qu'il faut contrôler par des propriétés géométriques.

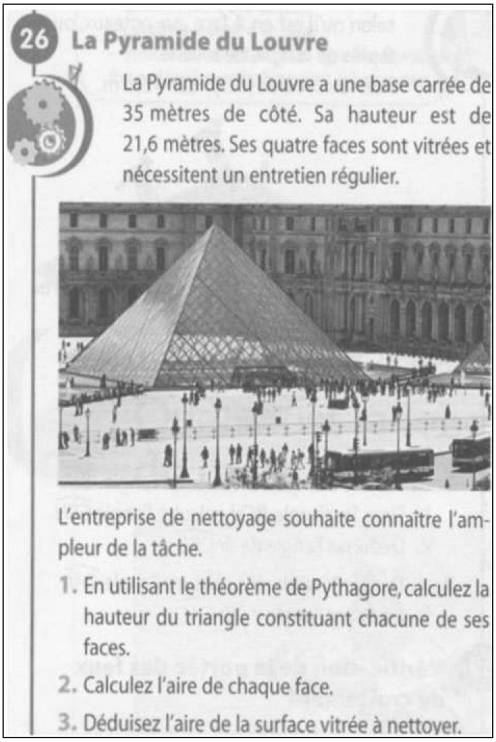
Dans l'enseignement, le milieu matériel est le plus souvent évoqué et les objets de l'espace sensible déjà représentés. Prenons l'exemple d'un exercice extrait d'un manuel de 2nde professionnelle (figure 10).

L'énoncé donne une photo de l'objet réel. Pour résoudre le problème, on est amené à faire un schéma permettant de représenter les données et la grandeur cherchée : le schéma représente à la fois la pyramide du Louvre et l'objet géométrique étudié. Les propriétés géométriques sont inférées de la connaissance de l'objet réel : le texte ne dit pas qu'il s'agit d'une pyramide régulière.



Ce sont les propriétés géométriques supposées qui permettent d'identifier dans le modèle géo-

13 Notons néanmoins qu'à la séance 2, un élève ne rentre pas dans la recherche d'une méthode géométrique générale : il veut faire un dessin à l'échelle du terrain (ce qui est une autre manière de résoudre le problème de l'espace sensible).



26 La Pyramide du Louvre

La Pyramide du Louvre a une base carrée de 35 mètres de côté. Sa hauteur est de 21,6 mètres. Ses quatre faces sont vitrées et nécessitent un entretien régulier.

L'entreprise de nettoyage souhaite connaître l'ampleur de la tâche.

1. En utilisant le théorème de Pythagore, calculez la hauteur du triangle constituant chacune de ses faces.
2. Calculez l'aire de chaque face.
3. Déduisez l'aire de la surface vitrée à nettoyer.

Figure 10.

métrique un triangle rectangle pertinent auquel on peut appliquer le théorème de Pythagore. Le calcul se fait dans le modèle (la géométrie théorique) puis s'interprète dans le monde matériel pour décider de la précision à retenir.

Le schéma joue ici un rôle d'interface entre l'objet physique et l'objet géométrique qu'il représente tour à tour.

Espace sensible,
espace graphique, espace géométrique

Nous avons vu dans le paragraphe précédent apparaître trois « mondes » distincts : le monde réel où se pose le problème qu'on cherche à résoudre, le monde géométrique qui fournit des outils théoriques permettant de résoudre un problème géométrique qui modélise le problème réel et le monde graphique dans lequel on peut produire des schémas ou figures représentant à la fois le problème physique et le problème géométrique. C'est pourquoi, nous proposons (voir aussi Perrin-Glorian et Salin, 2010), de distinguer trois espaces en interaction dans l'enseignement de la géométrie : l'espace sensible à trois dimensions, l'espace graphique des tracés plans (sur le papier ou sur un écran d'ordinateur) et l'espace géométrique. L'espace graphique est un lieu d'expérimentation aussi bien pour un problème qui se pose dans le monde physique (il peut alors servir d'interface entre l'espace sensible et l'espace géométrique) que pour un problème théorique. Nous laissons de côté les maquettes qui sont elles-mêmes des objets matériels de l'espace à trois dimensions et posent à notre avis d'autres questions.

En résumé… si on veut penser la géométrie à la fois pour développer le raisonnement et comme théorie utile pour résoudre des problèmes qui se posent dans l'espace sensible, il faut considérer l'espace graphique différemment suivant que l'on se place dans une problématique de modélisation (finalité pratique) ou dans une problématique géométrique (finalité théorique) au sens de Berthelot et Salin (2001).

Dans une problématique de modélisation, où l'on cherche à résoudre un problème posé dans l'espace sensible, les trois espaces sont en relation : La schématisation permet de faire correspondre aux données des éléments théoriques qui permettent de le modéliser (par exemple la taille n'intervient pas dans le modèle géométrique). Le schéma permet aussi de représenter des objets ou des situations de l'espace sensible, de les amener dans le micro-espace plan

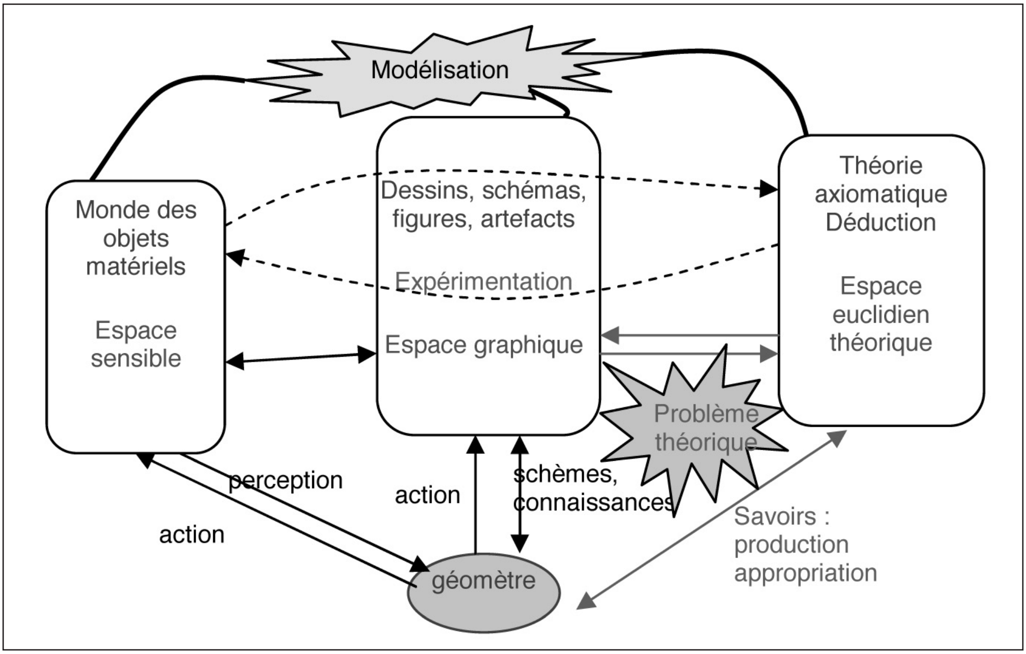


Figure 11.

de la feuille de papier. Le dessin (qui est éventuellement à refaire de ce nouveau point de vue) peut alors devenir un représentant d'un objet théorique qui permet la déduction (voir Mercier et Tonnelle, 1991). Le géomètre peut être un mathématicien, un élève, un professionnel. Suivant le cas, la finalité n'est pas la même, les savoirs ne sont pas les mêmes.

Si le problème est théorique, la figure-dessin (objet graphique) représente un objet théorique sur lequel on peut expérimenter (émettre des conjectures, les tester). C'est la partie droite du schéma qui fonctionne (figure 12).

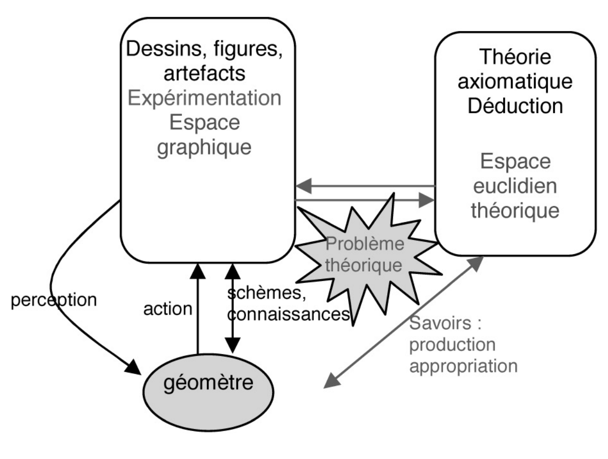


Figure 12.

