PAVAGES ARCHIMEDIENS DU PLAN : UNE EXPLORATION FAVORABLE AUX ELABORATIONS MATHEMATIQUES

Mathias FRONT [1]
Irem de Lyon

« On ne peut développer avec fruit une théorie mathématique
sous la forme axiomatique que lorsque l'étudiant s'est déjà
familiarisé avec la question à laquelle elle s'applique,
en travaillant pendant un certain temps sur la base
expérimentale, ou semi-expérimentale, c'est-à-dire
en faisant constamment appel à l'intuition » [2]

Jean Dieudonné

Résumé: La question de la production de mathématiques par les élèves se pose peut-être d'autant plus aujourd'hui que le type d'activité qui leur est proposé actuellement dans le curriculum tend à se diversifier. Nous la posons ici dans le cadre d'une étude qui interroge la dialectique « élaboration théorique – action sur les objets » qui s'engage lors de processus de recherche. Nous étudions tout d'abord une situation mathématique, la détermination de tous les pavages archimédiens du plan, d'un point de vue mathématique et historique, en nous appuyant en particulier sur les travaux de Kepler et de ses successeurs sur ce thème. Les analyses réalisées confirment les potentialités de la question mathématique et permettent de concevoir une situation didactique, expérimentée ensuite à différents niveaux. Nous mettons alors en évidence l'engagement des protagonistes dans un processus de va et vient entre l'exploration du problème, en appui sur des manipulations d'objets, et les élaborations théoriques qui permettent d'en rendre compte.

Introduction

L'importance de la part expérimentale du travail mathématique fait peu débat chez les mathématiciens. Poincaré, Einstein et d'autres ont insisté sur la nécessaire considération, en contrepoint du pôle rationnel, d'un pôle centré sur l'intuition pour rendre compte de l'activité scientifique. André Weil, dans un article bien connu [3] a lui évoqué la fécondité mais aussi la complexité des phases qui précèdent les moments de construction plus formelle : *« Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une*

1 IUFM, Univ. Claude Bernard, Lyon I - mathias.front@laposte.net
2 On pourra retrouver cette citation dans une monographie de 1962 pour l'UNESCO de G. Walusinski intitulée « Aspects et problèmes de la rénovation de l'enseignement des mathématiques ». En ligne à l'adresse : http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001447/144788fb.pdf
3 André Weil, De la métaphysique aux mathématiques, dans André Weil : Œuvres Scientifiques, Collected Papers, Springer, 1979, vol 2 (1951-1964), p. 408-412.

théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la Gita, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir ». C'est ainsi une part complexe mais fondamentale de l'élaboration mathématique qui se joue en amont de la manipulation de connaissances institutionnalisées. L'hypothèse que nous faisons est que ces instants d'exploration, précédents le temps des certitudes, source du plaisir de faire des mathématiques et propices à la création, doivent être particulièrement pris en compte lorsqu'on cherche à observer l'émergence d'un savoir, ou à faciliter cette émergence chez l'élève dans la classe.

On peut définir de façon assez générale l'expérimental en mathématiques comme l'exploration et le développement des possibles, sans la recherche a priori de la vérité d'un de ces possibles, et ainsi tout ce qui est essai, simulation, construction de figures, mise en œuvre d'un processus et autre algorithme, … fait partie de l'expérimental en mathématiques [4]. Ceci sous entend qu'il existe un ensemble d'objets suffisamment familiers pour l'explorateur, ensemble qui nourrit le domaine d'expérience et permet, *a minima*, les conjectures. Imre Lakatos a déjà mis en avant l'importance des actions sur les objets pour les élaborations théoriques en mathématiques. Il écrit dans [Lakatos, 1984] : « *l'avancée dans la détermination de nouveaux objets de connaissances nécessite souvent une imbrication des phases de preuve et des retours aux objets de l'expérimentation, c'est à dire aux actions sur les objets* ». Des travaux plus récents en didactique ont mis en évidence la richesse d'une approche s'appuyant sur la dimension expérimentale [5] pour l'analyse de certaines situations didactiques, [Dias et Durand-Guerrier, 2005], [Dias, 2008] et permettent d'illustrer l'articulation fait d'expérience/résultat mathématique. Ces apports enrichissent également une réflexion déjà ancienne sur l'introduction de problèmes de recherche en classe, par exemple ceux de l'Irem de Lyon, autour de l'étude et de la diffusion des problèmes ouverts, [Arsac et Mante, 2007] [6]. Ces travaux et les échos qu'ils ont reçus montrent à la fois l'intérêt des enseignants pour ces pratiques de classe mais aussi la difficulté de mise en œuvre [Peix et Tisseron, 1998]. Et, bien que longuement étudiées et institutionnellement encouragées, ces pratiques restent finalement peu fréquentes chez les enseignants. Les travaux du groupe EXPRIME [7], [EXPRIME, 2010], questionnent cette difficulté, croisent les différentes approches mentionnées et mettent en évidence par l'étude du milieu objectif des élèves lors de situations de recherche, les objets mathématiques qui sont susceptibles d'être travaillés dans le cadre de la classe.

Nous nous proposons dans ce texte d'affiner, pour une situation caractéristique de cette problématique, la détermination de tous les pavages archimédiens du plan, le rôle de la dimension expérimentale, en précisant en particulier comment le recours à l'expérience, les

4 On notera que l'expérimental ainsi défini nécessite le respect de la logique formelle usuelle.

5 Que les auteurs caractérisent par le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets.

6 Sur Grenoble, des travaux sur une problématique proche, sont menés dans le cadre de l'ERTé Maths à Modeler depuis de nombreuses années. Ils ont abouti à l'élaboration du dispositif SiRC (Situations de Recherche en Classe) qui se révèle fécond, en particulier, pour le travail sur la preuve. On pourra se référer à [Grenier, 2008].

7 EXPRIME, EXpérimenter des Problèmes de Recherche Innovants en Mathématiques à l'Ecole, est une équipe de recherche regroupant des chercheurs de l'Université Lyon 1 (UFR de Mathématiques, IREM, S2HEP, IUFM) et de l'INRP.

actions sur les objets contribuent à l'avancement de la recherche et à la production de mathématiques. Nous avons recours à des approches historique et didactique qui, nous le verrons, se complètent pour mettre en évidence les conditions de ces constructions de savoirs.

I. — Eléments mathématiques, historiques et épistémologiques

Des vestiges antiques[8] montrent que l'assemblage de polygones est depuis longtemps et pour de nombreux peuples une source d'inspiration au moins artistique. La situation considérée dans cet article étudie des assemblages, particulièrement simples, qui n'utilisent que des polygones réguliers.

A. Quelques éléments mathématiques

Dans le plan euclidien E, nous considérons :

— des polygones : parties compactes connexes du plan, limitées par un nombre fini de segments, et d'intérieures non vide.

— des polygones réguliers : polygones convexes dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

— des pavages de E par des polygones : recouvrements de E par une union de polygones, dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

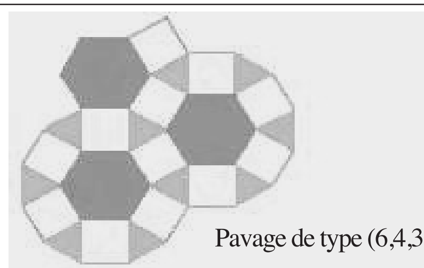
Les polygones d'un pavage sont aussi appelés pavés, tuiles, ou briques. Un pavage est dit monoédral s'il a un seul pavé modèle, c'est-à-dire si tous ses polygones sont égaux, diédral [respectivement triédral, ...] s'il a deux [resp. trois, ...] pavés modèles. Par ailleurs un pavage est côte-à-côte ou strict si l'intersection de deux polygones distincts est :

— ou bien vide,

— ou bien un sommet commun de plusieurs polygones,

— ou bien une arête commune des deux polygones.

