DES SEANCES « MATHS-HISTOIRE » EN CLASSE DE SECONDE

Nathalie CHEVALARIAS
Nicolas MINET

Irem de Poitiers

Introduction

Nous nous efforçons depuis plusieurs années de redonner du sens aux mathématiques que nous devons enseigner ; parmi les pistes retenues, nous avons cherché à introduire un aspect historique au sein même du cours de mathématiques, à tous les niveaux du lycée, au moment de la présentation de notions (calcul différentiel, logarithmes, probabilités) et lors d'exercices (construction de la racine carrée à partir du texte de Descartes, étude de l'article de D'Alembert sur le jeu du « Croix-Pile »,…). Il nous a toujours semblé important de pouvoir faire comprendre comment certaines notions ont pu évoluer (voire évoluent encore) et dans quel but elles ont été développées. Sans pour autant faire un cours d'histoire des mathématiques à nos élèves, il s'agissait de leur montrer, aussi bien par quelques informations purement culturelles que par des travaux plus approfondis, que les mathématiques ont été et sont toujours un domaine vivant et non pas une liste figée de théorèmes qui auraient toujours été posés ainsi.

Avec ce projet, nous avons voulu franchir une étape supplémentaire en montrant que non seulement les mathématiques ont une histoire mais que cette histoire ne s'est pas développée indépendamment de l'Histoire des Hommes. Les besoins des Hommes, qu'ils soient philosophiques, scientifiques, techniques, qui ont mené à des évolutions en mathématiques sont liés aussi aux époques, aux contextes géographiques et politiques. Nous nous sommes donc tournés vers nos collègues d'histoire et géographie pour réfléchir à ce que chacun pouvait apporter comme éclairage mutuel sur certains points du programme de la classe de seconde.

I. Organisation des séances

Nous ne souhaitions pas que ce travail apparaisse comme un nouvelle structure à côté des cours mais au contraire qu'il fasse partie à part entière de l'avancée de différents chapitres au programme [1]. Il fallait trouver des thèmes à aborder qui puissent enrichir aussi bien le cours d'histoire et géographie que celui de mathématiques. Ces thèmes se complètent chaque année et sont actuellement au nombre de trois : la démonstration et l'Antiquité grecque, les chiffres et le monde arabo-musulman, la perspective artistique et la Renaissance. D'autres pistes, en particulier autour du repérage et de la cartographie, sont à l'étude pour les années à venir. Comme nous allons le voir, ces thèmes peuvent être abordés en introduction ou en bilan d'un chapitre donné.

D'un point de vue pratique, *les séances de « maths-histoire » ont été coanimées par les collègues des deux matières de la classe*. Elles ont été la plupart du temps organisées sur les heures de modules [2], plus rarement en classe entière. Les élèves ont quelques documents écrits et la séance est rythmée par un diaporama qui présente différents documents commentés alternativement par chacun des professeurs. Certaines diapositives peuvent être un support pour deux éclairages complémentaires [3], d'autres appellent un commentaire spécifique à l'une des deux disciplines. Tous ces documents et commentaires apportent des connaissances aux élèves par rapport à des questions annoncées en début du diaporama et en lien avec les préoccupations des deux matières. De plus dans le diaporama apparaissent un certain nombre de commentaires écrits pour aider les élèves à une prise de note ; certains passages sont à noter obligatoirement par tous, le reste est laissé à l'appréciation de chacun. Les contenus de la séance s'intégrant à l'avancée du cours de chaque discipline, ils pourront entrer en ligne de compte dans l'évaluation sommative correspondante.

Lorsque la séance s'organise en demi-groupe sur les heures de modules, les élèves non pris en charge par les deux professeurs ont un travail à faire en autonomie au CDI : lectures de textes, représentation de frise chronologique,… en lien avec les sujets abordés. Dans les années à venir, nous souhaiterions améliorer ce temps de recherche individuelle en collaboration avec nos collègues documentalistes. Cependant, une heure, cela reste trop court pour engager de véritables approfondissements. Pour l'instant, cet approfondissement s'effectue en mathématiques par le biais d'un devoir à la maison donné à la suite de la séance et qui permet de mieux intégrer certaines notions abordées (la logique et la démonstration, les algorithmes de calcul et l'écriture des nombres, …).

II. La démonstration et l'antiquité grecque

Cette première séance commune de l'année est présentée dès le mois de septembre. Elle

1 La disparition de l'arithmétique en 2009-2010 a demandé quelques adaptations de l'utilisation du deuxième thème.

2 D'un côté pratique, il fallait penser à demander que les modules de mathématiques et d'histoire-géographie soient en parallèles dès le début de l'année. La réforme du lycée va modifier cette organisation.

3 Une image de drachme peut être commentée du point de vue du système monétaire par le professeur d'histoire et du point de vue de l'écriture acrophonique des nombres par le professeur de mathématiques.

s'intègre en histoire jusqu'en 2009-2010[4] dans le dossier :

> **I - Un exemple de citoyenneté dans l'Antiquité : le citoyen à Athènes au Vème siècle avant J-C.**
>
> — Être citoyen à Athènes
> — Une conception restrictive de la citoyenneté

et en mathématiques dans un chapitre de géométrie. En effet, on nous demande en seconde de réinvestir les connaissances de géométrie de collège (propriétés des quadrilatères, des cercles, des symétries, …) dans la résolution de problèmes.

> *L'objectif de l'enseignement de la géométrie plane est de rendre les élèves capables d'étudier un problème dont la résolution repose sur des calculs de distance, la démonstration d'un alignement de points ou du parallélisme de deux droites, la recherche des coordonnées du point d'intersection de deux droites, en mobilisant des techniques de la géométrie plane repérée.*

Les élèves étant confrontés à l'écriture de démonstrations, c'est l'occasion de faire des bilans sur les connaissances elles-mêmes (théorèmes de Thalès et de Pythagore, caractérisation du parallélogramme, du carré, etc) mais aussi sur ce qu'est une démonstration. En effet, le programme de mathématiques présente un certain nombre d'objectifs concernant le raisonnement :

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

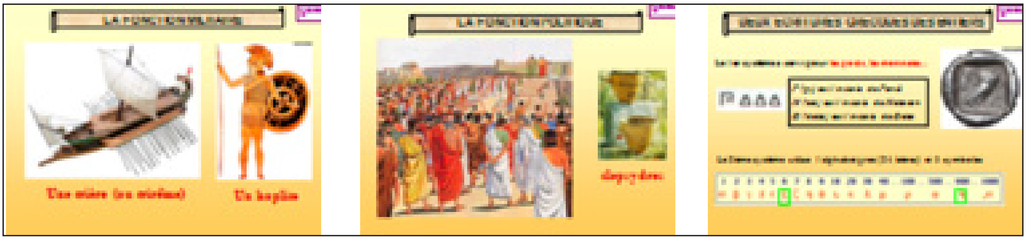
Voici donc les questions posées en introduction de ce premier exposé :

> Qu'est-ce que « *démontrer* » en mathématiques ?
> Où la démonstration est-elle apparue ?
> Qui l'a inventée ? Quand ? Pourquoi ?