L'expert (le mathématicien) qui résout un problème de géométrie contrôle un double rapport à la figure : la figure comme représentant un objet géométrique théorique, la figure matérielle sur la feuille de papier, qu'elle soit tracée à main levée, construite à la règle et au compas, sur papier quadrillé ou sur l'écran de son ordinateur avec un logiciel.

Pour cela, il doit disposer d'une appréhension opératoire de la figure, manipuler avec pertinence les sur- et sous-figures, reconnaître des configurations dans des positions variées, des tailles différentes…

L'espace graphique, par le double regard qu'il permet sur les figures-dessins est un point clé de la modélisation géométrique. Dans l'enseignement au collège, les professeurs dépensent beaucoup d'énergie à apprendre aux élèves à se méfier des figures et des mesures pour entrer dans une problématique de démonstration en géométrie. Mais est-ce que l'on n'apprend pas trop tôt aux élèves à se méfier de quelque chose d'indispensable dont l'usage n'est pas encore suffisamment construit pour eux ? Nous allons dans le paragraphe suivant réfléchir à l'évolution nécessaire de la notion de figure au long de la scolarité obligatoire.

II. — Continuité école-collège

2.1. *Comment évoluent la notion de figure géométrique et l'usage des instruments au long de l'école primaire ?*

Comme nous avons commencé à le suggérer sur l'exemple d'Abul Wafa, le regard sur les figures et ce qu'on entend par le terme « figures » doit considérablement évoluer du CP à la 6ème ou à la 3ème. Par exemple, qu'appelle-t-on rectangle à chacun des niveaux et comment passe-t-on d'une définition à une autre ? (cf. fig. 13)

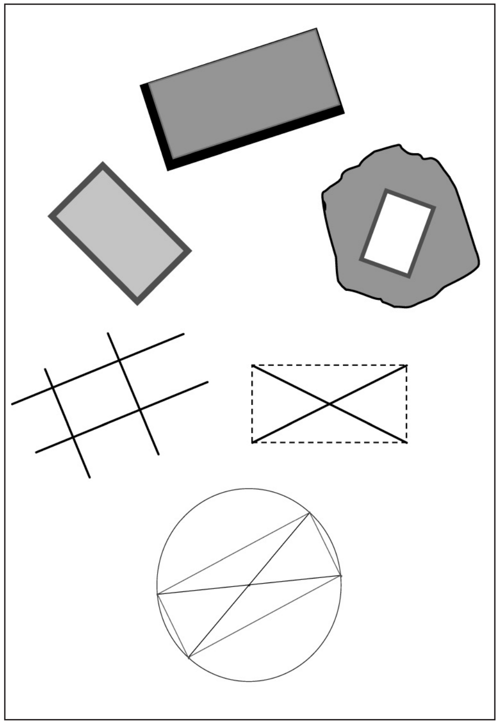


Figure 13.

Un rectangle, c'est successivement :

— en maternelle ou CP, une forme de bois ou de plastique (avec une certaine épaisseur) qu'on peut déplacer, manipuler, comparer à d'autres…

— en CP (ou GS), un contour que l'on peut tracer sur le papier avec un gabarit ou un pochoir dont on peut colorier l'intérieur… ; c'est une surface fermée ;

— au fil du primaire et au début du collège, un quadrilatère qui a quatre angles droits, des côtés opposés de même longueur, que l'on construit avec une règle graduée et une équerre puis une règle et un compas ;

Le rectangle devient ensuite simultanément

— un réseau de 4 droites (ou segments) deux à deux parallèles ou perpendiculaires ;

— des relations entre des segments (les côtés ou les diagonales) des points (les sommets, le centre), des droites (les supports des segments, les axes de symétrie) ;

— des propriétés caractéristiques (CNS), par exemple sur les diagonales.

En même temps, les instruments utilisés pour tracer le rectangle, reconstituer sa forme, évoluent et sont reliés aux différentes propriétés géométriques mobilisées. Le gabarit et le pochoir sont porteurs de la forme complète, en dimension 2. La règle ne permet que des tracés rectilignes, de dimension 1. L'équerre a des usages de niveaux différents : elle permet de produire ou de vérifier une relation entre deux éléments D1 (droites perpendiculaires), voire entre deux éléments D1 et un élément D0 (droite perpendiculaire à une autre par un point donné) mais elle permet aussi de reporter les angles droits, c'est-à-dire une partie de la forme donc des informations D2. Cependant, pour faire un angle droit avec un logiciel, on devra souvent tracer une droite perpendiculaire à une autre droite et passant par un point, c'est-à-dire mettre en œuvre des relations entre objets de dimension 1 ou 0.

Les reports de longueur peuvent se faire avec une règle graduée mais on passe alors par la mesure et les nombres. Ils peuvent se faire aussi avec une bande de papier rectiligne sur laquelle on peut écrire (ce que nous appellerons règle informable). Ils peuvent enfin se faire au compas mais c'est alors l'intersection d'un cercle et d'un segment ou d'une demi-droite que l'on trace et il est nécessaire d'identifier les points, extrémités du segment que l'on reporte.

En primaire, un des objectifs est d'apprendre à se servir des instruments de tracé classiques (règle, équerre, compas) pour tracer des figures sur le papier ; un autre est d'apprendre à décrire ces figures : tracer une figure dont on a une description ou un modèle, décrire une figure fournie pour que quelqu'un d'autre puisse la reproduire, donner un programme de construction. On insiste sur le soin à apporter aux tracés.

Cependant, les instruments usuels [14] permettent des tracés porteurs de caractéristiques visuelles qui se traduisent par des propriétés géométriques. Leur usage ne va pas de soi et il est à construire. Les observations que nous avons pu faire il y a quelques années à partir de l'analyse de productions d'élèves de fin de CM2 en réponse à des questions posées aux évaluations nationales de début de sixième montrent que la plupart des élèves du début du collège ne font pas le lien entre les propriétés géométriques et les instruments qu'ils utilisent (Offre, Perrin-Glorian, Verbaere, 2007).

Par la suite, au collège, la figure tracée n'est plus elle-même l'objet d'étude. C'est un représentant d'un objet abstrait, la figure géométrique, qui peut être en général représenté de bien d'autres façons (sauf quand on a fixé toutes les grandeurs, ce qui se passe souvent dans les premières classes du collège pour simplifier

14 Nous nous intéressons aux moyens d'aider les élèves à voir une figure come un réseau de lignes (droites et cercles) et de points. Ceci explique l'importance donnée dans nos analyses à la règle et au compas. Nous y ajoutons l'équerre qui est d'usage courant à l'école et figure dans les programmes. Une réflexion complémentaire serait à mener sur les angles qui peuvent être vus comme des morceaux de surface ou comme des relations (statiques ou dynamiques) entre droites.

la tâche du professeur). Le soin du tracé n'est plus une fin en soi : il est au service du raisonnement sur les objets géométriques que la figure tracée représente (on peut même faire des figures à main levée).

Ce changement de perspective s'accompagne d'une mobilité du regard à porter sur la figure. En effet, beaucoup de travaux l'ont montré, il y a une rupture nécessaire dans le rapport aux figures quand on les envisage du point de vue de la démonstration. Cependant, à quel moment cette rupture doit-elle se faire ? Faut-il dès le début du collège, considérer la figure d'un point de vue symbolique (codage, texte) et apprendre à se méfier de ce que disent les instruments ?

Ne peut-on envisager une construction progressive d'un point de vue théorique, appuyée sur la recherche de propriétés générales et l'enrichissement continu des connaissances théoriques ? Quelle place donner aux instruments dans la construction d'un point de vue théorique ? Quelle place donner aux mesures ? L'usage fréquent des mesures, qui fixe la figure (taille et forme), n'enlève-t-il pas de la généralité et de la richesse aux problèmes concernant les dessins géométriques ? Examinons rapidement comment la question du regard à porter sur les figures a été prise en charge par les programmes et instructions au cours des dernières décennies.

2.2. *Regard rapide sur les instructions officielles*

Les programmes des années 60 dans l'enseignement long se préoccupent peu de la géométrie enseignée à l'école primaire, le programme de sixième est essentiellement consacré aux mesures et on entre progressivement dans une géométrie axiomatique (de type Euclide) à partir de la classe de 5ème. Après la parenthèse des mathématiques modernes, on assiste plutôt à une rupture en 4ème entre une géométrie d'observation et une géométrie de démonstration (voir Laborde, 1990 par exemple). La volonté de réduire cette rupture amène d'une part à commencer l'initiation à la démonstration dès la sixième et, plus récemment, à se préoccuper de la liaison entre l'école et le collège. Ainsi, le document d'accompagnement[15] des programmes de 2002 sur l'articulation école collège aborde la transition école collège en géométrie de la façon suivante :

En primaire, l'objectif est *« d'amener les élèves à passer d'une reconnaissance perceptive des objets mathématiques du plan et de l'espace à une connaissance de ces objets appuyée sur certaines propriétés, vérifiées à l'aide d'instruments. »* Il s'agit d'une *« géométrie expérimentale (…) organisée autour de cinq grands types de problèmes : reproduire, décrire, représenter, construire, localiser. »* Les élèves sont entraînés au maniement d'instruments et à l'usage d'un vocabulaire précis mais limité. Les connaissances géométriques sont complétées par des connaissances relatives à l'espace.