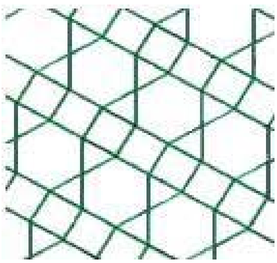
Dans ce cas, on définit de manière naturelle ce que sont un sommet (ou nœud), une arête (ou côté) et une face du pavage et un pavage est alors dit archimédien (ou semi-régulier), s'il est strict, si tous les pavés sont des polygones réguliers et si tous les sommets ont des voisinages identiques à une symétrie près. Si par exemple, en tournant autour de n'importe quel nœud N dans le sens direct, on trouve successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone, on trouvera aussi successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone en tournant autour de tout autre nœud soit dans le sens direct, soit dans le sens rétrograde. Un tel pavage sera dit de type (m, n, p, q).



Pavage de type (6,4,3,4)

8 Ici la rosace du temple de Diane à Nîmes.

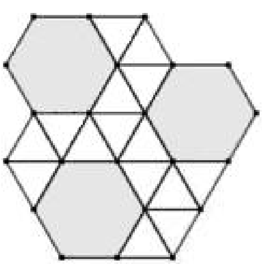
Un pavage régulier, est un pavage archimédien monoédral. Il est à noter qu'il existe des pavages stricts dont les pavés sont des polygones réguliers mais qui ne sont pas archimédiens :



Nous avons les résultats suivants :

> **R_1** : Il existe 3 et seulement 3 pavages réguliers, les pavages dont les tuiles sont soit des triangles équilatéraux soit des carrés soit des hexagones.
>
> **R_2** : Il existe 11 pavages archimédiens à similitude près (12 à similitude propre près).

Voici par exemple un morceau du pavage archimédien de type (3,3,3,3,6) :



Nous ne proposons ci-dessous que quelques éléments de preuve de ces résultats.

Pour R_1 : L'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés admet pour mesure en radians $\frac{n-2}{n}\pi$. S'il existe un pavage régulier, la condition suivante est une condition nécessaire : en un nœud du pavage on doit avoir : $k\frac{n-2}{n}\pi = 2\pi$, où k est un entier supérieur ou égal à 3. Cette condition s'écrit aussi : $(n-2)(k-2) = 4$. Les seules solutions entières qui conviennent sont $n = 3$ *et* $k = 6$, $n = 4$ *et* $k = 4$, $n = 6$ *et* $k = 3$. Elles correspondent à des pavages par, respectivement, des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers. Les types respectifs sont (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4) et (6,6,6).

Pour R_2 : Nous proposons l'amorce d'une démonstration qui s'inscrirait dès le début dans un registre numérique. Autour d'un nœud d'un pavage archimédien on a la relation :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 2\pi$$

où k est le nombre de polygones et donc de secteurs angulaires autour d'un nœud et où a_i est la mesure en radian d'un des k secteurs. Par ailleurs, si n_i est le nombre de côtés du polygone régulier i, on a : $a_i = \frac{n_i-2}{n_i}\pi = \left(1-\frac{2}{n_i}\right)\pi$, et donc la relation précédente devient :

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i} = \frac{k}{2}-1$$

On retrouve une expression équivalente par exemple dans l'ouvrage de référence de Grünbaum et Shephard, [Grünbaum et Shephard, 1987]. Son traitement est « rapide » : « *It is easy to check that only 17 choices of the positive integers n_i satisfy this equation and hence only 17 choices of polygons can be fitted round* *a vertex so as cover a neighborhood of the vertex without gaps or overlaps* ».

La détermination de ces n-uplets d'entiers par une démarche exhaustive représente toutefois un nœud du problème et plusieurs auteurs ont éprouvé des difficultés dans cette étape ou l'ont éludée. Les lecteurs intéressés par la preuve complète de R_2 pourront la consulter dans [Front et Legrand, 2010]. Elle comble cette lacune et permet ensuite de déterminer explicitement les 11 pavages semi-réguliers du plan.

B. Eléments historiques

Quel exemple, en effet, plus fortifiant et plus consolant que celui d'un grand esprit dont on suit pas à pas les efforts et les hésitations, les succès comme les faiblesses !
H. Brocard[9]

Nous avons ici deux objectifs. Tout d'abord, dans un cadre modeste, « nous allons essayer de relier dans un processus d'intelligibilité un certain nombre d'événements historiques, c'est-à-dire pour reprendre l'expression de Paul Veyne : construire et comprendre une intrigue », [Barbin, 1997], intrigue relative ici aux pavages archimédiens. Ceci nous permettra en particulier de comprendre la diversité des modalités d'émergence des résultats concernant ces pavages. Et conjointement, notre recherche d'éléments historiques doit favoriser notre enquête sur les heuristiques mises en œuvre pour l'exploration de cette question[10]. En effet nous visons l'identification de conditions d'élaboration de certains processus mis en œuvre par nos prédécesseurs et nous cherchons en particulier à repérer, chez ces précurseurs, les relations aux objets et les actions effectuées sur ces objets.

Dans les matériaux à notre connaissance, c'est dans le livre V de « La collection mathématique » de Pappus[11], [Pappus, ~340/1933] que nous observons non seulement une référence aux pavages réguliers mais également une démonstration de R_1. Cet apport est fourni dans le préambule de ce livre que Pappus adresse à Mégéthius, géomètre connu seulement par cette mention de son nom. Pappus introduit son étude sur ce point par une considération sur l'« intuition naturelle » que l'on doit accorder aux animaux, non doués de raison, par exemple aux abeilles construisant leurs alvéoles : « Elles ont cru que ces figures devaient être absolument juxtaposées et avoir leurs côtés communs, afin que des substances étrangères ne puissent tomber dans leurs intervalles et venir ainsi souiller le fruit de leurs travaux. Or trois figures rectilignes étaient susceptibles de remplir cette condition, c'est à dire des figures régulières, équilatérales et [équiangles ; car les] figures dissemblables répugnaient aux abeilles ... ». Pappus prouve ensuite qu'« il y a trois figures au moyen desquelles on peut remplir l'espace qui règne autour d'un point : le triangle, le carré et l'hexagone », mais il s'arrêtera là et ne tentera pas de généraliser son étude aux pavages semi-réguliers du plan. On peut alors se demander si ce n'est pas autant à lui qu'aux abeilles que « répugne » l'utilisation de figures dissemblables. On retrouvera la même difficulté dans son étude des polyèdres de l'espace. En effet, alors qu'il a à sa disposition les 13 polyèdres d'Archimède, il écrit : « nous négligerons pour le moment ces treize figures comprises sous les polygones inégaux et dissemblables parce qu'elles sont moins régulières ... ».

9 Extrait d'une présentation de l'ouvrage « Astronomi opera omnia » par H. Brocard dans les « Nouvelles annales de mathématiques », deuxième série, tome XVIIème , 1878.

10 Nous rejoindrons ici une position d' E. Barbin, [Barbin 2001] : « […] les textes anciens ne doivent pas être considérés comme des pièces dans l'échafaudages des savoirs constitués, mais comme des événements, en tant que trace d'une pensée en acte ».

11 Pappus, mathématicien grec vécut entre la fin du III ème siècle et la première moitié du IVème siècle après JC.

Ainsi, c'est une centration « excessive » sur la régularité des objets à considérer qui se révèle ici un obstacle à des élaborations plus riches, la manipulation de certains archétypes liés à la « régularité » restant globalement un aspect délicat des constructions mathématiques.