Pour répondre à ces questions, le diaporama s'organise en trois parties. Le professeur de mathématiques présente brièvement l'état des mathématiques avant l'Antiquité grecque, puis le professeur d'histoire revient

4 A partir de 2010, elle pourra s'inscrire dans le Thème 2 - L'invention de la citoyenneté dans le monde antique

Questions obligatoires	**Mise en oeuvre**
Citoyenneté et démocratie à Athènes (Ve-IVe siècle av. J-C.)	- La participation du citoyen aux institutions et à la vie de la cité : fondement de la démocratie athénienne. - La démocratie vue et discutée par les Athéniens.



sur l'organisation de la cité grecque. A partir d'images, les élèves retrouvent les fonctions du citoyen grec fonctions militaire, politique, sociale, religieuse.

Des hommes tentent de se défaire des explications de la nature par les mythes ; cette nouvelle position qui va consister à raisonner fait écho aux besoins d'argumentation politique dans la cité grecque.

La troisième partie aborde alors quelques grands noms qui ont marqués l'évolution de la pensée : Thalès, Pythagore, Socrate, Platon, Aristote et Euclide.

Les élèves relèvent un court extrait du diaporama à propos de chacun de ces personnages :

Thalès *(- 625 ? - 550 ?)*
Il est « philosophe de la Nature » : il veut la comprendre mais sans invoquer les mythes. Il a compris et prévu l'éclipse de 585 av.J.C.

Pythagore *(- 570 ? - 480 ?) : « Tout est nombre »*
Il cherche à expliquer ce qui lui semble ordonné dans la Nature grâce à des proportions entre des nombres entiers.

Socrate *(-468 ; -400) : « Tout ce que je sais, c'est que je ne sais rien »*
Il recherche « la vérité » qui ne doit pas dépendre du discours des uns et des autres.

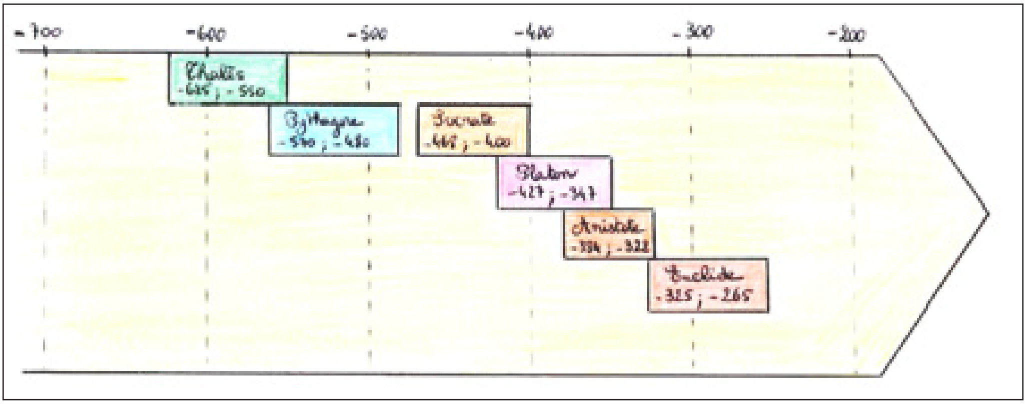
Platon *(- 427 ; - 347) « Dieu, toujours, fait de la géométrie »*
Il recherche la Vérité dans les Idées «abstraites" (comme les objets mathématiques) et non pas dans le monde réel, qui change...

Aristote *(- 384 ; - 322) : « Savoir, c'est connaître par le moyen de la démonstration, c'est-à-dire par le syllogisme scientifique ».*
Aristote définit ce qu'est une démonstration

Euclide *(- 325 ; - 265)*
« Ce qui est affirmé sans preuve, peut être nié sans preuve. »
Ses « Eléments », synthèse organisée des savoirs mathématiques de l'époque, sont parmi les premiers ouvrages imprimés (1482).

Pendant leur temps de travail en autonomie au CDI, les élèves liront des exemples de démonstration de la proposition I du livre I d'Euclide (Annexe 1) et ils construiront une frise chronologique (ci-contre) situant les différents personnages évoqués précédemment.

Nous avons choisi de caler cette séance comme une conclusion au dossier d'histoire car elle permet une synthèse sur les connaissances de seconde à avoir sur le monde grec à l'Antiquité. En mathématiques, selon la progres-



sion, elle peut être une synthèse suite à un chapitre de géométrie où les élèves ont eu besoin de démontrer des résultats ou bien elle peut être une introduction à un tel chapitre. Le travail à la maison qui a suivi la séance a permis de prendre le temps d'écrire des syllogismes (exemple Annexe 2), d'écrire des propositions, leurs réciproques et de s'interroger sur leur caractère de vérité :

> *A partir des deux énoncés : ① ABCD est un parallélogramme et ② AB = CD, je peux écrire la proposition suivante : « Si ABCD est un parallélogramme alors AB = CD »,* ***elle est vraie****.*
>
> *Sa contraposée « Si AB ≠ CD alors ABCD n'est pas un parallélogramme »,* ***est vraie aussi****.*
>
> *Mais sa réciproque « Si AB = CD alors ABCD est un parallélogramme »* ***est fausse*** *et la contraposée de sa réciproque « Si ABCD n'est pas un parallélogramme alors AB ≠ CD »* ***est donc fausse aussi****.*

Les exemples choisis ont permis de réinvestir les théorèmes de géométrie mais aussi d'aborder des exemples hors géométrie : la démonstration est inhérente à l'activité mathématique, toute l'activité mathématique et pas seulement la géométrie. Il est important d'insister sur ce point en début de seconde car un grand nombre d'élèves associe démonstration et géométrie.

III. Les chiffres et le monde arabo-musulman

La deuxième séance de l'année a eu lieu vers la fin du premier trimestre. Elle faisait partie intégrante jusqu'en 2009-2010 du dossier d'Histoire intitulé

> **III - La Méditerranée au XIIème siècle : carrefour de trois civilisations**
>
> — Les espaces de l'Occident chrétien, de l'Empire byzantin et du monde musulman
> — Différents contacts entre ces trois civilisations : guerres, échanges commerciaux, influences culturelles.

commenté par la phrase suivante :

> Le cœur de la question est bien l'idée de carrefour de civilisations. A l'aide d'un petit nombre d'exemples et de documents librement

choisis, il s'agit de mettre en valeur la diversité des contacts que développent ces différentes civilisations : affrontements guerriers (croisades, Reconquista...), échanges commerciaux (comptoirs), influences culturelles (syncrétisme).

Cette séance donne l'occasion au collègue d'histoire d'approfondir les apports d'ordre scientifique des différentes cultures, en développant en particulier le « chemin » tant culturel que géographique des chiffres indiens jusqu'à l'Occident. Jusqu'en 2008-2009, elle ouvrait en mathématiques le cours d'arithmétique à partir de la notion de base de numération ; puis des recherches de diviseurs autour de la base « soixante » des Babyloniens. En 2009-2010, sans cours d'arithmétique au programme, nous avons pu cependant travailler en devoir à la maison sur les écritures des nombres, des opérations, des diviseurs, en particulier en lien avec l'algorithmique. Malgré ce changement, il nous a paru important de maintenir cette séance car elle donne vraiment l'occasion d'illustrer comment l'histoire des mathématiques fait partie intégrante de l'Histoire des hommes.