En sixième, *« les élèves ne travaillent pas sur des objets nouveaux. Les travaux (…) doivent prendre en compte les acquis antérieurs, (…) stabiliser les connaissances des élèves, les structurer, et peu à peu les hiérarchiser... avec, notamment un objectif d'initiation à la déduction. Les élèves passent d'une lecture globale des dessins géométriques à une lecture ponctuelle. (…) La distinction entre dessin et figure géométrique commence à être établie. »*

Ces commentaires sont repris sous une forme proche dans l'introduction de la partie géométrie des programmes de sixième de 2005 et

15 *Articulation école collège*, document d'accompagnement des programmes de 2002 du primaire, paru en 2003.

2008. Il y est précisé de plus : *« Les travaux géométriques sont conduits dans différents cadres : espace ordinaire (cour de récréation, par exemple), espace de la feuille de papier uni ou quadrillé, écran d'ordinateur. La résolution des mêmes problèmes dans ces environnements différents, et les interactions qu'elle suscite, contribuent à une approche plus efficace des concepts mis en œuvre. »*

Le souci de la transition entre l'école primaire et le collège est donc bien présent mais on ne dit pas comment l'on peut faire passer les élèves « d'une lecture globale des dessins géométriques à une lecture ponctuelle ». Dans les programmes du collège de 2005, rédigés en trois colonnes intitulées respectivement « Contenus », « Compétences », « Exemples d'activités, commentaires », la dernière colonne est très développée mais n'explicite pas en quoi les activités en question vont aider à changer le regard sur la figure. *« Reconnaître des figures simples dans une figure complexe »* est cependant mentionné comme une compétence à acquérir. Dans les programmes de 2008, les contenus ne changent pas fondamentalement par rapport à 2005 mais leur ordre de présentation est modifié, la partie « capacités » (le terme remplace celui de « compétences ») est un peu plus développée tandis que la partie « activités et commentaires » est raccourcie.

On distingue les connaissances et compétences qui font partie du socle commun, celles qui en feront partie dans les années ultérieures et celles qui n'en font pas partie. On peut remarquer que l'acquisition de beaucoup des notions nouvelles comme angles, médiatrice, bissectrice sont reportées aux années ultérieures pour le socle. La reproduction et la construction de figures complexes sont mentionnées dans les capacités mais le fait que *« ces situations nécessitent de reconnaître des figures simples dans des figures complexes »* figure cette fois dans les commentaires tandis que, pour ces figures, le *« travail d'analyse utile aux apprentissages ultérieurs »* ne fait pas partie du socle commun.

2.3. *Quelques hypothèses*

Les analyses précédentes nous ont amenés à considérer le regard porté sur les figures et les instruments comme un point clé qu'il est essentiel de faire travailler aux élèves. C'est un point essentiel dans l'activité géométrique mais il n'est pas travaillé explicitement dans l'enseignement et nous faisons l'hypothèse que la non prise en compte dans l'enseignement des changements de regard nécessaires sur les figures est une source de difficulté pour les élèves. Par exemple, la première vision spontanée de la figure à l'école élémentaire (et encore bien plus tard) est celle d'un assemblage de surfaces juxtaposées. Les élèves ont des difficultés à discerner les figures-lignes superposées. Les professeurs se plaignent souvent du fait que les élèves se contentent dans les démonstrations de ce qu'ils voient sur la figure. Mais les élèves regardent-ils ce qu'il faut regarder ? Il ne suffit pas de voir… il faut savoir regarder une figure. Comment cela s'apprend-il ?

Nous pensons que l'usage des instruments peut être un intermédiaire entre la perception directe et l'appui sur des propriétés géométriques mais un tel usage des instruments ne va pas de soi ; il faut le construire comme tel et en interaction avec la construction du langage géométrique.

Les figures sur le papier ou sur l'écran d'ordinateur sont porteuses de caractéristiques visuelles qui traduisent des propriétés géométriques (et réciproquement) qu'on peut obtenir en utilisant des instruments (la règle et le compas notamment sur le papier, la droite et le cercle dans le logiciel), porteurs de ces propriétés géométriques-visuelles. Le lien entre l'usage de

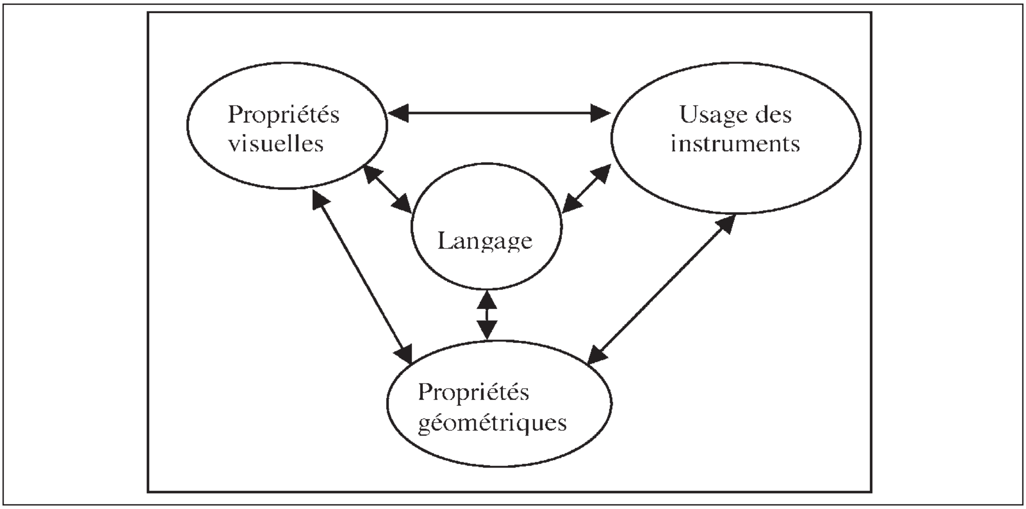


Figure 14.

l'instrument pour produire la figure, la propriété visuelle recherchée et la propriété géométrique qui la commande est à construire au cours de la scolarité. Pour cela, nous faisons l'hypothèse qu'il faut dégager les propriétés géométriques qui définissent des caractéristiques visuelles (ou liées au déplacement) des objets, non pas directement par observation des objets mais par l'émergence de relations entre des composantes visuelles de ces objets de façon à faire apparaître progressivement la déconstruction dimensionnelle.

De plus, parallèlement, il faut construire un langage pour décrire les figures géométriques et leurs déplacements. Ce langage utilise un vocabulaire spécifique mais il est construit sur le langage naturel qui sert aussi à décrire les propriétés visuelles des figures et l'usage des instruments ainsi que les objets du monde matériel qu'il s'agit éventuellement de modéliser.

L'articulation de ces différents éléments nous paraît centrale dans l'apprentissage de la géométrie et elle ne va pas de soi pour beaucoup d'élèves. Notre projet est donc de partir d'une vision naïve et immature de la figure, telle que peut l'avoir un enfant 5 ou 6 ans et de la faire évoluer pour intégrer des regards géométriques sur la figure, à l'instar d'Euclide qui produit une théorie exprimée en termes de points et lignes pour rendre compte de propriétés des surfaces ou des objets physiques de l'espace indépendamment de leur position dans l'espace. Mais c'est la démarche inverse de celle qu'expose Euclide qu'il nous faut produire : partir des surfaces pour en dégager des points et des lignes dont les relations permettent de les caractériser.

La manière de produire une figure et les instruments (au sens courant et large) utilisés pour le faire seront pour nous de la première importance. Utiliser un instrument plutôt qu'un autre peut nécessiter un changement de regard sur la figure. Pluvinage et Rauscher (1986, p.7) défendaient une « géométrie construite » où une figure effective est envisagée comme le résultat d'un programme de tracé dont on se demande comment il a été obtenu ou qu'on cherche à reproduire. De même, nous utilisons la production et la reproduction de figures comme sources de problèmes. Celles-ci nous paraissent fournir un milieu riche susceptible de favoriser l'évolution du regard sur la figure en même temps que le développement des concepts, du vocabulaire et du raisonnement géométriques à condition de jouer sur les variables des problèmes qui peuvent s'y poser (figures, instruments, règles du jeu de la reproduction, voir Godin et Perrin-Glorian, 2009). Nous faisons de plus l'hypothèse que l'approche des figures en utilisant des grandeurs sans mesure (le report de longueur est utilisé mais pas les nombres), outre le fait qu'elle écarte les difficultés liées au calcul sur des nombres décimaux, facilite l'entrée dans une problématique géométrique.