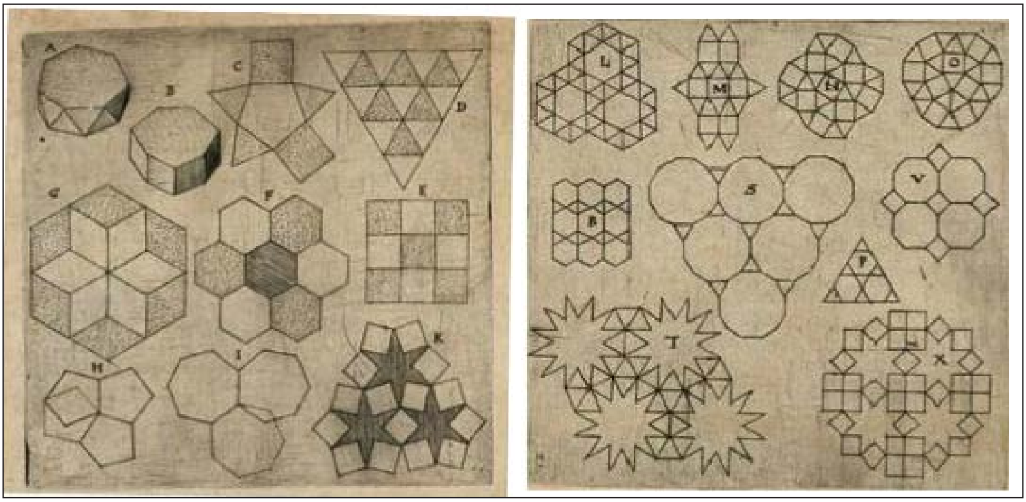
C'est à Kepler que H.S.M. Coxeter attribue les avancées décisives sur les pavages semi-réguliers. Dans « Kepler and Mathematics », [Coxeter, 1974], il décrit les différent travaux de généralisation de Kepler en géométrie et, concernant les pavages, « *More remarkably, he enumerated the uniform tessellations (analogous to the Archimedean solids). In these the tiles are regular polygons of several kinds, but with the same arrangement at each vertex* [Figs. D, E, F, L, N, S, V, Mm, Li] ».

Il fait ici référence aux planches de l' « Harmonices Mundi », [Kepler, 1619], dont voici deux extraits [12] :

On peut noter la qualité remarquable des dessins de ces planches et observer la très grande familiarité de Kepler avec les objets reproduits, ce qui fait dire à B. Grübaum et G.C. Shepard, [Grünbaum et Shephard, 1977] : « *The drawings [...] show that Kepler had a rather pragmatic and experimental approach to tilings* ».

Mais quelle est exactement cette approche ? [13] Pour tenter de le savoir, penchons nous maintenant sur les écrits de Kepler. Ces écrits mêlent des formes variées et se révèlent ainsi d'une grande richesse. Les parties les moins académiques laissent entrapercevoir la pensée créatrice de Kepler qui, d'après François Sauvageot [14], « tient à nous faire part de toutes ses errances, ses fausses routes, ses déductions ». Elles nous permettent ainsi de mieux comprendre les motivations du chercheur.

Dans cet article, nous nous contenterons d'évoquer de brefs passages du livre II de



12 Ces planches sont disponibles en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b26001687.item.r=KEPLER.f3.langFR

13 Il est à noter que Kepler mêle définitions et propositions traitant du plan et de l'espace et qu'une étude plus complète du texte se doit de considérer conjointement les deux aspects.

14 Texte en ligne, à l'adresse : http://images.math.cnrs.fr/MAN-Much-About-Nothing.html

l'Harmonices Mundi [15]: « *De congruentia Figurarum Harmonicarum* », et nous étudions tout d'abord, les trois propositions essentielles suivantes :

« XIX : Un lieu plan est empli six fois à partir des surfaces planes de deux figures ; deux fois à partir de cinq, une fois à partir de quatre, trois fois à partir de trois angles ».

« XX : Un lieu plan est empli congruement quatre fois à partir d'angles plans de trois espèces ».

« XXI : les figures planes de quatre ou de plus d'espèces ne congruent pas avec les angles un à un, pour emplir le lieu entier ».

Pour la proposition XXI par exemple il s'agit de comprendre qu'il n'est pas possible de paver le plan si l'on souhaite assembler des polygones d'au moins quatre espèces différentes. En effet la somme des angles serait supérieure ou égale à un angle du triangle, plus un angle du carré, plus un angle du pentagone, plus un angle de l'hexagone ce qui dépasse déjà l'angle plein.

Dans les propositions XIX et XX, Kepler traite respectivement les cas où l'on assemble des figures de deux espèces différentes et trois espèces différentes.

Les démonstrations de ces propositions apparaissent, à quelques détails près, exhaustives et donnent ainsi une démarche aisément reproductible, au contraire de certaines approches plus modernes et plus éloignées des objets sensibles.

Attardons nous sur un extrait étonnant. Lors de la démonstration de la proposition XX, où Kepler traite, rappelons-le, d'assemblage de figures de trois espèces, il écrit :

Et « *un angle du triangle n'est pas joint [...] ni avec l'angle de l'Heptagone ou de l'octogone ou du polygone de neuf côtés chacun en particulier en effet il reste pour l'angle des figures de troisième espèce ou 40 vingt-et-unièmes, ou 11 sixièmes, ou 16 neuvièmes [de droit], tels que n'a aucune figure régulière* ».

Ce passage est extrêmement surprenant. Kepler, particulièrement familier avec les polygones réguliers, ne semble pas reconnaitre les angles des polygones réguliers à 42, 24 et 18 côtés. En effet l'angle « 40 vingt-et-unièmes de droit » est l'angle du polygone à 42 côtés, « 11 sixièmes de droit » est celui du polygone à 24 côtés et « 16 neuvièmes de droit » est celui du polygone à 18 côtés. Kepler passe ainsi à côté des candidats pavage dont les types seraient (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18). [16]

Au-delà d'une simple erreur calculatoire qui reste peu probable, on peut constater qu'à cet instant le contrôle du raisonnement par le retour aux objets présente une difficulté. Pourtant Kepler (Proposition XXIII du Livre I) sait déterminer l'angle d'un polygone régulier : « *Si tu enlèves quatre du double du nombre des angles d'une Figure, tu formeras le Numérateur des parties de l'angle droit que vaut l'angle de la figure ; de plus le Dénominateur des parties est le nombre lui-même des Angles* » et propose, dans le livre I, un classement des polygones qui s'appuie sur la nature du nombre de leurs côtés, double, quadruple d'un nombre premier, d'un carré d'un nombre premier [17] ...

15 [Kepler, 1619] et [Kepler 1619/1980], traduction française de l'Harmonices Mundi par Jean Peyroux.

16 Il se trouve que ces candidats ne produisent pas de pavages archimédiens du plan mais pour des raisons différentes de celles données par Kepler.

17 Kepler, étudiant ces polygones, cherche « si leurs angles sont géométriquement constructibles, et donc s'ils sont « descriptibles » ; si leurs côtés sont de manière plus ou moins proche, exprimables en fonction de leur diamètre et sont de ce fait connaissables » [Simon, 1979].

Si on fait l'hypothèse que Kepler ne « reconnaît » pas les angles des polygones à 18, 24 et 42 côtés on peut se questionner sur :

— la connaissance que Kepler peut avoir des objets : est-ce une connaissance empirique ou théorique ?
— la constitution du milieu de la situation de recherche pour Kepler : les polygones qui font partie du milieu objectif, sont-ils ceux que l'on est en capacité de construire réellement ou théoriquement, sont-ils ceux que l'on a déjà manipulés ou tous ceux que nous serions amenés à manipuler ?
— l'influence des « non entia », les riens [18], ces polygones non connaissables. La présence de l'heptagone dans le candidat pavage de type (3,7,42) suffit-elle à disqualifier ce dernier sans autre procès ?
— et plus généralement sur le rôle de la représentation du monde de Kepler [19] et sa recherche de l'harmonie. Jusqu'à quelle mesure la « congruence des figures harmoniques » peut-elle s'encombrer de polygones à 7, 9, 18 côtés, voire à 24 côtés « dont la science des côtés s'écarte plus longuement dans des degrés plus éloignés ... » [20] ?

Cet exemple de questionnement des rapports de Kepler aux objets (et plus généralement des théories sur l'harmonie du monde qu'il élabore à l'aube du XVII$^{\text{ème}}$ siècle [21]), montre tout son intérêt, y compris en vue de la modélisation des milieux de situations de recherche pour la classe. Le rôle et les modalités de la manipulation des objets, plus ou moins familiers, apparaissent clairement et nous invite à approfondir cette piste d'analyse des processus de recherche.