De plus le collègue d'histoire dispose ainsi d'un exemple complet de savoir culturel et scientifique qui s'est transmis entre les différentes civilisations. Les questions qui sont posées en ce début de deuxième exposé sont donc :

Pourquoi y a-t-il eu différentes écritures d'un même nombre ?

Où ont été inventés les chiffres que nous utilisons aujourd'hui ?

Comment et dans quel contexte sont-ils arrivés en Europe ?

La séance est organisée en deux grandes parties. La première permet d'aborder les différentes écritures des nombres : depuis les entailles du Paléolithique jusqu'aux chiffres indiens en base 10 avec un zéro en passant par les numérations additionnelles des Egyptiens, des Grecs, la numération positionnelle des Babyloniens. Elle est l'occasion d'un travail mathématique sur l'écriture des nombres et d'un questionnement sur les opérations qui sera poursuivi en devoir à la maison (Annexe 3).

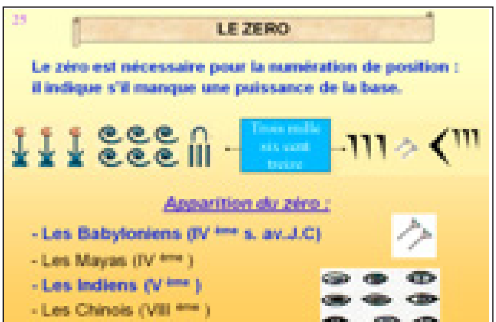
1. a) Combien vaut, pour les Grecs, le nombre $\phi\ \lambda\ \beta$? Cela changerait-il quelque chose d'écrire ce nombre $\beta\ \phi\ \lambda$?

b) Combien vaut, pour les Egyptiens, le nombre : ?

2. Comment, dans chaque civilisation, écrire cent trente et un ? Et soixante-cinq ?

Comment faire, en utilisant ces symboles, pour calculer le double de cent trente et un ? Et le triple de soixante-cinq ? Et le produit de cent trente et un par soixante-cinq ?

Ce voyage dans le temps et l'espace est matérialisé par une carte du monde que les élèves complètent avec le collègue d'histoire-géographie en notant les civilisations et les époques concernant les numérations étudiées. Ils remarquent en particulier la dispersion des civilisations ayant développé une numération de position et par suite, pour certaines d'entre elles, « inventé » un zéro.

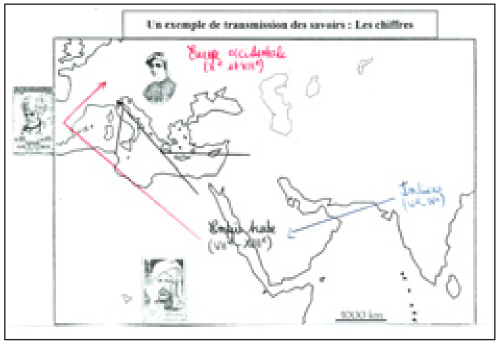


La deuxième partie revient sur les savoirs scientifiques dans l'Empire arabe du VII ème au XI ème siècle. Le diaporama détaille le lien entre ces savoirs et la religion ainsi que quelques domaines où ils se sont développés : l'astronomie, la cartographie, la médecine, …en terminant par les traités d'algèbre et de calcul d'Al Khwarizmi. Le contexte de l'époque favorable au développement de la culture est noté :

Les califes créent des lieux, ouverts aux hommes de sciences et de religion, notamment destinés aux traductions des ouvrages savants des territoires voisins ou conquis : grecs, chinois, indiens,…

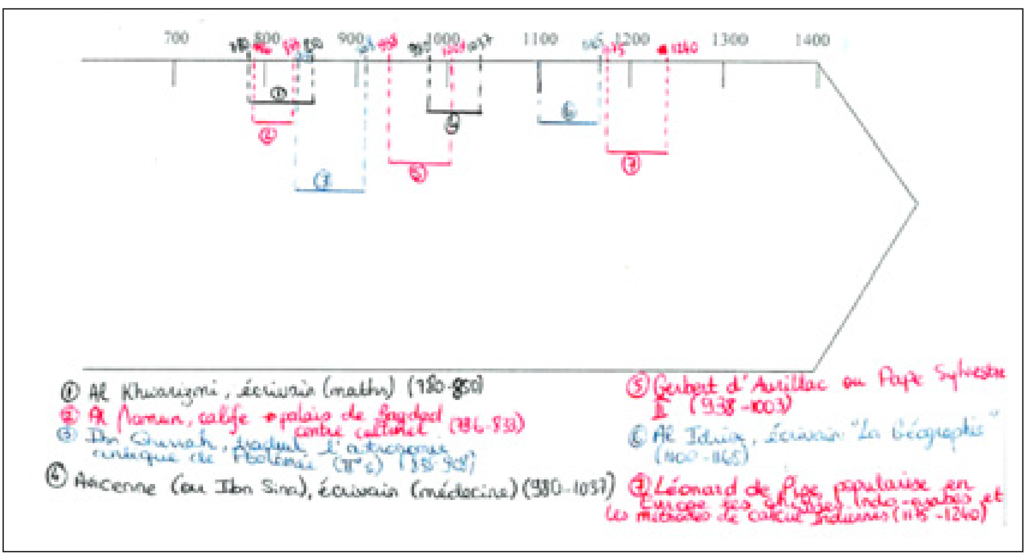
Sous son règne (813-833), le calife al Mamun (786-833) fait de son palais de Bagdad un centre culturel de toute première importance : la « Maison de la sagesse » (Bayt al Hikma).

Ces savoirs traduits, les savants arabes vont les assimiler, les compléter, les critiquer. C'est un vaste ensemble de connaissances qui va se développer, […]



Les élèves relèvent quelques noms importants de cette période et les placent au fur et à mesure sur une frise chronologique, qui sera terminée dans la dernière partie de l'exposé.

Cette dernière partie revient sur la fin du voyage des chiffres depuis l'Inde jusqu'en Europe. Ce qui a été développé précédemment jusqu'aux ouvrages d'Al Khwarizmi explique l'assimilation et l'utilisation des chiffres dans l'Empire arabe. Le professeur de



mathématiques présente le rôle de Gerbert d'Aurillac et les difficultés pour les chiffres indiens (et en particulier le zéro) à s'implanter en Europe. Le professeur d'histoire présente, lui, le contexte des croisades jusqu'au XIIIème siècle et la création de nouvelles routes commerciales.

L'exposé se termine par le rôle final de Fibonacci :

> *Fils du commerçant Léonardo Bonacci, il effectue de nombreux voyages en Afrique du nord et sur le pourtour de la Méditerranée.*
>
> *Il prend alors connaissance des travaux de mathématiciens arabes comme Al Khwarizmi, et découvre la numération de position indienne, alors qu'à l'époque, en Italie, les chiffres romains sont encore utilisés, et très peu pratiques pour les calculs...*
>
> *Dans son ouvrage «* Liber Abaci » *daté de 1202, Fibonacci popularisa définitivement en Europe les chiffres indo-arabes et les méthodes de calcul indiennes. Cet ouvrage est principalement consacré aux calculs commerciaux : conversions de monnaies, montant de taxes, d'impôts.*

Si cette séance ne donne lieu en mathématiques qu'à des prolongements en devoir à la maison, elle entre en histoire dans l'évaluation sur l'Empire arabe. Sur la question de la transmission des connaissances à l'époque, plusieurs élèves penseront à développer dans leur copie l'exemple des chiffres.