2.4. *Un moyen de faire évoluer le regard sur la figure : le jeu sur les instruments dans la restauration de figures*

Les hypothèses que nous venons d'expliciter nous ont amenés à étudier plus particulièrement un type de situation que nous avons appelé *restauration de figure*. Il s'agit de reproduire une figure partiellement effacée dont on dispose d'un modèle qui n'est pas nécessairement de la même taille. On dispose aussi d'une amorce de la figure à reproduire (ce qui n'a pas été effacé) et d'instruments (en un sens large, comme nous l'avons indiqué plus haut : les gabarits ou le papier calque sont des instruments). Nous avons explicité ailleurs la problématique de la restauration de figure et donné des exemples (Duval, Godin, Perrin-Glorian, 2005 ; Keskessa, Perrin-Glorian, Delplace, 2007, Godin, Perrin-Glorian, 2009). Nous nous contenterons ici de rappeler quelques caractéristiques de ces situations puisque d'autres exemples en seront donnés dans la troisième partie à propos de la symétrie.

Nous parlons de restauration plutôt que de reproduction dans le cas où l'on dispose d'éléments 2D : soit l'amorce contient une partie 2D de la figure [16], soit un instrument permet des reports 2D (calque, équerre), soit c'est le support qui le permet (quadrillage). Les variables de ces situations, qui sont des variables didactiques au sens de la théorie des situations didactiques [17] (Brousseau, 1998), sont : le choix de la figure, le choix de l'amorce, les instruments disponibles.

De plus, pour favoriser certains procédés de construction plutôt que d'autres et donc le recours à certaines connaissances, plutôt que d'imposer une restriction sur les instruments disponibles, on peut laisser tous les instruments à disposition mais attribuer un *coût* à leur usage (élément de la règle du jeu de la reproduction). Les élèves peuvent ainsi utiliser des procédures de base qui leur assurent une réussite dans la reproduction mais, en jouant sur le coût attribué à ces instruments, on peut faire évoluer les connaissances dont ils disposent (réussir la reproduction avec un moindre coût). Une autre variable importante de ces situations sera donc la *règle du jeu* de la restauration et, en particulier, le coût attribué aux instruments. Nous allons préciser tout ceci dans le cas particulier de la symétrie orthogonale.

III. — L'exemple de la symétrie orthogonale

Dès leur plus jeune âge, les élèves rencontrent, dans des situations diverses (en

16 Une ligne brisée, un angle sont considérés comme éléments 2D : ce sont des bords de surface et ils portent des informations dans deux directions.

17 C'est-à-dire que les choix faits à ce niveau ont des effets sur les connaissances nécessaires à la réussite dans la résolution du problème

arts visuels, en classe de mathématiques, en dehors de l'école), des objets de l'espace physique ou des modélisations de ces objets présentant des axes de symétrie. Un certain nombre de travaux en psychologie, cités par Bulf [18] (2008, p.16-22) pointent même « les effets possibles du concept de symétrie sur la perception des figures » en mettant en évidence que « la symétrie n'est pas un facteur quelconque dans l'action de percevoir. [...] La symétrie fait partie de notre environnement quotidien et donc de notre expérience première ; elle organise une figure en mettant en relation les éléments de celle-ci, et pourrait agir comme un stimulus au processus de traitement de l'information. » (Bulf, 2008, p.16). Toutefois, la symétrie axiale ne figure explicitement dans les Instructions Officielles [19] de l'école primaire (sous la forme « axe de symétrie ») qu'à partir de la dernière année de cycle 2 (CE1).

D'après les Instructions Officielles actuelles les élèves, à la fin de l'école primaire, doivent être capables de « reconnaître qu'une figure admet un ou plusieurs axes de symétrie, par pliage à l'aide de papier calque », « tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée, et « compléter une figure par symétrie axiale » (sans précision des instruments, mais notre connaissance des pratiques usuelles nous permet de considérer qu'il s'agit là d'un travail avec du papier calque ou du papier quadrillé).

Le programme actuellement en vigueur au collège stipule que les élèves de sixième doivent savoir « construire le symétrique d'un point, d'une droite, d'un segment, d'un cercle (que l'axe de symétrie coupe ou non la figure) », « construire ou compléter la figure symétrique d'une figure donnée ou de figures possédant un axe de symétrie à l'aide de la règle (graduée ou non), de l'équerre, du compas, du rapporteur » et « effectuer les tracés de l'image d'une figure par symétrie axiale à l'aide des instruments usuels (règle, équerre, compas) ». « Le rôle de la médiatrice comme axe de symétrie d'un segment est mis en évidence » [20]. Ces mêmes Instructions Officielles précisent que « dans la continuité du travail entrepris à l'école élémentaire, les activités s'appuient encore sur un travail expérimental (pliage, papier calque) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles sont dégagées les propriétés de « conservation » de la symétrie axiale (conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires) »

De l'école au collège, les élèves sont donc censés passer d'une reconnaissance perceptive de la symétrie orthogonale à des activités de production ou de vérification mobilisant, au cycle 3, l'usage de papier calque, de techniques de pliage ou l'usage de papier quadrillé puis, au début du collège, de la règle, de l'équerre, du compas et du rapporteur. L'enseignement de la symétrie orthogonale nous paraît donc un lieu favorable au questionnement du lien entre l'usage des instruments pour l'action sur les objets matériels, figures découpées ou tracées, les propriétés visuelles recherchées et les propriétés géométriques qui les modélisent. Quelles connaissances met-on en jeu à l'école primaire pour produire ou vérifier la symétrie orthogonale avec du papier calque par retournement

---

18 Rock I. & Leaman R. (1963), An experimental analysis of visual symmetry, *Acta Psychologica*, 21, 171-183 ;. Corballis M.C. & Roldan C.E. (1975) Detection of Symmetry as a Function of Angular Orientation, *Journal of Experimental Psychology: Human perception and Performances*, 1(3), 221-230 ; Palmer S.E. (1985) The role of symmetry in shape perception, *Acta Psychologica*, 59, 67-90.

19 Bulletin Officiel de l'Education Nationale (B.O.E.N.) hors série n°3 du 19 juin 2008 pour le primaire et B.O.E.N. hors série n°6 du 28 août 2008 pour le collège

20 Mais ce point ne figurera au socle commun que dans les années ultérieures.

ou pliage ? Quelles connaissances met-on en jeu en Sixième pour vérifier ou produire des figures symétriques avec la règle, l'équerre, le compas. Comment penser une progression qui permette de passer des unes aux autres ?

En appui sur un exemple, nous proposons d'analyser d'un peu plus près le lien entre instruments et rapport à la figure ainsi qu'aux propriétés de la symétrie orthogonale, du CE2 à la sixième. Nous illustrerons ensuite, à travers deux exemples, la façon dont nous pensons qu'il est possible, par le biais d'un jeu sur les instruments, d'accompagner les élèves dans l'évolution de leurs connaissances, dans la transition école-collège.

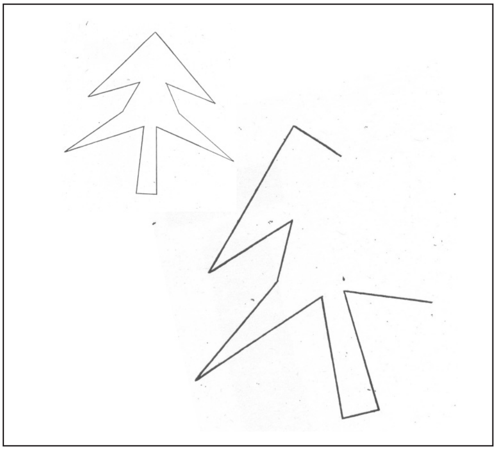


Figure 15.

3.1. *Penser l'enseignement de la symétrie orthogonale dans une continuité, de l'école au collège*

Un exemple de situation de restauration de figure

La situation de restauration de figure que nous présentons dans la suite de ce texte a été expérimentée dans des classes, du CE2 à la Sixième. Nous en donnons ici une rapide analyse *a priori* permettant de suggérer comment le jeu sur les variables didactiques peut s'adapter aux connaissances des élèves et les faire évoluer.

La consigne est la suivante :

Compléter la figure pour reconstituer le sapin complet (figure 15).

Le modèle du sapin complet et la figure à restaurer sont représentés à des échelles différentes, afin d'éviter la possibilité de reports de longueur de la figure modèle à la figure à compléter. L'axe de symétrie du sapin à compléter est oblique, de façon à ce que les élèves ne puissent plier la feuille « bord à bord » pour retrouver l'axe de symétrie de ce sapin.