Une succession lacunaire

Nous ne pourrons être ici exhaustifs mais nous souhaitons prolonger la trame de l'intrigue qui mène de Kepler aux auteurs du vingtième siècle.

A. Badoureau réalise une autre étape remarquable quand il présente en 1881 ses résultats dans son mémoire sur « les figures isoscèles », [Badoureau, 1881], paru dans le journal de l'école polytechnique. Il propose ses résultats géométriques, suite à une étude des travaux de Bravais sur la cristallographie. Il cite Lidonne, Gergonne et Catalan pour leurs travaux sur les polyèdres, mais à aucun moment Kepler dont il semble ignorer les résultats. Son approche est nouvelle, avec une formulation très algébrique, presque contemporaine. Il est amené à « considérer des assemblages binaires, ternaires, quaternaires, quinaires et senaires » puis énonce une relation algébrique permise par les progrès dans ce domaine : Il donne ensuite sans justification une liste des assemblages possibles (sans en oublier) puis en utilisant un théorème sur la nécessaire parité du nombre de côtés d'un des polygones dans certains assemblages ternaires, il en exclut et donne alors une liste de 8 pavages. Il manque les pavages de type (6,6,6), (3,3,3,3,6) et (3,3,4,3,4). Ce dernier sera toutefois réintégré par la suite. La planche de synthèse fera dire, à juste titre, à Coxeter, dans son texte sur Kepler déjà cité, que Badoureau a oublié le pavage de type (3,3,3,3,6) si important à ses yeux :

"*One of them (his Fig L, our Fig. 11 .8), is exceptional, because it is chiral like his snub dodecahedron : it cannot be continuously moved into the position of its reflected image.*

18 Kepler, cité par Simon : « nous affirmons à juste titre que le côté de l'heptagone fait partie des *non-êtres* ; j'entends connaissables ».
19 On pourra consulter à ce propos « Le cas Kepler » de W. Pauli, [Pauli, 2002] et « Kepler astronome astrologue » de G. Simon, [Simon, 1979].
20 Extrait de la proposition XL du livre I, [Kepler, 1619]
21 Kepler travaille essentiellement sur des énoncés quantitatifs et mathématiquement démontrables. Pour autant « il représente un cas limite, celui d'un des fondateurs de la science moderne qu'il est pourtant impossible de réduire aux normes de notre modernité », [Simon, 1979].

In 1881 the French geometer A. Badoureau made a fresh attempt to enumerate the uniform tessellations. Although he rediscovered all the rest, he missed the chiral one, Kepler's L, and this mistake was copied by at least two later authors ».

Peut-être Coxeter évoque-t-il là, les écrits de L. Lévy, qui fit paraître un article dans la revue de la société philomathique, [Lévy, 1891]. Dix ans après Badoureau, le texte de L. Lévy s'avère être un additif aux travaux de Badoureau que Lévy estime trop peu connus et qu'il reprend sans critique. Le texte permet de préciser des assemblages possibles associant polygones étoilés et polygones convexes de façon très sommaire mais l'apport principal, bien que mineur par rapport aux intuitions de Kepler, offre quelques éléments pour l'étude de ce que l'on nomme aujourd'hui les pavages n-réguliers (Les pavages n-réguliers possèdent des nœuds de n types différents). Plusieurs auteurs se sont ensuite appuyés sur le texte de L. Lévy, mais le lien avec les travaux de Kepler ne sera réalisé que vers 1905 par Sommerville et leur richesse ne sera intégrée que postérieurement. Ainsi, il aura fallu, de façon surprenante, près de 300 ans pour que ces travaux, fondamentaux dans ce domaine, voient à nouveau le jour. Et cette synthèse tardive, pourrait expliquer la quasi-absence des pavages archimédiens dans la culture mathématique commune contemporaine.

On observe ainsi dans les différentes études passées de ce problème, deux approches essentielles, celle de Kepler et celle de Badoureau. Les époques sont différentes, les formulations sans rapport. Mais ces pistes ouvertes par les précurseurs nous renseignent sur des avancées dans la connaissance des objets et favorisent la compréhension des élaborations théoriques qui les font naitre. Nous pouvons de plus noter que les objets considérés ici, aussi faciles d'accès soient-ils, ont eu et ont encore une vie mathématique mouvementée et que la fiction d'une rigueur parfaite des mathématiques n'a pas lieu d'être. L'étude des démarches historiques qui ont mis à jour les pavages semi-réguliers prouve que si rigueur il y a, elle apparaît, là encore, a posteriori, et bien après l'élaboration des concepts.

II. — En vue de l'élaboration d'une situation de recherche pour la classe

Ainsi la notion de pavage archimédien a mis très longtemps à trouver sa place dans la communauté mathématique et n'a que très peu diffusé après les premières synthèses du milieu du vingtième siècle. On ne trouve aujourd'hui que très peu d'ouvrages français l'évoquant et les résultats associés, pourtant élémentaires, restent relativement peu connus de la communauté des enseignants de l'Education Nationale en France. Il vit aujourd'hui plutôt comme élément de théories plus générales dans le monde de la recherche mais n'a pas su trouver sa « niche écologique », au sens de Chevallard, dans l'enseignement mathématique secondaire.

Pour autant, à l'issue du premier travail épistémologique il nous est apparu vraisemblable de construire une situation autour de cette recherche des pavages archimédiens du plan. Nous avons, dans un premier temps, testé l'hypothèse d'un jeu possible, en formation d'étudiants préparant le concours de professeur des écoles. Le dispositif mis en place, s'appuie sur les hypothèses épistémologiques précédemment explicitées et nous adoptons le cadre de la théorie des situations de G. Brousseau pour l'élaboration de notre situation pour la classe[22].

22 L'essentiel de nos observations ne concernent toutefois que les niveaux adidactiques de la structuration du milieu dans cette modélisation dont la pertinence a fait ses preuves pour analyser des situations de mises en œuvre de problèmes de recherche. On pourra par exemple consulter [Houdement, 2004].

A. Eléments du milieu

Le scénario proposé est celui correspondant à la mise en œuvre d'un problème ouvert :

— Dans un premier temps, l'enseignant présente le type d'activité abordée et les différents temps (écoute, recherche individuelle, recherche collective, rédaction d'une affiche par groupe, présentation des productions et débat, institutionnalisation).
— Puis il dispose au tableau une version lisible par tous de l'énoncé et demande à un étudiant de le lire.
— Il demande ensuite à un autre étudiant ou éventuellement au même, d'expliquer quel est le problème mathématique. Cette phase d'explicitation est particulièrement nécessaire pour les étudiants les moins familiers avec les objets considérés et le vocabulaire associé. Elle participe de l'appropriation du problème. Nous souhaitons qu'il n'y ait pas d'ambiguïté immédiate sur les notions de polygones réguliers et de pavage du plan pour entrer dans la phase de recherche suivante.
— Le premier temps de recherche est donc individuel et dure environ cinq minutes. Ce temps permet une première appropriation de l'énoncé par tous, un début de représentation de certains objets les plus familiers, et éventuellement des premiers raisonnements pour les plus rapides.
— A la fin de ce temps, si l'enseignant après avoir circulé auprès des étudiants constate une incompréhension majeure, il peut faire un point d'explicitation avec la classe. Sinon il propose de passer à la deuxième phase de la séance : un temps de travail par groupe de 3 ou 4. Pour cette expérimentation ce temps de recherche sera d'environ une heure et quinze minutes.
— Le temps suivant est celui de la présentation des productions et du débat sur ces productions. Une réfutation/validation des propositions est effectuée.