IV. La perspective artistique et la Renaissance

Le dernier thème abordé dans ces séances « maths-histoire » est présenté sur deux séances distantes d'une quinzaine de jours. Il s'intègre dans le programme d'histoire [5] dans la partie :

IV - Humanisme et Renaissance

— Une nouvelle vision de l'homme et du monde
— La Renaissance artistique

accompagné du commentaire suivant :

> Dans l'Europe du XVème et XVIème siècles se produit une modification profonde de la vision de l'homme sur sa condition et sur le monde, ainsi que la naissance d'un esprit scientifique. [...] Il s'agit de privilégier l'exploitation de quelques documents variés (extraits des grands auteurs de l'*Humanisme*, œuvres d'art de la Renaissance pour mettre en relation les différents domaines du sujet et faire apparaître ruptures et continuités. L'utilisation de cartes permet de prendre conscience de l'élargissement du monde (les *grandes découvertes* et de localiser les exemples choisis.

5 A partir de 2010, il reste un thème sur la Renaissance dans lequel cette présentation peut prendre place :

On traite une question au choix parmi les deux suivantes	**Mise en oeuvre**
Les hommes de la Renaissance (XVe-XVIe siècle)	Une étude obligatoire : un réformateur et son rôle dans l'essor du protestantisme ; et une étude choisie parmi les deux suivantes ; — un éditeur et son rôle dans la diffusion de l'Humanisme ; — un artiste de la Renaissance dans la société de son temps.

Entrées possibles : des personnalités (des écrivains, des artistes, des *mécènes*), des foyers de création (Florence, Rome, Flandres...) ou des œuvres emblématiques (peintures, sculptures...).

En mathématiques, ce thème peut être une introduction au programme de géométrie dans l'espace. Le problème de la représentation de l'espace est abordé dans le diaporama. Comprendre que la représentation que l'on fait est un choix et qu'elle obéit à des règles bien définies permet de justifier le choix de la perspective cavalière dans le cours de mathématiques. La perception de la perspective artistique comme intersection du cône visuel avec le plan du tableau motivera l'étude des positions relatives de droite et de plan, ainsi que les tracés d'intersection.

Géométrie dans l'espace

S'adressant à tous les élèves de seconde, le programme de géométrie dans l'espace a pour objectif :
• de développer la vision dans l'espace des élèves en entretenant les acquis du collège concernant les solides usuels ;
• d'introduire les notions de plans et droites de l'espace et leurs positions respectives ;

Les élèves doivent être capable de représenter en perspective parallèle (dite aussi cavalière) une configuration simple et d'effectuer des constructions sur une telle figure.

Contenus et capacités attendues :
Les solides usuels étudiés au collège : parallélépipède rectangle, pyramides, cône et cylindre de révolution, sphère.
Manipuler, construire, représenter en perspective des solides.
Droites et plans, positions relatives. Droites et plans parallèles.

La première séance sur ce thème pose les questions :

Comment représenter cet espace sur une feuille, un tableau, un mur, ... donc en deux dimensions ?

Quand et où se sont développés ces modes de représentation ?

Elle va permettre de balayer l'histoire de l'Antiquité jusqu'au premier traité de perspective qui nous soit connu (Alberti, *De Pictura*, 1435) à travers différentes tentatives de représentation de l'espace. Quelques éléments spécifiques (comme la méthode des deux-tiers) sont gérés par le professeur de mathématiques mais la séance est présentée conjointement par les deux enseignants en faisant appel aux impressions des élèves sur les différents exemples.

Nous revenons sur des représentations égyptiennes ou syriaques qui concentrent plusieurs points de vue en une représentation mais ne traduisent pas l'impression de profondeur. Ensuite nous abordons des exemples de tableaux où le jeu des dimensions à l'avant-plan et à l'arrière-plan donne un effet de profondeur. Cet effet est souligné par des dégradés de couleurs, en particulier dans le ciel (perspective aérienne) et des contrastes de lumière (clair-obsur).

La discussion s'appuie sur des exemples, dont certains figurent dans le livre d'histoire des élèves : GIOTTO *Fresque de l'Eglise Saint François d'Assise* (1290-1300), GOZZOLI *Cortège des rois mages (1460)* et bien sûr LEONARD DE VINCI *La Joconde (1503 - 1505)*.

Le dernier exemple, FOUQUET *Dagobert 1er réfugié à Saint Denis (1458)* (voir ci-après) reprend les dégradés de bleu dans le ciel, les bâtiments de plus en plus petits et de plus en plus flous plus ils sont loin. Mais les élèves observent généralement aussi le bâtiment à l'avant-plan dont la forme leur rappelle la représentation du cube des livres de mathématiques. Le volume est rendu par des côtés fuyant selon ce qui semble être des parallèles.

Nous abordons alors avec le diaporama la notion de perspective parallèle et de perspective cavalière. Il est intéressant de remarquer qu'en Europe, elle s'est développée plutôt à des fins techniques et militaires mais que, plus tard sur d'autres continents (Asie en particulier), elle a aussi eu des buts artistiques (perspective à vol d'oiseau).

Le dernier temps du diaporama est consacré aux avancées en peinture vers la perspective que l'on appellera « artistique » ou « à point de fuite » ou « centrale »… : la perspective dite en arête de poisson, et la règle des deux-tiers qui sera accompagnée de quelques tracés géométriques pour comprendre d'une part sa définition mais d'autre part les défauts qu'elle présente. (Voir annexe 4). Le diaporama s'achève sur l'expérience de Brunelleschi et sur l'arrivée d'une codification des règles à utiliser en peinture par Alberti :

1435, De Pictura : la codification des principes. *Le premier énoncé écrit, qui nous soit connu, du principe et d'une méthode de construction en perspective figure dans le traité De Pictura que Leon Battista Alberti (1404 - 1472) écrit en 1435, mais qui ne sera imprimé qu'en 1540. Cette technique repose sur de la géométrie. Elle va devenir, dans la peinture européenne à la Renaissance, un des critères pour juger de la maîtrise d'un peintre.*

A la suite de cette séance, les élèves reviendront sur certains tableaux et en étudieront d'autres avec le regard du professeur d'histoire. Lors du travail en autonomie, ils avaient à rechercher un certain nombre de tableaux et de peintres de la Renaissance qui seront étudiés en

classe. En mathématiques le but n'est évidemment pas de rentrer dans une étude des règles de la perspective artistique et d'en connaître les tracés mais de s'intéresser à des problèmes de représentation dans l'espace (en perspective cavalière !) de certaines intersections de plan et de droites ou de certaines sections de polyèdres classiques comme le cube ou le tétraèdre.