Ce sont des variables didactiques du problème. Imaginons que nous ayons à notre disposition tous les instruments de géométrie, pris au sens large d'artefacts permettant la réalisation matérielle de la figure et à l'exclusion des instruments de mesure : une règle non graduée, un instrument de report de longueur (règle informable), une équerre, un compas, du papier calque, du papier, des ciseaux, etc.

Une rapide analyse *a priori* de la situation, corroborée par l'expérimentation dans plusieurs classes, nous permet de dégager différentes stratégies qu'il est possible de développer pour restaurer ce sapin et qui demandent la mise en œuvre de connaissances différentes. Nous en recensons ici quelques unes. Pour chacune d'elles, nous interrogerons le lien entre les instruments mis en jeu pour l'action sur la figure, le mode d'appréhension de la figure sous-jacent et les propriétés géométriques implicitement mises en œuvre.

1- Restauration de l'allure générale du sapin à l'aide d'une règle ou à main levée : Il est bien sûr envisageable de compléter la figure en se référant à l'allure générale du sapin. La figure est alors perçue comme une surface délimitée par son bord. On ferme la surface de façon à ce que le bord soit à peu près « pareil de chaque côté ». Une vérification consistant à superposer la figure complétée sur un papier calque à la figure obtenue permettra de poser des contraintes de précision sur la figure à restaurer et amènera à remettre en question ce type de procédure.

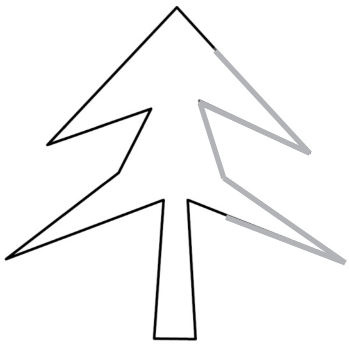


Figure 16.

2- Utilisation d'un gabarit : Si on dispose de deux feuilles portant la figure tronquée, on peut découper l'une d'elles pour obtenir un gabarit de la figure tronquée. On peut vérifier le découpage en superposant le gabarit à la figure tronquée de la seconde feuille puis utiliser le gabarit pour terminer le sapin : on le retourne en faisant coïncider les pointes et les troncs des sapins et on trace les bords manquants. On reste dans ce cas dans une perception globale de la figure en termes de surface ou de juxtaposition de surfaces. Les lignes sont vues comme les bords fermant cette surface.

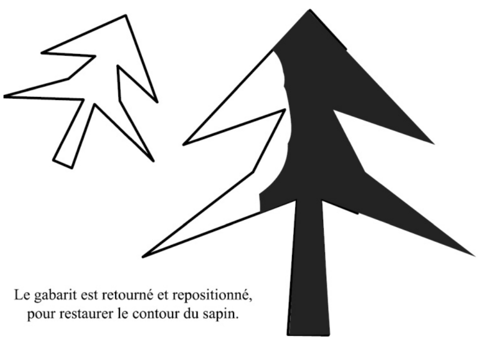


Figure 17.

Toutefois, alors que la notion de symétrie axiale se traduisait dans la première procédure à travers la propriété « pareils de chaque côté », elle s'exprime ici dans l'action par le retournement de la surface du gabarit : « pour produire des bords qui soient pareils des deux côtés, il faut retourner la surface et tracer ses bords de l'autre côté. » Implicitement, la figure est donc symétrique si elle se superpose avec sa retournée. Remarquons qu'il faut de plus avoir pris des repères (segments ou points) pour poser correctement le gabarit. Ce moyen de production d'une figure symétrique ou de la figure symétrique d'une figure par rapport à un axe donné nécessite le passage par l'espace.

3- Pliage de la feuille : Si on ne dispose pas de gabarit, on peut utiliser le pliage pourvu que le papier soit suffisamment transparent (sinon il faudra joindre le découpage au pliage). Deux façons de plier sont à considérer : on peut identifier d'abord la position de l'axe et plier selon cet axe (difficile à réaliser précisément pour des élèves de CE2) ; on peut aussi superposer deux parties de la figure (surfaces, lignes ou points) que l'on identifie de façon perceptive comme devant se correspondre par pliage (les deux moitiés du tronc, du haut du sapin) puis lisser la feuille de papier.

Pour compléter le sapin, on peut ensuite procéder par découpage ou exploiter la transparence du papier. Cette procédure met en œuvre la connaissance suivante : Une figure est symétrique si elle se décompose en deux sous-figures se superposant exactement par pliage le long d'une droite (l'axe de symétrie de la figure). Le pliage nécessite lui aussi un passage par l'espace.

4- Utilisation du retournement (à l'aide d'un papier calque) : Deux types de stratégies utilisant le retournement peuvent être envisagés. Il est possible de calquer l'intégralité de la figure « grignotée » puis de retourner le calque et de le reposer de façon à obtenir une figure symétrique. La procédure est à rapprocher de celle utilisant un gabarit. Se pose, comme pour le gabarit, la question de savoir comment poser le calque retourné.

On peut aussi ne reproduire qu'une demi-figure et la retourner, décomposant alors le sapin en deux demi-figures dont l'une est l'image de l'autre par symétrie axiale. La procédure se rapproche du pliage mais soulève à la fois les questions qui se posent dans le cas du pliage et celles qui se posent dans le retournement : quelle est la demi-figure à isoler ? Où s'arrêter ? (La question est en particulier inéluctable à propos du pied du sapin). Comment replacer la demi-figure après retournement ?

Y répondre de façon satisfaisante suppose de voir que certains points (par exemple le sommet, le milieu du pied du sapin) appartiennent à l'axe de symétrie et sont invariants par la symétrie axiale en jeu ou que certains couples de points s'échangent.

Par l'action, on distingue ici trois figures : la figure complète (figure symétrique), la demi-figure dégagée à partir de l'amorce et la retournée de cette demi-figure. Ces deux demi-figures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un axe.

5- Utilisation d'une règle, d'un instrument de report de longueurs et de propriétés de conservation de longueurs et d'alignement : Cette procédure consiste à compléter d'abord les deux branches commencées en reportant une longueur. Pour terminer ces branches, on peut d'abord tracer l'axe de symétrie (en prolongeant les droites supports des branches basses et en joignant l'intersection au sommet), on peut alors terminer la branche du haut en joignant l'extrémité à l'intersection avec l'axe du prolongement du segment symétrique puis en faisant un report de longueur. Les deux segments manquants peuvent alors être obtenus en prolongeant leurs symétriques jusqu'à l'axe et en joignant à l'extrémité du segment qu'on a déjà obtenue. On peut aussi ne faire qu'un prolongement jusqu'à l'axe et un report de longueur de plus.

Cette procédure met en œuvre, au moins de façon implicite, les propriétés suivantes portant sur des relations entre segments, droites et points :

— La symétrie axiale conserve les longueurs des segments.

— L'image d'une droite qui coupe l'axe est une droite qui coupe l'axe au même point.

— La symétrie axiale laisse invariant tout point de l'axe de symétrie.

Elle suppose donc la capacité des élèves à passer d'une vision de la figure en termes de surface(s) à sa décomposition en réseau de lignes et de points, ce qui demande de prolonger les segments pour faire apparaître les droites qui en sont le support.

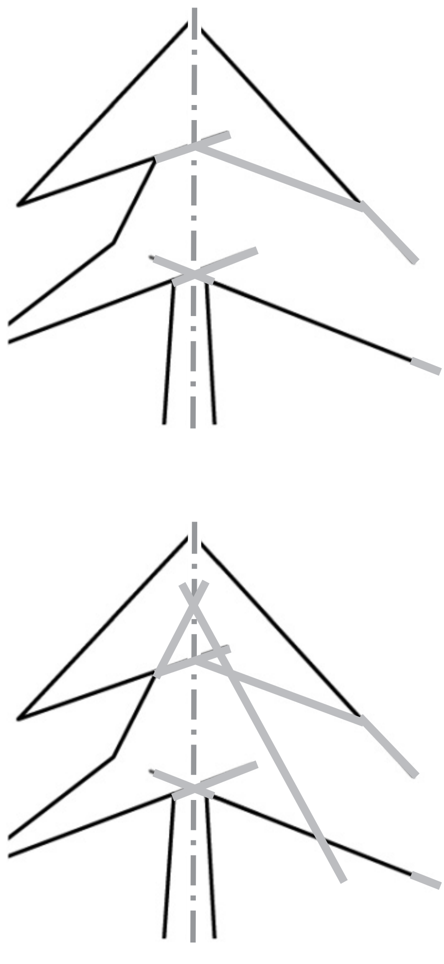


Figure 18.