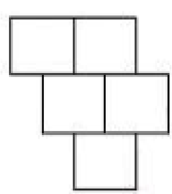
La séance se termine sur un temps d'institutionnalisation. Elle portera ici sur la définition d'un polygone régulier, la valeur en degré de la mesure des angles d'un polygone régulier, la preuve de R1, un début de démarche amenant à la preuve de R2, un aperçu de la démarche de Kepler et des planches qu'il a produites, la présentation des 11 pavages archimédiens (On trouvera quelques pistes pour ces institutionnalisations en annexe 3). L'énoncé est le suivant :

Une situation de recherche en classe

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers, sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones.

On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous :



La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.

A l'issue de la recherche, réaliser une affiche présentant vos résultats, leur justification, la démarche de résolution et les difficultés éventuelles.

Le milieu matériel initialement envisagé est un environnement papier-crayon : cet environnement de base doit permettre les premiers essais et conjectures. Il reste le support fondamental pour organiser les premiers raisonnements. Doit-il être complété ? Le fait de proposer le problème initialement dans un cadre géométrique semble devoir imposer d'enrichir le milieu matériel avec des éléments courants :

— le matériel de base en géométrie : règle graduée ou non, équerre, compas, rapporteur.

— du papier blanc et coloré, ou des fiches cartonnées, des ciseaux, de la colle, du scotch permettant des manipulations simples dans l'espace sensible.

Doit-on envisager du matériel complémentaire ?

— Il est tentant d'imaginer d'enrichir le milieu matériel par du matériel type Geomag, polygones réguliers rigides ... toutefois il est nécessaire de se rappeler qu'il est important de ne pas réduire la situation et en particulier les raisonnements initiaux sur l'égalité des longueurs des côtés, sur les angles des polygones réguliers. Or le matériel existant n'offre pas les degrés de liberté nécessaires. Il peut alors être envisagé de fabriquer du matériel spécifique.

— Concernant la calculatrice : l'anticipation des procédures montre que le registre [23] numérique sera vraisemblablement investi et que plusieurs niveaux d'utilisation de la calculatrice sont possibles.

 • Pour des procédures utilisant des mesures d'angles en degré la calculatrice peut s'avérer nécessaire pour, à la fois la détermination des angles des polygones réguliers, et également pour des tests sur les assemblages potentiels. Compte-tenu des objectifs, l'usage de la calculatrice apparait pertinent.

 • Pour des procédures qui s'orienteraient sur la recherche d'entiers n_i tels que $\sum 1/n_i = 1$ les expérimentations du problème dit des « fractions égyptiennes » par le groupe EXPRIME ont montré que l'utilisation de la calculatrice était particulièrement profitable et évitait les écueils d'un calcul littéral complexe.

— La réalisation de dessins suffisamment soignés permet de visualiser qu'un assemblage va ou non permettre de paver le plan. Et il se trouve que certaines fonctionnalités des logiciels de géométrie dynamique permettent de construire facilement [24] des assemblages de polygones réguliers. Ainsi la question de l'instrumentation se pose ici de façon non anecdotique. Les nombreux travaux qui ont établi des résultats sur de telles instrumentations montrent leurs intérêts et leurs inconvénients et en particulier le risque de détournement des démarches mathématiques au profit d'une manipulation non structurée. Ainsi ici, si l'aspect validation des propositions d'assemblages oriente vers l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, l'aspect élaboration d'axiomatiques locales, d'axiomatiques globales au niveau d'un pavage et de raisonnements structurant la recherche d'exhaustivité nous a incités dans un premier temps à expérimenter sans de tels logiciels. Ultérieurement, quand d'autres choix seront faits, il sera nécessaire de s'assurer de l'effectuation de la genèse instrumentale.

— La question de l'utilisation d'un tableur et/ou d'un logiciel de calcul formel peut également se poser. Un tel outil peut permettre de structurer la démarche, de décharger les élèves de certaines difficultés techniques en particulier du point de vue organisationnel. Ces deux outils peuvent être utiles pour les deux démarches prin-

23 Au sens de Duval.

24 En particulier GeoGebra

cipales envisagées, ils nécessitent tous les deux une maitrise technique à prendre en considération.

B. Premiers éléments d'analyse

Les analyses qui suivent sont donc issues d'une première expérimentation qui a eu lieu en début d'année scolaire avec des étudiants de l'IUFM de Lyon préparant le concours de professeur des écoles, pour la deuxième année consécutive. Deux groupes sont filmés et enregistrés, les échanges lors du débat également.

L'énoncé et son appropriation :

La projection et la reformulation de l'énoncé ont engendré trois questions : « Sans trou, ni recouvrement ... ? », « Quelle est la forme à paver ... ? », une troisième à propos de la restriction aux pavages stricts. Lors de cette expérimentation il n'y a pas eu de question sur la pluralité possible des types de polygones réguliers. Un seul groupe de quatre étudiantes a alors longuement cherché à comprendre l'intérêt du problème, n'imaginant que des pavages réguliers et il a fallu l'intervention du professeur pour que ce groupe investisse la notion de pavages archimédiens dans toute sa généralité au delà des pavages réguliers.

En dehors de ce cas nous n'observons aucune restriction de la recherche. Il apparait ainsi que l'énoncé permet une appropriation satisfaisante et très rapidement de nombreux dessins apparaissent (y compris des pavages à base de parallélogrammes) ainsi que les premiers questionnements : « Qu'est-ce qu'un polygone régulier ? » « Peut-on tous les construire, en particulier celui à 5 côtés ? » ...

Les objets effectivement mobilisés et les actions sur ces objets :

Les polygones réguliers : les étudiants considérés ont tous une proximité avec la géométrie de collège et en particulier avec le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone régulier. Ils sont par ailleurs relativement habiles dans la manipulation de la règle et du compas. Il n'est donc pas surprenant de voir apparaitre pour tous les groupes les trois pavages réguliers. Mais il semble bien que la familiarité de ces étudiants avec ces objets n'aille pas bien au delà. En effet, le pentagone est en général manipulé très maladroitement. On observe pour quelques groupes l'utilisation des polygones à 10 et 12 côtés, parfois 16 mais les polygones à 7 et 9 côtés sont peu évoqués et les autres non évoqués. Pour un certain nombre d'étudiants, il est à noter que le fait de ne pouvoir construire dans l'espace graphique un représentant de l'objet bloquera la progression. On peut toutefois émettre l'hypothèse que pour certains étudiants, l'exigence de soin attendue dans le cadre de cette préparation au concours et l'importance donnée aux constructions à la règle et au compas peuvent agir comme des freins à l'expérimentation sur les objets polygones réguliers.

Nous proposons ci-dessous des extraits des retranscriptions des échanges pour un des groupes filmés afin de montrer l'obstacle lié à la construction de l'octogone.

Début de la recherche collective à 6'30.

14'35 : une étudiante du groupe qui a déjà tracé un triangle équilatéral et un carré, dessine à main levée, un octogone, efface puis retrace un hexagone, puis pendant une longue minute hésite, débute le tracé d'un polygone, l'efface, recommence et finit par abandonner ce tracé qui devait compléter une liste de polygones réguliers.

19' : une autre étudiante : « je sais même pas comment on dessine l'octogone » .

40'53 : une troisième : « il m'énerve ce putain d’octogone je sais même pas combien c’est son angle ».

56’58 : la même : « Faut qu’on le sache l’octogone, déjà j’arrive pas à le dessiner ».

Il apparait bien ici que la familiarité avec les polygones réguliers, qui doit pour certains, aller jusqu’à la possibilité de les construire de façon suffisamment précise, est nécessaire à la progression dans la recherche, à l’avancée dans la connaissance des pavages semi-réguliers.

Concernant le nombre de polygones réguliers et toujours pour le même groupe :

59’ : E2 : « Est-ce qu’on les a tous les polygones réguliers ? »

E3 : « une infinité ».

E2 : « Tu crois qu’il y en a une infinité ? »

E3 : « Vu que 180 c’est un angle plat ... 135 ... Faut qu’on aille ... là on a 135 faut qu’on aille jusqu’à ce qu’on obtienne inférieur à 180. Tant que t’es inférieure à 180 tu pourras faire un truc qui tournera au bout d’un moment ».