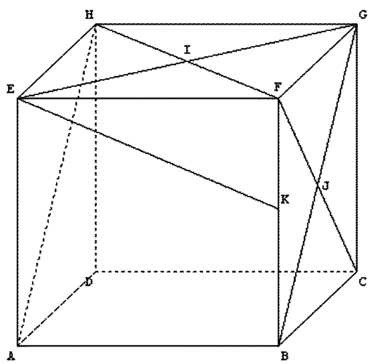
La partie mathématique du travail en autonomie (encadré ci-contre) leur demandait de comparer deux représentations sur lesquelles on peut s'appuyer pour dégager les termes à utiliser dans le cours de mathématiques (droites, plan, droites coplanaires, sécantes, etc)

Le lien entre les ombres (présentes dans des tableaux) et les intersections peuvent être travaillées avec les connaissances du programme de seconde (Cf. exercice ci-contre).

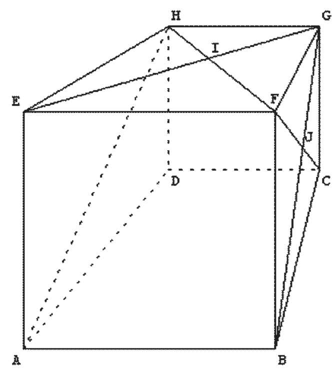
La dernière séance « maths-histoire » reprend l'histoire de la perspective linéaire là où on l'avait quittée avec l'ouvrage d'Alberti. En travaillant sur l'idée d'intersection des

On donne deux représentations d'un cube ABCDEFGH, ainsi que des centres de deux de ses faces : la première le représente en perspective cavalière, l'autre en perspective linéaire.

1)



2)



D'après vous, dans la réalité (entourer la réponse) :

Les droites (AH) et (EG) sont-elles sécantes ?	OUI	NON
Les droites (HF) et (EG) sont-elles sécantes ?	OUI	NON
Les droites (HF) et (EG) sont-elles perpendiculaires ?	OUI	NON
Les droites (AH) et (BG) sont-elles parallèles ?	OUI	NON
Les droites (HF) et (EK) sont-elles parallèles ?	OUI	NON
I est-il le milieu de [HF] ?	OUI	NON

Ces propriétés apparaissent-elles sur les dessins ? Comment ?

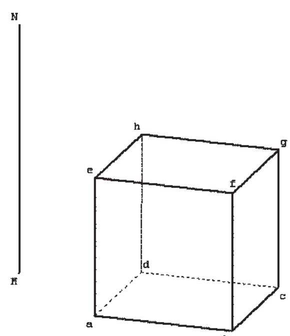
Dégager les différences et les points communs de ces deux représentations

Exercice :

Le segment [MN] *représente un lampadaire, la lumière est en* N.

Le cube abcdefgh est posé sur le sol, (les arêtes [ae], [bf], [cg] et [dh] sont donc parallèles à (MN)*).*

Tracer l'ombre du cube (supposé plein) sur le sol.



rayons visuels avec le plan du tableau, le professeur de mathématiques montre des exemples d'images de quelques droites remarquables (perpendiculaires, parallèles, faisant un angle de 45° par rapport au plan du tableau). Pour comprendre le principe des tracés les élèves construisent sur papier un exemple de dallage constitué de carrés accolés en utilisant le point de fuite principal et les points de distance. Ils viennent aussi observer ce même dallage sur une maquette où le tableau est matérialisé par une plaque de plexiglas pour pouvoir voir à travers.

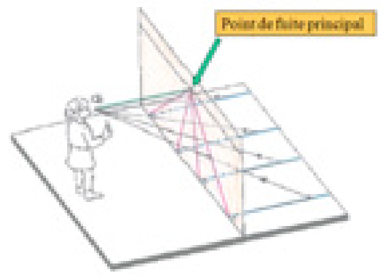
Nous revenons ensuite sur des exemples de tableaux où de telles constructions ont été utilisées. Les deux enseignants interviennent alors, le professeur d'histoire pour situer le peintre et le tableau dans la période étudiée, le professeur de mathématiques pour faire réaliser quelques tracés. Cette année, les tableaux choisis étaient :

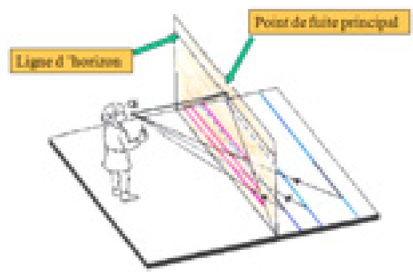
La flagellation du Christ, Piero della Franscesca (1416?-1492) dont l'étude mathématique sera poursuivie en devoir à la maison (voir annexe 5).

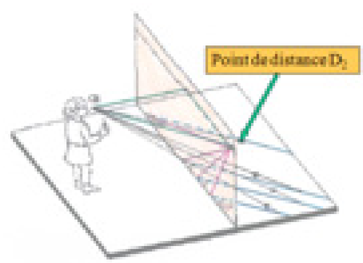
L'annonciation avec St Emidius, Carlo Crivelli (1486) pour lequel on peut placer les points de distance car ils se trouvent très près du bord du tableau.

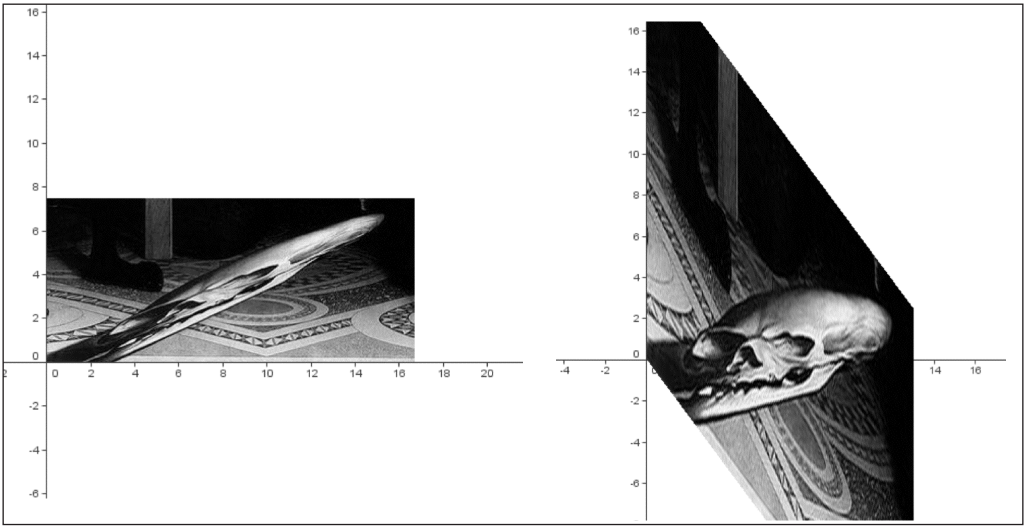
Le mariage de la vierge, Le Pérugin (1446-1523) et **Le mariage de la Vierge, Raphaël (1504)** que l'on compare rapidement.

La dernière partie est une ouverture vers les anamorphoses et le diaporama se termine par le commentaire du tableau **Les Ambassadeurs d'Holbein** par le collègue d'histoire et par l'observation et la déformation sous Geogebra de l'anamorphose présente dans le tableau (page suivante).









Conclusion

Nous ne savons pas quel sera l'avenir de ce projet suite à la réforme des lycées et le risque de disparition de certaines heures de modules. Il reste des possibilités pour continuer des co-interventions sur les créneaux d'accompagnement personnalisé. Cependant, il nous semble souhaitable qu'elles n'apparaissent pas déconnectées du travail de la classe, comme si la culture devait s'acquérir en dehors des heures de cours « classiques ».