Contrairement à toutes les procédures précédentes qui nécessitaient un passage par l'espace, cette procédure ne nécessite pas de sortir du plan : la symétrie axiale est ici une transformation du plan qui porte sur des droites et des segments.

6- Utilisation d'une règle, d'une équerre et d'un instrument de report de longueur : Cette procédure repose sur l'identification de l'axe de symétrie de la figure (comme dans la procédure précédente) et la construction de l'image de points. Elle nécessite donc la mobilisation au moins implicite des propriétés suivantes :

— La symétrie axiale laisse invariant tout point de l'axe de symétrie.

— Deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite (d) si (d) est la médiatrice du segment [AA'].

Cette procédure suppose une vision ponctuelle de la figure, c'est-à-dire la déconstruction de la figure en un réseau de points, vus comme intersections de lignes. Elle ne nécessite pas de passage par l'espace : la symétrie est ici une application du plan dans lui-même qui porte sur des points.

Les premières procédures, y compris le pliage ou le retournement d'un calque, sont compatibles avec une vision de la figure comme une surface ou une juxtaposition de surfaces délimitées par des bords. Cependant, elles permettent aussi, sous certaines conditions, de faire apparaître la correspondance de segments ou de points (exemple pliage segment sur segment), amenant à isoler les segments délimitant la surface du sapin et donc à décomposer la figure en un réseau de lignes, voire à isoler certains points, vus comme extrémités ou points particuliers de lignes (le sommet, le milieu du pied du sapin, les sommets des branches). La sixième procédure, reposant sur la construction de l'image de points par une symétrie axiale, est sans doute assez proche de celle que nous, enseignants, mettrions en œuvre pour résoudre ce problème. C'est la procédure visée par les enseignants de collège. La cinquième procédure repose de façon essentielle sur les alignements et les propriétés de conservation de la symétrie ; elle correspond donc aussi aux objectifs de la sixième. Son utilisation peut être attendue si les élèves ont travaillé les alignements et les prolongements de segments.

L'exemple de la restauration du sapin nous montre donc que la symétrie orthogonale, peut à l'école puis au collège, s'incarner dans une pluralité de définitions et propriétés, en fonction de la nature des objets manipulés (surfaces, bords, lignes, points) et de la nature des actions matérielles effectuées. Une figure symétrique sera par exemple appréhendée comme une figure se superposant avec sa retournée, si l'on utilise du papier calque, sans plier, ou comme une figure se décomposant en deux sous-figures se superposant après pliage le long d'un axe. Ces deux définitions sont compatibles avec une appréhension de la symétrie orthogonale comme une transformation portant sur des surfaces et nécessitant un passage par l'espace. L'usage des instruments, en particulier équerre, compas, demande la mise en œuvre de procédures consistant en la construction de l'image de points ou de segments. Il repose sur une vision toute autre de la symétrie orthogonale et de la figure comme associant des points du plan, sans passage par l'espace. Considérer l'ensemble de ces procédures nous montre ainsi le chemin à parcourir pour entrer dans la géométrie du collège qui demande un saut considérable dans la façon d'appréhender la figure, d'une vision spontanée de la figure comme juxtaposition de surfaces délimitées par des lignes, dont on vérifie par exemple la superposition par pliage, à la déconstruction de ces figures en réseaux de lignes et de points liés par des propriétés géométriques telles que l'égalité de longueurs, la perpendicularité ou l'équidistance à l'axe. Cet exemple nous montre aussi qu'il existe un lien direct entre le matériel utilisé [21] et non seulement la manière de percevoir la figure mais aussi les propriétés géométriques mises en œuvre.

Des pistes pour une progression du début de l'école à la fin du collège

Les élèves du début du cycle 3 entrent spontanément dans les activités de géométrie en adoptant une vision des figures en termes de surfaces, comme nous le faisons en dehors des mathématiques. Ceci est d'autant plus vrai dans le cas de la symétrie orthogonale dont les élèves ont une connaissance intuitive et perceptive très forte : dès le début de l'école primaire, les élèves peuvent déterminer de façon perceptive et implicite qu'une figure est symétrique et localiser son axe de symétrie, qu'ils vérifient par pliage. Mais ce qui, d'emblée, est reconnu comme une forme à deux dimensions ne se décompose pas perceptivement en un réseau de formes à une dimension, voire de dimension zéro (Duval et Godin, 2006). Penser l'enseignement de la géométrie, dans une continuité du début de l'école primaire à la fin du collège suppose donc de prendre en compte la nécessaire évolution du regard sur les figures (voir paragraphe 2.1) en particulier du CE2 à la fin de la sixième.

Le problème de restauration du sapin a permis d'illustrer une hypothèse fondamentale sous-tendant notre travail : la façon dont les élèves utilisent les instruments pour leurs actions sur les figures est étroitement liée à leur mode de vision de la figure, vision en termes de surfaces, de lignes ou de points. Ainsi, donner aux élèves l'accès à des instruments de type « 2D » [22] (le gabarit, le papier calque) permet de prendre en compte la perception spontanée de la figure en termes de surfaces. Encourager dans le même temps l'utilisation des instruments de type « 1D » (la règle, la règle informable) ou permettant d'établir des relations entre des éléments 1D ou 0D (l'équerre, le compas) est nécessaire pour les accompagner vers la déconstruction de la figure en un réseau de lignes et de points. Une autre hypothèse fondamentale de notre travail est en effet qu'en jouant sur des variables didactiques des problèmes qu'on leur propose, en particulier les instruments disponibles, il est possible d'accompagner les élèves vers l'acquisition de la mobilité du regard nécessaire à la mise en œuvre de propriétés géométriques portant sur des lignes, des points, telle qu'attendue au collège. Dans l'élaboration d'activités pour la classe, nous nous attacherons donc à penser à la fois la nature des objets matériels choisis mais aussi des contraintes sur les instruments [23] (gabarit, calque, règle) à disposition des élèves.

21 Nous pourrions envisager d'autres instruments comme la fausse équerre qui est un instrument de report des angles donc instrument 2D (morceau de surface) ou relation entre 2 éléments 1D (les côtés). Le choix des instruments est lié aux propriétés visées. La fausse équerre facilite la reproduction mais incite à rester sur la vision surface du sapin ou à le voir comme un contour. Il faudrait lui mettre un coût très élevé par rapport à la règle si nous voulons encourager les élèves à prolonger les segments pour s'intéresser à l'intersection de leur support avec l'axe de symétrie.

22 Voir Offre, Perrin, Verbaere (2007) pour une analyse de l'usage des instruments de géométrie à l'articulation CM2-6ème.

23 En termes de théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), il s'agit de définir le milieu de la situation et la règle du jeu proposé aux élèves.

Mise en œuvre en classe : coût sur les instruments

Pour prendre en compte la perception spontanée de la figure par les élèves, tout en les accompagnant vers une mobilité du regard sur la figure et l'utilisation des propriétés géométriques, nous proposons de donner aux élèves la possibilité d'entrer dans le problème avec leurs connaissances initiales en laissant tous les instruments disponibles mais d'introduire un coût sur les instruments les incitant à faire évoluer leurs procédures et produire de nouvelles connaissances (voir paragraphe 2.4). Le choix du coût des instruments est une variable centrale de la situation que nous adaptons en fonction du niveau considéré et des propriétés visées, au regard de la progression dans laquelle s'insère la mise en place de l'activité. Suivant le système de coût choisi, l'enseignant peut encourager les élèves à utiliser soit le pliage soit le retournement suivant la définition qu'il veut faire émerger.

Au début du cycle 3 par exemple, l'enseignant peut mettre à disposition des élèves tout instrument de géométrie qui lui est familier, excepté les instruments de mesure (papier calque, différents gabarits, ciseaux, règle, règle informable….) Chaque élève sera alors en mesure de proposer une procédure pour la résolution du problème, sans se trouver bloqué par la recherche de la « méthode attendue ». Toutefois, l'enseignant peut poser les contraintes suivantes : l'utilisation d'un gabarit coûte 50 points, l'utilisation d'un pliage coûte 50 points, l'utilisation du papier calque coûte 20 points, l'utilisation de la règle coûte 5 points. La validation de la production par superposition avec la figure complète sur papier calque permettra de poser des contraintes de précision et amènera les élèves à faire évoluer la procédure 1, « à main levée ».

En fin de CM2 ou en sixième on pourra poser le système de coûts des instruments suivant : le pliage coûte 50 points, le papier calque 50 points, l'équerre 10 points, effectuer un report de longueur coûte 2 points, utiliser la règle pour prolonger ou tracer un segment est gratuit. L'enseignant oriente alors les élèves vers l'identification de l'axe de symétrie, et la mise en œuvre des propriétés concernant les droites et leur intersection avec l'axe de symétrie ainsi que la conservation des longueurs.