Cet extrait montre une approche intuitive de l’infinité du nombre de polygones réguliers qui se base sur l’idée que la création d’un angle même petit suffit après un certain nombre d’étapes à faire une courbure sensible et sans doute finalement un tour complet. Mais elle montre en même temps que leur approche des polygones réguliers est hésitante et pragmatique, ce qui peut se confirmer aussi par la remarque suivante : « A 100° ça existe pas sinon on le connaitrait ». Pour ce groupe, le manque de familiarité avec ces polygones qui se retrouve donc tout au long de la recherche, a limité les avancées.

Pour aller un peu plus loin dans l’analyse de ce passage, on peut confirmer que la difficulté se focalise à partir d’un certain moment sur la détermination de l’angle de l’octogone :

18’34 « il faudrait savoir l’angle ».

19’53 « il doit bien y avoir un moyen de calculer l’angle ... l’angle de l’octogone »

Puis toujours à propos de l’octogone mais déjà au bout de 30 minutes :

30’ 03 : E1 : « Mais vous êtes sur, qu’un octogone, ça a tous le même angle ? »

E2 : « Oui, c’est obligé c’est un polygone régulier ».

E2 : « C’est obligé, sinon ça serait pas beau hein ».

E1 : « Comment on fait ? »

E1 : « Là je suis en train de construire un hexagone ».

E2 : « Oui avec 120 tu construis un hexagone ... Faut agrandir, oui à mon avis c’est 135, c’est pas 120 ».

E1 : « 150 ... ».

E1 : « Faut qui soit moins grand que l’hexagone ».

E2 : « Si, non il doit être plus grand ».

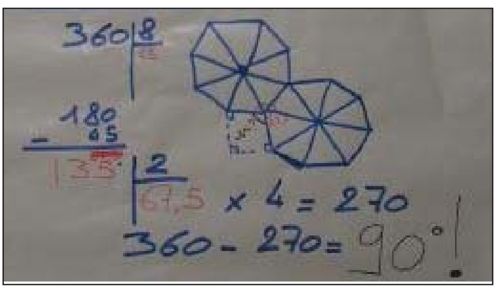
E3 : « Il doit être plus grand pour arriver à écarter ».

E2 : « Oui c’est ça c’est 150 ».

On retrouve là encore une approche très pragmatique ... un point de vue esthétique et aussi une idée très physique de l’angle des polygones réguliers et en particulier l’idée qu’on va écarter les côtés pour obtenir un angle plus grand. Il apparaît finalement que ce groupe d’étudiantes n’a pu élaborer un raisonnement sur les angles des polygones réguliers permettant de les cerner avec suffisamment de précision pour pouvoir construire la suite de la recherche sur une base solide. Ce n’est pas le cas pour tous les groupes, et nombreux sont ceux qui, s’appuyant sur une certaine familiarité avec l’hexagone, ont pu déterminer son angle et reproduire la démarche pour les autres polygones réguliers.

De nombreux autres éléments (absence de manipulation des pentagones, heptagones, ennéagones,..., recherche d'angles de mesure entière, ou, *a contrario*, appui sur une liste des angles pour produire une recherche fructueuse) confirme le rôle central que joue l'objet « angles de polygones réguliers » dans cette situation.

Concernant l'angle plein et les assemblages autour d'un nœud : pour de nombreux groupes la condition « la somme des mesures en degré des angles des polygones autour d'un nœud vaut 360 » apparait assez vite comme constatation sur le dessin, en premier lieu pour les nœuds d'un pavage régulier. Elle apparait plus tardivement comme condition nécessaire en tant que telle. Comme on peut le voir sur l'image ci-contre, elle peut permettre soit de vérifier qu'un assemblage potentiel est valide, soit de déterminer la mesure de l'angle « manquant ». Cette configuration a été souvent étudiée.



Cet extrait nous montre ici, un groupe relativement à l'aise sur la détermination de l'angle d'un octogone régulier et sur l'étude de l'angle nécessaire pour compléter un assemblage initié avec deux octogones réguliers.

Changement de registres : Pour autant tous les groupes ne sont pas passés clairement au registre numérique et on observe fréquemment des constructions très soignées dans l'espace graphique, et aussi un recours à l'utilisation de gabarit de polygones réguliers, ceci afin de déterminer si tel ou tel assemblage est possible. Ainsi un groupe travaillera essentiellement en manipulant des polygones réguliers découpés dans du papier (confère annexe 1a). Cette manipulation lui permettra d'émettre la conjecture suivante : « si le nombre de côté du polygone est un multiple de trois il peut être assemblé par un triangle, si multiple de quatre assemblages par un carré ». Cette conjecture sera déstabilisée par le cas du dodécagone et invalidé par expérience manipulatoire avec l'étude de l'ennéagone et de l'hexadécagone. Pour ce groupe, l'essentiel de la validation s'effectue dans l'espace physique par manipulation de polygones en papier. Le changement de registre et le passage à l'espace géométrique ne s'est réalisé que très partiellement.

Des pavages : Sur les affiches produites on peut observer de nombreux développements, entre assemblage autour d'un nœud et pavage assuré. On observe des dessins initiant des pavages réguliers, des assemblages développés du type (8,8,4) ou (3,4,3,3,4) ou (3,3,3,3,6) ou (3,4,6,4) ou (12,12,3), et des propositions erronées (confère annexe 1b).

L'observation du passage d'assemblage autour d'un nœud à un pavage plus global s'avère délicate. En effet le besoin de vérifier que les assemblages construits permettent de paver le plan apparait inégalement ressenti sachant que cette vérification est, pour certains assemblages, immédiate. On observe toutefois des embryons d'argumentations du fait qu'il faut « prolonger partout » pour vérifier qu'on peut paver le plan. Mais ceci reste peu explicite. On peut relever à ce propos des échanges dans le groupe enregistré :

— un questionnement assez précoce après 19 minutes de recherche et la formulation d'une première remarque à caractère global « oui, mais tu peux pas le répéter ».

— un autre après 51 minutes lorsque certains éléments du groupe travaillent à l'extension d'un assemblage : « Ben on est en train de reproduire notre figure en fait. On est en train de se rendre compte que dès qu'la on arrive à faire 360 on essaie de voir si ça marche, on a fait celle-ci ... puis ça marche à l'infini ». La validation se fait là par un dessin très soigné. Les « dessins » les plus étendus utilisent les triangles, carrés, hexagones et octogones réguliers. On peut y voir l'influence des deux facteurs liés : la bonne connaissance de ces polygones réguliers et la facilité de représentation.

On observe dans ces représentations, la présence de nombreux pavages 2-réguliers (ayant deux types de nœud différents). Les groupes ont, soit écarté, soit mal compris la notion de voisinage identique autour des nœuds. C'est un élément constitutif de la notion de pavage semi-régulier qui est ici en jeu. Le débat qui a suivi la recherche a permis aux étudiants d'échanger à ce propos et de trancher. On peut faire l'hypothèse, puisque la réalisation effective de pavages n-réguliers ne rentre pas en conflit avec le milieu (celui-ci ne fournissant pendant le temps de recherche aucune autre rétroaction que la non-conformité avec l'énoncé), que c'est bien le temps de débat et d'échange qui permettra dans la plupart des cas de revenir sur cet aspect de la définition. Enfin, il faut ici noter qu'un groupe d'étudiants avait à sa disposition un ordinateur personnel portable. Un des membres du groupe a assez rapidement utilisé le logiciel GeoGebra pour valider des candidats pavages. C'est en particulier ce groupe qui s'est ensuite engagé dans une recherche exhaustive.