De plus, il nous semble important de pouvoir toucher un maximum d'élèves pour leur apporter des éléments de culture qu'ils ne seraient peut-être pas allé chercher d'eux-mêmes. Certains élèves ont pu découvrir un aspect des mathématiques et des liens avec l'histoire qu'ils n'imaginaient pas. D'autres au contraire, généralement de « bons » élèves sur des exercices techniques de mathématiques, ont été déstabilisés par ces séances, qu'ils n'ont, par conséquent, pas toujours appréciées. Quelques remarques dans leurs fiches « bilan » de mathématiques en fin d'année en témoignent :

« Les séances math-histoire, c'est ce que j'ai préféré, on voit l'utilité des maths (mais les séances étaient rares dans l'année !) »

« Ce qui m'a déplu : Maths- Histoire car l'histoire mélangée aux maths devient trop embrouillant »

« Les séances math-histoire : un peu ennuyant mais bien quand-même car cela montre que les maths ont toute une histoire »

« Les séances de maths-histoire ne m'ont pas trop passionné »

« Les séances de maths-histoire sont très intéressantes, cela nous ouvre d'autres façons de s'intéresser aux maths »

« Je trouve ça génial de voir dans d'autre temps que le notre des mathématiques. Voir dans des tableaux de la géométrie c'est super bien »

« Lier deux matières assez différentes l'une de l'autre les met plus en valeur ; intérêt de comprendre historiquement d'où proviennent les Mathématiques »

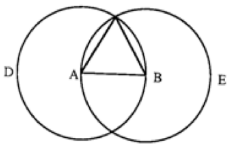
Quelles que soient leur réaction finale et les raisons qui expliquent pourquoi ils ont aimé ou non, ces séances ont fait s'interroger les élèves sur les liens qui unissent les disciplines.

ANNEXE 1

***Travaux de lecture au* CDI**

EUCLIDE (3ème siècle avant JC)

Traduction Peyrard



PROPOSITION PREMIÈRE.

PROBLÈME.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Soit AB (fig. 1) la droite donnée et finie : il faut construire sur la droite AB un triangle équilatéral.

Du centre A et avec un intervalle AB, décrivez la circonférence BCD (dem. 3); ensuite du centre B et avec l'intervalle BA décrivez la circonférence ACE; et du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisez aux points A, B, les droites CA, CB (dem. 1).

Car puisque le point A est le centre du cercle CDB, la droite AC sera égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle CAE, la droite BC sera égale à la droite BA; mais il a été démontré que la droite CA étoit égale à la droite AB: donc chacune des droites CA, CB est égale à la droite AB; or les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entr'elles; donc la droite CA est égale à la droite CB: donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entr'elles.

Donc le triangle ABC (déf. 24) est équilatéral, et de plus il est construit sur la ligne donnée et finie AB; ce qu'il falloit faire.

EUCLIDE (3ème siècle avant JC)

Texte grec

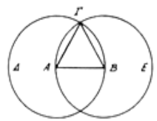
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ α'.

α'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

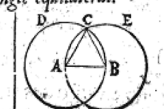
[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

HERIGONE (1634)

PROBL. I. PROPOS. I.

SVPER data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constituere.

Sur une ligne droicte donnée & terminée, descrire un triangle equilateral.



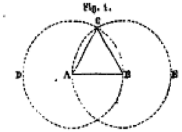
Hypoth.	3.p.1.	bace est ⊙,
ab est —— D.	1.p.1.	ac & bc, snt ——,
Req. π. fa.	symp.	Δabc est æquilat.
Δabc æquilat.		*Demonstr.*
Constr.	constr.	abcd & bace snt ⊙,
3.p.1. abcd est ⊙,	15.d.1.	ac 2|2 ab,
	15.d.1.	bc 2|2 ba,
	1.a.1.	ac 2|2 bc,
	concl. 23.d.1.	Δabc est æquilat.

HOUËL (1867)

PROPOSITION 1.

Sur une droite finie donnée* AB *(fig. 1), construire un triangle équilatéral.

Fig. 1.



Du centre A, avec le rayon AB, décrivons le cercle BCD [dém. 3]; du centre B, avec le rayon BA, décrivons le cercle ACE. Du point C, où ces deux cercles se coupent (*), menons aux points A et B les droites CA, CB [dem. 1]. ABC sera le triangle demandé.

En effet, puisque l'on a AC = AB [déf. 15],

et BC = BA,

il en résulte AC = BC [ax. 1].

Par conséquent AC = AB = BC, et il s'ensuit [déf. 24] que le triangle construit sur AB est équilatéral.

Traduction de quelques symboles

----- : droite ou segment

D : donnée

Δabc : le triangle ABC

⊙ : cercle

est : est   snt : sont

Req. π. fa. : ce qui est à faire

Constr : construction

Demonstr : démonstration

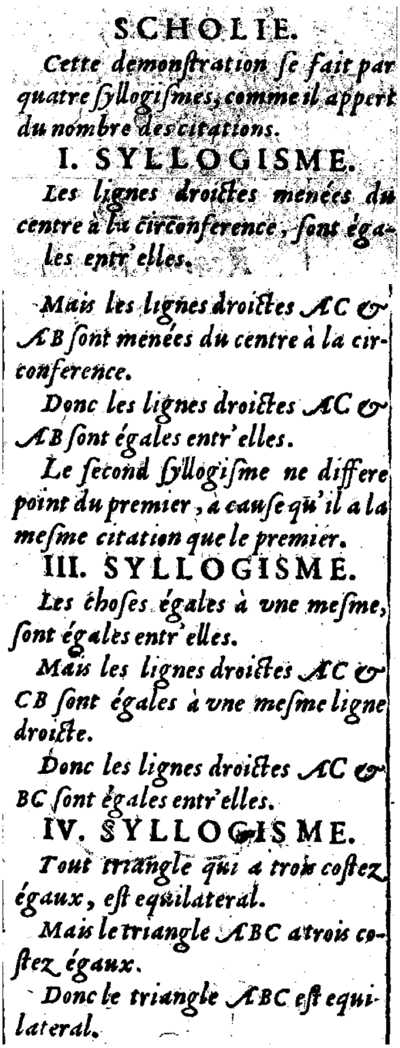
2|2 : égal

ANNEXE 2

Extrait de devoir maison

Exercice 1 ***Sur les syllogismes*** :

La construction d'un triangle équilatéral par Hérigone (1634) et la démonstration correspondante (voir feuille math-histoire) étaient accompagnées des commentaires suivants sur les syllogismes utilisés dans la démonstration :


SCHOLIE.

Cette demonstration se fait par quatre syllogismes, comme il appert du nombre des citations.

I. SYLLOGISME.

Les lignes droictes menées du centre à la circonference, sont egales entr'elles.

Mais les lignes droictes AC & AB sont menées du centre à la circonference.

Donc les lignes droictes AC & AB sont égales entr'elles.

Le second syllogisme ne differe point du premier, à cause qu'il a la mesme citation que le premier.

III. SYLLOGISME.

Les choses égales à une mesme, sont égales entr'elles.

Mais les lignes droictes AC & CB sont égales à une mesme ligne droicte.

Donc les lignes droictes AC & BC sont égales entr'elles.