L'introduction d'un coût à l'utilisation des instruments permet donc la réussite par des procédures diverses qui demandent plus ou moins de connaissances géométriques mais incite à utiliser certains instruments plutôt que d'autres et donc à développer des connaissances géométriques pour obtenir les effets graphiques voulus avec des instruments dont l'utilisation est moins immédiate à partir des connaissances anciennes des élèves. En modifiant le barème relatif aux instruments de tracé on peut donc agir sur les procédures de tracé des élèves.

Le choix de la figure modèle et de l'amorce constitue bien sûr également une variable didactique fondamentale de la situation car il définit la nature des propriétés géométriques potentiellement nécessaires à la restauration de la figure.

3.2. *Produire de la symétrie par retournement. Déterminer l'axe de symétrie*

Nous allons maintenant voir un autre exemple de situation qui consiste dans un premier temps à produire de la symétrie par le retournement. La recherche d'un axe de symétrie (comment plier pour vérifier ?) incite à passer d'une appréhension globale de la symétrie d'une figure à l'identification de points particuliers qui coïncident avec leur retourné. On approche ainsi la notion de point invariant et on fait un pas dans le passage d'une appréhension globale de la symétrie d'une figure à une appréhension ponctuelle de celle-ci. Cette problématique est un enjeu important en fin de cycle 3 et pour la classe de sixième où les premières propriétés de la symétrie axiale sont formalisées. Considérons d'abord le problème du point de vue mathématique, par exemple avec la figure ci-contre « toute arrondie », que, par commodité, nous nommerons dans la suite « serpentin ». Avec du papier calque on peut reproduire la figure et voir si elle coïncide ou non avec sa retournée (la figure qu'on peut voir de l'autre côté du calque).

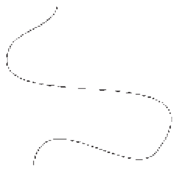


Figure 19.

On choisit un serpentin non symétrique (qui ne coïncide donc pas avec son retourné) et on se pose la question de savoir où placer la figure retournée pour que la réunion de la figure initiale et de sa retournée donne une figure symétrique. Précisons que notre choix d'une figure « toute arrondie » est motivé par la volonté d'imposer le recours au calque et la nécessité de chercher une coïncidence possible entre la figure initiale et sa retournée.

— Si on place la retournée n'importe où sur la feuille, on n'a pas une figure symétrique.

Nous rencontrons ici un savoir important sur la symétrie en tant que transformation à la fois très prégnant dans les productions des élèves et très peu pris en compte par les enseignants. En effet, deux figures dessinées sur une feuille peuvent être chacune la retournée de l'autre sans être symétriques l'une de l'autre puisque la correspondance la plus générale entre une figure et sa retournée est la symétrie glissée.

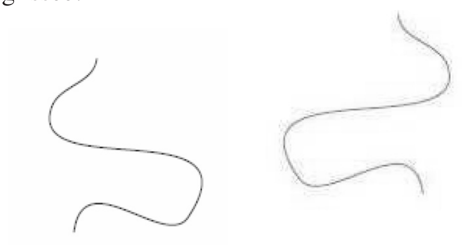


Figure 20.

Autrement dit, la symétrique d'une figure par rapport à un axe est une retournée de cette figure, mais une retournée de cette figure n'est pas toujours une symétrique de cette figure (on ne peut pas toujours trouver d'axe tel que la figure et sa retournée soient symétriques l'une de l'autre par rapport à cet axe).

Pour obtenir une figure symétrique, il est nécessaire de faire glisser la retournée sur la feuille jusqu'à faire coïncider un point de la figure initiale avec le point correspondant de la retournée (Fig. 21).

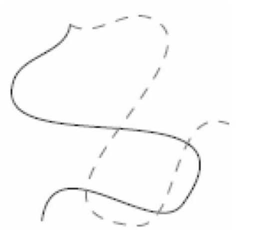


Figure 21.

Le point en question peut être un point extérieur à la figure initiale qu'on a d'abord enrichie de ce point (ici H) qui sera un point de l'axe de symétrie (Fig. 22).

Par ces manipulations, à ce stade nous entrevoyons une vision ponctuelle qui se mêle à la vision globale de la figure initiale, de la retournée ainsi que de la figure finale (comme figure complexe issue de deux figures simples).

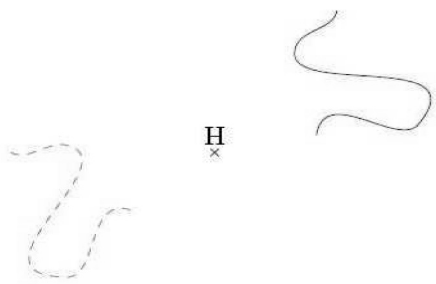


Figure 22.

Nous pouvons ainsi produire une infinité de figures symétriques. D'ailleurs, on peut vérifier que les figures précédentes sont symétriques soit en décalquant la totalité de la figure ainsi construite et en vérifiant que sa retournée se superpose avec elle-même, soit en repérant deux couples de points homologues et en pliant pour les faire coïncider. La deuxième procédure permet d'identifier l'axe de symétrie. La déconstruction de la figure au sens de Duval (2005) peut se poursuivre en proposant de déterminer l'axe de symétrie de la figure finale mais cette fois-ci sans pliage. Cette détermination s'effectue par la considération de points particuliers.

Si les deux serpentins se coupent, les points d'intersection peuvent être des points de l'axe de symétrie.

S'il y a plusieurs points de ce type, l'axe de symétrie est facilement identifiable (Fig. 23). Cependant les points d'intersection peuvent aussi ne pas faire partie de l'axe de symétrie : on a alors deux tels points symétriques par rapport à l'axe (Fig. 24).

S'il n'y a qu'un point d'intersection sur l'axe, la direction de l'axe peut être fixée par la considération d'un couple de points homologues dont on prend le milieu (Fig. 25).

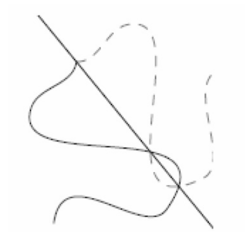


Figure 23.

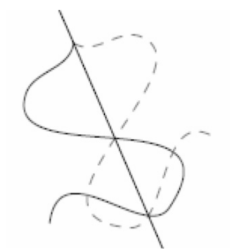


Figure 24.

S'il n'y a pas de point d'intersection, il faut soit prendre deux couples de points homologues et déterminer le milieu des deux couples de points homologues (Fig. 26), soit déterminer le milieu d'un couple de points homologues et considérer l'orthogonalité (Fig. 27).

Pour poser ce genre de problème à des élèves, on peut inscrire le serpentin dans une forme qui a plusieurs symétries évidentes, par exemple un cercle, un triangle équilatéral ou un carré (fig. 28 à 31). Le respect des symétries de la figure circonscrite limite les manières de placer la figure retournée. La figure montre aussi deux exemples (fig. 30 et fig. 31) pour lesquels on a trois points d'intersection des serpentins mais un seul sur l'axe de symétrie.

Figure 25.

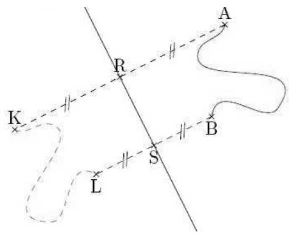


Figure 26.

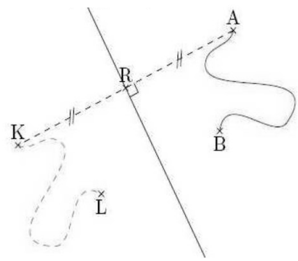


Figure 27.

On peut ainsi construire à partir de cet exemple des situations de classe qui permettent de faire rencontrer aux élèves la nécessité du passage de la vision de la symétrie comme retournement complet d'une figure à celle de correspondance entre points.

Ces situations permettent d'identifier les propriétés de la symétrie dans l'action. C'est aussi l'occasion de faire émerger les formulations attendues en classe de sixième (équidistance, orthogonalité, points invariants, point image, axe passant par deux points).

3.3. *Questions pour une progression sur la symétrie axiale du CP au collège*

A travers les deux exemples présentés ci-dessus, nous avons voulu illustrer le problème posé dans la première partie de l'articulation entre des manipulations sur du matériel et la formulation de propriétés mathématiques portant sur des objets géométriques abstraits. D'autres questions se posent à propos de la symétrie axiale, par exemple l'emploi du mot symétrique dans les expressions « la figure est symétrique » qui équivaut à « la figure a un axe de symétrie » (propriété d'une figure) et « les figures F et F' sont symétriques par rapport à la droite (d) » (relation entre deux figures). Les premières approches de la symétrie au début du primaire abordent plutôt la production ou la reconnaissance de la symétrie d'une figu-

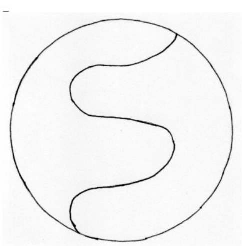


Figure 28.