Les premiers raisonnements :

— A la recherche de conditions : Lors de cette expérimentation, le premier registre est bien graphique. Les manipulations dans cet espace ont été particulièrement nombreuses et prolifiques. Ensuite, très grossièrement, on a pu constater que pour la moitié des groupes environ il y a eu un réel investissement du registre numérique, avec par exemple certains raisonnements initiés sur le résidu après association de deux polygones réguliers. On observe aussi des essais d'obtention de régularités, de formules, par exemple

« $60° + 90° + 120° + 135° + 150° + 165° = 360°$ »

et aussi des essais liés à une décomposition primaire de 360 :

« $360 = 1 \times 2^3 \times 3^2 \times 5 = 1 \times 360 =$
$= 2 \times 180 = 3 \times 120 = ... = 18 \times 20$ ».

Pour tous ces groupes la condition sur l'égalité des longueurs des côtés des polygones réguliers apparaît peu problématique. Si on observe des questionnements parfois tardifs : à 45 minutes, « c'est pas obligé que les gones ils aient tous la même longueur de côté ? », les traces écrites ne portent aucun indice du fait que ce point ait nécessité plus que quelques instants d'étude.

— Autour de l'exhaustivité : Pour certains groupes on a pu constater un début d'organisation permettant d'envisager une étude de l'exhaustivité. L'affiche produite par l'un d'entre eux s'organise ainsi :

« Polygones réguliers : 3 côtés : oui, 4 côtés : oui, 5 côtés : non, 6 côtés : oui, 7 côtés : non, 8 côtés : oui, 12 côtés : non.

Essais d'association de polygones différents pour réaliser un assemblage :

3 et 6 : oui, 5 et 10 : oui, 4 et 8 : non,
4 et 3 : non, 4 et 5 : non,
12 et 4 et 3 : oui, 6 et 12 : non »

On constate ainsi un début de systématisation. La suite semble toutefois montrer que cette organisation tient autant de la recherche d'exhaustivité que de la présentation de résultats préliminaires permettant l'élaboration de conjectures. Par contre la production du groupe le plus avancé dans la recherche (confère annexe 2), présente clairement un raisonnement qui se voulait exhaustif. Ce groupe présente tout d'abord une liste des angles des polygones réguliers de 3 à 12 côtés et écrit : « On s'est arrêté à 150, car 60 est le plus petit angle utilisable de PR. 360 moins 60 égal 300 ». « Un PR a forcément un angle inférieur à 180° donc pour obtenir 300° il faut au moins 2 PR. 300 sur 2 égal 150°. Donc il faut combiner 3 PR dont les angles sont inférieurs à 150°... ». Il apparait à la lecture du texte de l'affiche que le groupe s'est engagé sur cette piste en considérant que le plus grand des angles restant était bien de 300° mais que cet angle ne pouvait être « comblé » qu'avec deux angles identiques, donc au plus de 150°chacun.

Les enseignements que l'on peut tirer de cette première expérimentation sont les suivants : cette expérimentation confirme les potentialités du problème, en particulier comme support pour une situation de recherche en classe. La dévolution s'avère globalement non problématique même si la question de la pluralité des polygones réguliers dans un pavage doit toutefois faire l'objet d'une attention certaine. L'activité des étudiants, les productions réalisées, le déroulement des débats, des échanges permettent des institutionnalisations à différents niveaux [25], sur des propriétés d'objets, sur des procédures engagées, sur la détermination de tous les pavages archimédiens, sur le point de vue historique ...

Le milieu proposé permet donc une activité objective des étudiants même si pour certains la non-disponibilité de certaines propriétés d'objets dont la manipulation est indispensable (angles d'un polygone régulier en particulier) peut s'avérer problématique dans un premier temps. Les observations montrent que les actions sur les objets permettent d'investir le champ théorique, mais de façon inégale.

III. — A la recherche des obstacles qui freinent l'engagement dans un processus de va et vient entre l'exploration du problème en appui sur les manipulations d'objets et les élaborations théoriques qui permettent d'en rendre compte

Nous disposons donc d'un milieu suffisamment riche qui permet une exploration du problème et l'élaboration des premières axiomatiques locales, mais l'engagement dans une réflexion fine sur les validations globales et l'élaboration des raisonnements permettant de structurer une recherche de l'exhaustivité ne sont pas systématiques. Pour questionner ces aspects nous avons choisi de réaliser une double expérimentation. Et si dans les ingénieries actuelles l'expérimentation en classe est souvent posée comme un préalable à l'étude, il nous est apparu plus pertinent ici de privilégier un travail « en laboratoire ». Ainsi nous avons tout d'abord convié deux groupes de trois élèves de terminale S à participer à notre recherche. Les conclusions de cette première expérimentation nous ont amenés à prolonger ensuite l'étude lors d'un stage de formation continue avec des enseignants de mathématiques de collège et de lycée.

A. Expérimentation avec des élèves de Terminale scientifique.

Elle concerne donc deux groupes de 3 élèves d'une terminale S d'un niveau moyen.

25 Avec ces étudiants, un des objectifs de la séance est également de travailler sur la problématique de la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe, ce qui s'avère également possible à partir de cette situation.

Les élèves qui se sont portés volontaires pour deux heures de recherche sur un « problème de géométrie » ont des compétences en mathématiques inégales. Les deux groupes sont filmés (2 caméras) et doublement enregistrés.

Des contraintes horaires ont amené à réduire la durée de la séance. Le temps imparti, se répartit alors comme suit : cinq minutes d'appropriation de l'énoncé, cinq minutes de recherche individuelle, 1h30 de recherche en groupe et rédaction des affiches, 30 minutes qui permettent aux deux groupes de présenter leurs résultats et de débattre de leur validité.

Une première constatation : la dévolution ne pose pas de difficulté mais, là encore, on observe, pour certains élèves, une tendance à ne pas s'engager dans la recherche la plus générale, à se « satisfaire » de la régularité. Ainsi pour le **groupe 1**, seule l'étude des pavages réguliers du plan sera finalement traitée.[26]

Une étude d'un extrait de l'enregistrement du début de la recherche permet d'identifier certaines raisons à cette orientation : (M, B et F sont les élèves du groupe 1) :

M : « tu rajoutes autant de points que possible sur le cercle »

M : « tu divises plutôt par 180 ah quoi que »

B : « attends, moi ce que je dirai c'est que la recherche le nombre de pavages archimédiens du plan c'est un nombre illimité, si on suit le raisonnement. »

M : « oui mais faut que tu leur laisses une certaine dans un certain type euh de »

B : « oui mais faut pas que ça fasse un cercle parce qu'un cercle tu peux pas les mettre contre »

M : « j'fais un cercle c'est pour les mettre ensemble c'est pas pour »

B : « oui ? »

F : « ça veut dire quoi »

M : « c'est simplement pour trouver »

F : « autour de chaque sommet le même assemblage ? »

M : « c'est juste pour trouver le polygone »

B : « ouais »

M : « mais regarde si tu prends un carré le carré tu prends une distance entre chaque point c'est la même longueur, de toute façon, t'auras le même angle »

B : « oui je suis d'accord, oui je vois le principe »

F : « oui je vois ok »

[...]

M : « j'te parle de l'angle par rapport au centre, c'est 30° et ça de toute façon c'est un triangle euh isocèle »

F : « isocèle non ? »

M : « ouais de toutes façons c'est des, c'est tous des triangles isocèles de toute manière ... »

On constate ainsi des approches différentes et les discours de M d'une part et B et F d'autre part apparaissent tout d'abord, parallèles, disjoints. F et B semblent avoir une vision plus globale, avec F qui questionne la phrase « ça veut dire quoi, autour de chaque sommet le même assemblage ? » et B qui imagine une infinité de pavages archimédiens et envisage des juxtapositions : « oui mais faut pas que ça fasse un cercle parce qu'un cercle tu peux pas les mettre contre ». M, lui, s'attache rapidement à l'étude des angles d'un polygone régulier.

26 Ceci peut être mis en parallèle avec le lancement de la séance qui n'a pas permis, après la lecture de l'énoncé par une élève, une reformulation suffisamment riche. Le professeur a alors été amené à poser des questions qui ont obtenu des réponses assez peu explicites. Si la notion de pavage du plan a été clarifiée, l'aspect général de l'étude n'est pas apparu.