IV. SYLLOGISME.

Tout triangle qui a trois costez égaux, est equilateral.

Mais le triangle ABC a trois costez égaux.

Donc le triangle ABC est equilateral.

Un syllogisme est un raisonnement logique en trois phrases.

Voici, en langage actuel, le premier syllogisme :

Les **rayons d'un cercle** ont *même longueur*
[AC] et [AB] sont les **rayons d'un cercle**
Donc [AC] et [AB] ont *même longueur*.

1. Ecrire ce même syllogisme pour les rayons [BA] et [BC]

………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
…………………………………

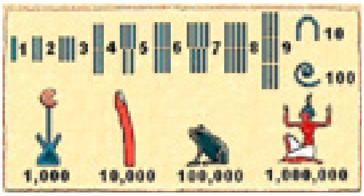
2. Ecrire les syllogismes III et IV en langage actuel

………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………

………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………
………………………………………………………

ANNEXE 3

Extrait de devoir maison et copie d'élève



Partie A : autour des multiplications

1) Revenons sur l'exercice 1 (Math-Histoire) : comment faisaient les égyptiens pour multiplier 131 par 65.

Ils ne recopiaient pas 65 fois l'écriture de 131 pour la réorganiser !

Ils utilisaient les doubles successifs à partir de 131 :

2×131, puis $2 \times 2 \times 131 = 4 \times 131$, puis $2 \times 4 \times 131 = 8 \times 131$, etc.

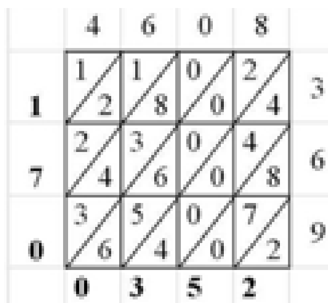
Comme $65 \times 131 = (64 + 1) \times 131 = 64 \times 131 + 131$, ils obtenaient alors le résultat grâce à une addition finale.

Ecrire en écriture égyptienne les doubles successifs à partir de 131 jusqu'à 64 ×131 puis trouver le résultat en écriture égyptienne de 65 × 131. Quel est ce nombre dans notre écriture décimale ?

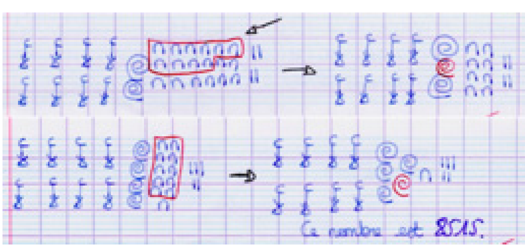
2) **Vérifier que vous ne vous êtes pas trompés en *posant* la multiplication.**

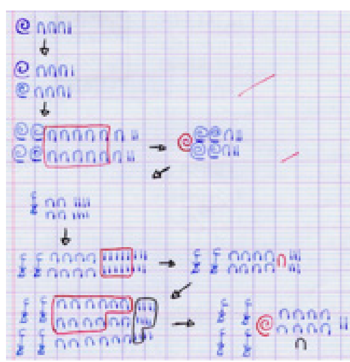
3) Mais cet algorithme pour trouver le résultat d'un produit que vous avez appris à l'école primaire n'est pas le seul. Par exemple, dès le XIIème siècle en Inde puis au Moyen-Age en Occident (avec l'arrivée des chiffres indo-arabes), une autre méthode était utilisée : la méthode « par jalousie » (ce mot désignait le treillis de bois ou de fer qui permet de voir de l'intérieur d'une habitation sans être vu de l'extérieur).

Voilà un exemple de multiplication écrit avec cette méthode :
Il donne le produit suivant : $4\,608 \times 369 = 1\,700\,352$



Comprendre comment fonctionne cette méthode, et l'utiliser pour calculer 65 × 131.





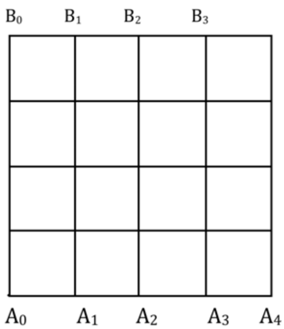
ANNEXE 4

La règle des deux-tiers

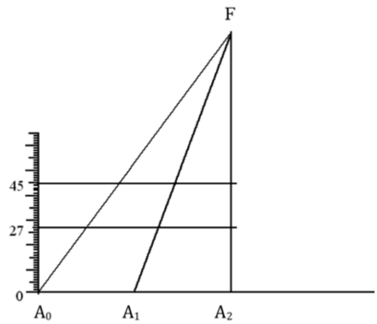
Voici une technique utilisée par le peintre italien Lorenzetti pour représenter un carrelage.

Comme il sait que «plus les carreaux sont éloignés, plus ils semblent de petite taille», Lorenzetti propose, pour construire un carrelage, de réduire «des deux tiers» son côté par rapport au carreau précédent. Explication :

Le but est de dessiner le carrelage ci-dessous :



voici le début de sa représentation :

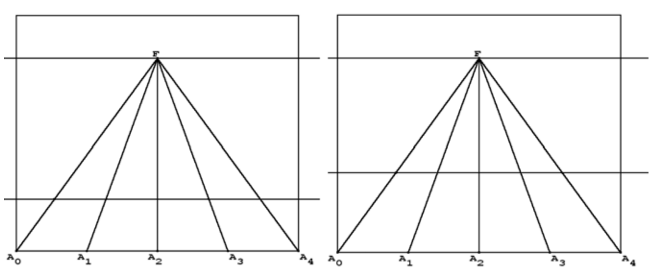


Comment construire la figure de droite ? Sur le bord inférieur, on garde des segments égaux.

- Puisque toutes les droites verticales, de (A_0B_0) à (A_4B_4) sont parallèles, leurs dessins convergent en un point F.
- Pour tracer les horizontales qui délimitent les carreaux, voici comment fonctionne la règle des deux tiers :
  — On trace la 1ère horizontale à une certaine hauteur ; on a choisi ici 27 graduations pour simplifier les calculs.
  — Pour tracer la 2ème horizontale, on calcule les deux tiers de 27 ; cela donne 18. On calcule $27 + 18 = 45$ et on place la 2ème horizontale comme l'indique le schéma (45ème graduation)
- Etc.

1) Complétez alors le schéma de droite pour obtenir le carrelage complet par ce principe des deux tiers.

2) Sauriez-vous le refaire ? Complétez ces deux schémas ; que constatez-vous ? Pourquoi ?