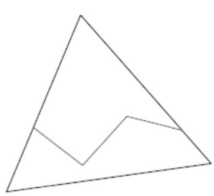


Figure 29.

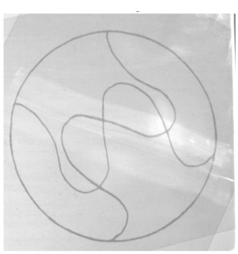


Figure 30.

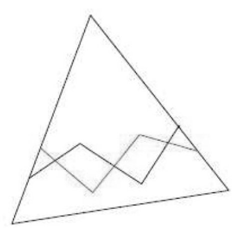


Figure 31.

re à travers des manipulations variées (peinture, découpage, pliage, retournement de formes). L'emploi du papier calque aide à identifier des parties (surfaces, bords, points remarquables) de la figure qui se correspondent. La mise en relation du vocabulaire lié à la manipulation matérielle et du vocabulaire géométrique pendant l'action en fin de cycle 3 ou en 6ème aide à faire le lien entre les actions sur le matériel et la mise en œuvre de propriétés géométriques. Cette étape nous paraît indispensable avant de pouvoir aborder la question de la recherche du symétrique d'un point ou d'un segment par rapport à une droite et de définir la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée. En revanche, la notion de figure symétrique nécessite une reprise après l'introduction de cette définition pour qu'on puisse la voir comme étant sa propre image dans une symétrie axiale, ce qui est beaucoup plus complexe.

Nous n'avons pas parlé non plus du papier quadrillé qui est le principal support utilisé à l'école primaire. Il permet d'éviter le passage par l'espace pour vérifier l'existence d'une symétrie ou produire la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe vertical ou horizontal. Il permet de mettre en œuvre l'équidistance d'un point et de son symétrique par rapport à l'axe par comptage de carreaux mais l'orthogonalité est prise en charge par le support et n'intervient donc pas. L'axe oblique, même porté par les diagonales des carrés du support n'est pas du ressort de l'école primaire, d'autant plus que, dans la progression officielle des programmes de 2008, la symétrie est mentionnée au CE1, au CE2 puis au CM1 mais n'est pas reprise au CM2. Si on a un axe oblique qui n'est pas porté par les diagonales du quadrillage, le papier quadrillé devient une gêne plus qu'une aide jusqu'à des niveaux plus avancés de la scolarité. De plus, sur quadrillage, les élèves peuvent produire l'image d'un segment sans chercher l'image des deux extrémités : à partir d'un point, ils peuvent chercher la pente du segment comme troisième côté d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont portés par les lignes du quadrillage. Ils reproduisent ainsi les bords d'une surface en suivant son contour. Ils peuvent aussi voir le passage d'une extrémité à l'autre d'un segment comme un déplacement sur quadrillage ; le déplacement symétrique consistera suivant le cas à inverser le sens des déplacements horizontaux ou verticaux. L'usage du papier quadrillé accompagné de la règle non graduée est à inclure dans une progression ; il ne va pas de soi.

Conclusion générale

Dans cet article, nous avons voulu aborder la question de l'intérêt de l'enseignement de la géométrie à toute la population, pour la formation générale des citoyens, pour développer la vision géométrique qui est un outil de représentation de beaucoup de situations, de la vie courante comme des autres disciplines. Dans cette perspective, nous avons interrogé les rapports entre géométrie et monde réel ainsi que le rôle des schémas et figures aussi bien dans le cas d'une modélisation géométrique d'une situation qui se pose dans le monde réel que dans le cas du traitement d'un problème portant sur des objets géométriques abstraits, ce qui nous a amenés à distinguer l'espace physique, l'espace graphique des représentations et l'espace géométrique.

Nous avons ensuite tenté de mettre des jalons sur ce que pourrait être une progression de l'enseignement de la géométrie du cours préparatoire (ou avant) à la classe de cinquième (ou après) en cherchant des moyens de faire évoluer le regard des élèves sur les figures de géométrie et sur les instruments qui permettent de les tracer. Nous avons ainsi identifié une situation mathématique à usage didactique (Brousseau, 2010) et ses variables didactiques : la *restauration de figures* qui permet d'engendrer des problèmes pour les élèves visant l'objectif de faire évoluer le regard des élèves sur les figures et les instruments usuels (pour le rapprocher d'un regard géométrique).

Nous avons illustré cette démarche dans le cas de la symétrie axiale, non en déroulant une progression sur la symétrie axiale mais en suggérant des moyens de l'élaborer par la description de deux situations de restauration de figures et l'identification de quelques-unes de leurs variables didactiques. Il resterait beaucoup de choses à préciser pour établir une progression cohérente, par exemple du CE2 à la 5ème ; il faudrait en particulier formuler les énoncés des savoirs et des problèmes, décrire le milieu matériel des situations ainsi que les liens précis qu'il entretient avec les savoirs mathématiques. Ce pourrait être l'objet d'un autre article.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement notre collègue Marc Godin qui a beaucoup contribué depuis de nombreuses années à notre réflexion sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire et au début du collège et qui est à l'origine des situations présentées ici sur la symétrie orthogonale.

Références

Arsac G. (2010) La démonstration : une logique en situation ? colloquium du 16 octobre 2009, Institut Henri Poincaré, Paris (texte disponible sur le site de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques : http://www.ardm.eu/files/O0-V2-Arsac.pdf).

Balacheff N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des éléves de Collège*. Thèse d'état. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Berthelot R. et Salin M.-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x,* 56, 5-34.

Bkouche R. (2009) De l'enseignement de la géométrie. *Repères-IREM* 76, 85-103.

Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Bulf C. (2008) *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12/1,73-111.

Dehaene, S. (1997*), La bosse des maths*. Paris : Odile Jacob.

Douady, R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/2, 5-31.

Douady R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères-IREM*, 15, 37-61.

Duval A. et Salin M.H. (1991). Y'a un malaise. *Repères-IREM,* 4, 85-88.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

Duval R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnement. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, 10, 5-55.

Duval R. et Godin M. (2006) : Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N* n°76, 7-27.

Duval R., Godin M., Perrin-Glorian M.J. (2005), Reproduction de figures à l'école élémentaire, In Castela C., Houdement C. (eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, p. 5-89, ARDM, IREM Paris 7.

Gobert, S. (2001), *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de la géométrie à l'école élémentaire*. Thèse université Paris7-Denis Diderot.

Godin M. et Perrin-Glorian M.J. (2009). De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. *Actes du colloque de la COPIRELEM, Bombannes, juin 2008*.

Houdement C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères,* 67. 69-84.

Kahane (dir.) (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Paris : Odile Jacob.

Keskessa B. Perrin-Glorian M.J., Delplace J.R. (2007), Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur des figures de géométrie, *Grand N*, 79, 33-60.

Laborde C. (1990) L'enseignement de la géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3, 339-363.

Mercier A., Tonnelle J. (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, deuxième partie. *Petit x*, 29, 15-56 et troisième partie, *Petit x*, 33, 5-35.

Moyon M. (2011), Practical Geometries in Islamic Countries: the example of the division of plane figures. In Kronfellner, M., Barbin, E. & Tzanakis, C. (eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 6th European Summer University* (Vienne, 19-23 juillet 2010), Vienne, Verlag Holzhausen GmbH, p. 527-538.

Moyon M. (2012), Diviser un triangle au Moyen Âge: l'exemple des géométries pratiques latines, in Barbin, E. (coord.) *Les mathématiques éclairées par l'histoire, Des arpenteurs aux ingénieurs,* Paris, Vuibert, p. 73-90.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.J. et Verbaere, O. (2007), Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Petit x,* 92, 6-39. (ou *Grand N,* 77, 7-34).

Perrin-Glorian M.J. et Salin M.H. (2010), Didactique de la géométrie. Peut-on commencer à faire le point ? *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2009* pp. 47-81. Paris : IREM, université Paris-diderot

Pluvinage et Rauscher (1986), La géométrie construite mise à l'essai, *Petit x*, 11, 5-36.

Robotti, E. (2008). Les rôles du langage dans la recherche d'une démonstration en géométrie plane. *Recherches en didactique des mathématiques*. 28/2, 183-217.

Rouche N. et al. (2008). *Géométrie. Du quotidien aux Mathématiques*. Paris : Ellipses.

Salin, M.H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. In Lemoyne, G. & Conne, F. (Eds) *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 327-352) Les Presses de l'Université de Montréal.

Salin M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. *Bulletin de l'APMEP,* 478. p. 647-670.