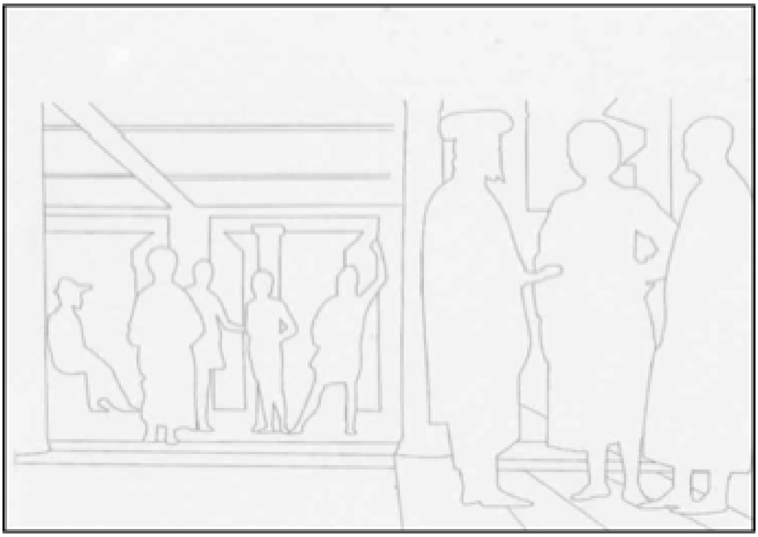
3) Tracer les diagonales des carrés correspondant au tracé en pointillé sur le dessin initial. Que se passe-t-il ?

ANNEXE 5

Devoir à la maison (petite étude géométrique du tableau de Piero de Francesca)

« La Flagellation du Christ » *peinture sur bois, 57,9 cm x 81,6 cm.*

D



A

1. L'artiste a pensé la composition du tableau grâce à ses connaissances en mathématiques ; on va étudier la « proportion » de rectangles, et les tracés en perspective. Voici un programme de construction qui aidera à comprendre la composition du tableau ; placer tous les points sur l'épure du tableau (figure ci-dessus) à partir des points A et D déjà donnés.

— Construire le point B sur le bord inférieur du tableau de telle sorte que AB = AD puis C tel que ABCD soit un carré.

— Vérifier que le point G $\in$ [DC) tel que DG = DB correspond au coin supérieur droit du tableau, puis noter E le 4ème sommet du tableau.

— Le quart de cercle de centre D passant par C coupe [DB] en un point F. Les points I $\in$ [DC] et M $\in$ [DA] sont tels que DIFM est un carré.

— Le quart de cercle de centre D passant par I coupe [DB] en un point L. Les points J $\in$ [DC] et K $\in$ [DA] sont tels que DJLK est un carré.

— La droite (IF) coupe [AE] en un point H et la droite (MF) coupe [GE] en un point N. Enfin, les diagonales du rectangle AEGD se coupent en un point O.

2. Le tableau est un rectangle dit «harmonique» : c'est un rectangle dont la longueur est égale à la diagonale du carré qui a pour côté sa largeur. De tels rectangles ont un format particulier ; le format d'un rectangle est le quotient de sa longueur par sa largeur.

a) A l'aide des dimensions données en titre de l'exercice, estimer le format du tableau réel à 0,01 près. Comparer avec le format d'une feuille A4 (21cm x 29,7 cm)

b) On prend comme unité le côté du carré ABCD. On pose donc pour tous les calculs : DA = DC = 1.

— Calculer DB. En déduire le format du rectangle harmonique AEGD.

— Calculer DF. En déduire que DI = $\sqrt{2}/2$. Les rectangles AHID et HEGI étant isométriques, vérifier qu'ils ont le même format que ABCD (et sont harmoniques).

— Calculer DL. En déduire que DJ = 1/2 . Le point J est donc bien le milieu de [DC].

Bibliographie

La démonstration et l'antiquité grecque

Guichard Jacqueline, *Statut et fonctions de la démonstration en mathématiques : quelques repères*, IREM de Poitiers, 1993

Euclide, *Les élémens de géométrie d'Euclide , traduits littéralement et suivis d'un Traité du cercle, du cylindre, du cône et de la sphère, de la mesure des surfaces et des solides*, avec des notes, par F. Peyrard, F. Louis (Paris), 1804

Hoüel Jules, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou Commentaire sur les 32 premières propositions des éléments d'Euclide*, Gauthier-Villars, Paris, 1867

Hérigone Pierre, *Cursus mathematicus, nova, brevi et clara methodo demonstratus*, l'autheur (Paris), 1634-1637

GUICHARD Jacqueline & GUICHARD Jean-Paul , « Le symbolisme chez Hérigone : Figure, lettre ou chiffre », *Actes du 17ème colloque Inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques,* La figure et la lettre, 23-24 mai 2008, Nancy.

Les chiffres et le monde arabo-musulman

Dahan-Dalmedico Amy, Peiffer Jeanne, *Une histoire des Mathématiques*, Points Sciences, Seuil, 1986

Guedj Denis, *L'empire des nombres*, Découvertes Gallimard, Gallimard, 1996

Guitel Geneviève, *Histoire comparée des numérations écrites*, Nouvelle bibliothèque scientifique, Flammarion, 1992

Ifrah Georges, *Histoire universelle des chiffres*, tomes 1&2, Bouquins, Robert Laffont, 1994

Les Nombres, Les dossiers de Science &Vie Junior, n°26, oct 1996

Origines des nombres et du calcul, Les cahiers de Science et Vie, n°32, août-sept 2009

Proust Christine, Les numérations anciennes, CultureMATH (dernière consultation le 12/06/2011)

http://www.dma.ens.fr/culturemath/materiaux/nombres/nombres-index.htm

Groupe Histoire des mathématiques, *Faire des mathématiques à partir de leur histoire*, tome I, première partie : « Les nombres dans l'antiquité », IREM de Rennes (dernière consultation le 12/06/2011)

http://www.irem.univ-rennes1.fr/ressources/docs_themes/histoire/brochures/FMPH/FMPH1-ch01.pdf

La perspective artistique et la Renaissance

IREM de Basse Normandie, *Les cahiers de la perspective*

Comar Philippe, *La perspective en jeu,* Découvertes Gallimard, Gallimard, 1992

Favennec Denis, *Douce perspective, Une histoire de science et d'art,* Ellipses, 2007

Alberti*, De la Peinture De pictura(1435),* Litterature Artistiq, Macula, 1999

Della Francesca Piero, *De la Perspective en Peinture,* Traduit et annoté par J.-P. Le Goff, Ed In Medias Res, Paris,1998

Cazier B, Chamontin F, « La perspective centrale au collège », Repères – IREM, N° 40, juillet 2000

La géométrie des illusions, Tangente, n° 80

La Perspective : Les Paradoxes De L'illusion, Textes et documents pour la classe, n° 739, sept 1997

Perspective et théorie des ombres, Collection Leonardo, Vinciana Ed, distribué par Lefranc & Lebourgeois

HyperCube*,* Numéro Spécial 39/40 de Février-Mars 2002

Mathématiques, cycle terminal de la série littéraire, collection Textes de référence – Lycée [LEGT]

Documents d'accompagnement des programmes, CNDP, janv 2006

Vogel Nicole, Perspectives, (dernière consultation le 12/06/2011)

http://nvogel.pagesperso-orange.fr/Dossiers/FichiersPersp/perspective/PerspCentrale.htm

http://pagesperso-orange.fr/nvogel/Dossiers/PERSP_DES.htm#Gen

Pages « géométrie dans l'espace » du Lycée Alain Borne, Montélimar (dernière consultation le 12/06/2011)

http://www.ac-grenoble.fr/maths/LAB/espace/espace.htm

Corda Alexandre, technique : la perspective, De bulles en bulles (dernière consultation le 12/06/2011)

http://debullesenbulles.free.fr/Dossiers/la_perspective/generalites.html

Video **:** Série « Palettes » : *La Flagellation* de Piero della Francesca, Ed. Montparnasse Video