F aura dans ce groupe une attitude en retrait, M a plus tendance à prendre la parole. Il montre une aisance dans le registre numérique qui lui permet de s'engager rapidement dans des raisonnements productifs. L'extrait montre qu'il prend un point de vue local et ne dévie pas de son idée initiale. Il entraine le groupe dans l'étude des angles d'un polygone régulier.

On constate donc d'une part, que les deux aspects, local et global, peuvent se présenter initialement et d'autre part, qu'il peut alors être envisagé qu'un engagement fort dans un registre numérique familier, associé à un point de vue local, bloque le questionnement global nécessaire.

Finalement, le groupe 1 a abouti à une preuve de R1:

— qui intègre la détermination d'une formule permettant de déterminer l'angle d'un polygone régulier en fonction du nombre de ses angles,
— qui met en évidence une condition nécessaire sur la somme des angles autour d'un nœud,
— qui utilise au moins en acte une condition nécessaire sur le nombre d'angles autour d'un assemblage permettant la détermination des candidats pavages.

Le groupe 2 : il s'est également engagé, sans difficulté, dans une recherche qui aboutira à la mise en évidence de plusieurs pavages, dont des non réguliers. Il est utile de savoir que les élèves de ce groupe (CQ, VB et CS) ont utilisé du papier de couleur : orange pour les hexagones, vert pour les triangles, jaune pour les octogones, blanc pour les carrés.

La démarche de ce groupe prend un parti totalement différent de celui du groupe 1. Les premières constatations portent sur des aspects globaux avec la validation de deux pavages réguliers conformes à la définition donnée, celui à base de carrés et celui à base de triangles équilatéraux.

Cette définition est ensuite testée en regard de la régularité des polygones à utiliser : « et un losange ça marche ? » « Non parce que le losange les angles c'est pas les mêmes ». On peut donc observer que les connaissances de base sur les polygones réguliers sont suffisamment disponibles pour s'engager dans une première élaboration.

A ce point, si on note l'ensemble des pavages archimédiens du plan, ce groupe a établi que contenait deux des pavages réguliers et que les pavages de ne contenaient que des polygones réguliers.

Cette entrée se prolonge par un regard pragmatique sur la situation et permet d'envisager une diversité des pavages archimédiens : « Il doit y avoir un truc parce que ... parce que ce que je comprends pas c'est que t'as qu'à mettre plein de carrés et puis là t'as trouvé », « ben oui c'est ça ben oui c'est simple », « ben ouais c'est ça que je comprends pas ».

Ceci va amener le groupe à tenter l'association de triangles équilatéraux et de carrés. On constate ici une manipulation sur les objets particulièrement familiers. C'est d'ailleurs cette familiarité qui va permettre de porter une conjecture incertaine :

« Est-ce que par exemple ça veut dire que si t'as un triangle par exemple là ... t'as un carré »

« Ben non tu peux pas parce que là autour de ton sommet t'auras un carré »

« Et alors »

« Alors t'as pas le droit »

« Tel qu'un sommet de polygone appartient au ... non c'est pas ça tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones »

« Ah oui »

« Est-ce que c'est pas justement c'était ça j'voulais te demander si c'était pas par exemple un j'fais un truc au pif tac tac tac t'as un truc comme ça donc là en fait faut qu'à chaque sommet de chaque machin ça soit des ... » et CQ montre du doigt la première association carré triangle.

Cette première partie met bien en évidence une manipulation d'objets très familiers pour les élèves et qui permet de construire une nouvelle connaissance de l'objet pavage archimédien, le déficit langagier pour désigner les nouveaux objets étant clair.

Dans le modèle en construction, semble pouvoir contenir désormais des potentiels pavages associant des polygones réguliers différents. Toutefois, pour l'instant, cette conjecture n'a pas encore le statut d'axiome de la théorie en élaboration. CQ en particulier reste dubitative et incertaine. Pour ces élèves, le milieu proposé ne semble pas permettre d'aller au-delà et CQ va finalement faire appel au professeur pour statuer. La théorie s'enrichit donc d'un nouveau résultat, toutefois imprécis ou insuffisamment explicite puisque s'il apparait nécessaire d'avoir les mêmes figures en deux nœuds d'un pavage, la notion fine de type n'est pas encore mise à jour.

La suite de la recherche du groupe montre un enrichissement de la collection de pavages avec, le pavage régulier à base d'hexagones, une association hexagones-carrés et l'usage de l'octogone régulier associé au carré. C'est un temps de travail à l'intérieur de la théorie établie avec une manipulation des polygones relativement familiers. Les cinq « candidats » dont le statut est encore incertain et qui figureront sur l'affiche, sont déjà présents à cet instant.

Le temps suivant, doit permettre de faire le point (après 22 minutes de travail) sur la recherche accomplie : « et si on mettait au propre tous ceux qu'on avait déjà », « Ben tiens y en a déjà un là », « Ben j'en ai un là un là ». Ce temps nécessite alors pour ces élèves un retour à la manipulation. Mettre au propre, semble vouloir dire, construire les assemblages. En effet un certain nombre de dessins étaient jusqu'à présent faits à main levée, il s'agit désormais de produire des figures qui pourront être présentées lors du débat. C'est de cette double exigence de présentation et de retour au sensible que nait la phase suivante et c'est pendant ce temps, qu'un changement de registre va s'opérer ... mais avec difficulté. Donnons en un exemple :

« 1 2 3 4 5 6 7 7 donc 180 divisé par 7 »

« T'es sur ? »

« Oui parce que tous les angles [inaudible] ça donne un angle droit après »

« Pas un angle droit un angle plat »

« Ouais un angle plat » [...]

« C'est pas possible ça fait 25 »

« Ben 25 de l'autre coté tu prends »

« Ah ouais c'est 25 de là »

« Ah ben oui »

« Pis après tu fais 180 – 25 »

« Voilà »

« Et ça fait combien »

« Ça fait 165 non 135 »

« C'est pas possible »

« Ça fait ça ça fait 135 ? »

Les élèves manipulent le papier, le crayon, le rapporteur, la calculatrice. Ainsi la démarche lie raisonnement géométrique, résultat calculatoire, tracé et rétroaction liée à ce tracé. Ainsi ici le calcul 180 divisé par 7 semble devoir émerger de la considération de l'angle au centre d'un heptagone avec une erreur sur la mesure en degré de l'angle plein. Puis la démarche joue sur l'égalité entre 360/7 et le supplémentaire de l'angle de l'heptagone, égalité considérée dans le registre graphique et dans le registre numérique. Cette démarche se confirme avec un nouvel essai pour la construction de l'octogone et est cette fois menée à son terme. Toutefois elle s'avère totalement pragmatique et finalement très peu opératoire pour la suite. Une des trois élèves ne maitrisera jamais complètement la « technique ». Contrairement au groupe 1, l'aspect syntaxique sera absent de cette partie du travail.

A 26 minutes du début de la recherche l'investissement du registre numérique est abandonné. On peut toutefois supposer que le milieu s'est enrichi, pour au moins deux des trois élèves, d'une capacité à construire les hexagones et les octogones avec une technique ad hoc. Ce sont avec le triangle équilatéral et le carré, les polygones qui seront à présent manipulés. Une répartition de polygones réguliers à construire s'effectue alors dans le groupe. C'est ce travail collectif qui permet à ce moment l'émergence de la remarque suivante : « ouais mais y faut ça fasse la même taille aussi » et l'échange suivant :

« Ben non pourquoi ? »

« C'est pas dit qu' c'est obligatoirement la même taille »

« Ouais faut qu'on en fasse plein »

« Faut que chaque carré est la même »

« Je pense »

« Oui »

[...]

« Ah mais non c'est pas dit »

On constate, une divergence d'appréciation. Pour deux élèves la congruence des côtés des polygones réguliers semble « aller de soi », pour la troisième qui s'appuie sur la définition, il y a quelque chose à prouver. Rapidement une première preuve [27] est avancée :

« Oui mais non mais justement parce que si c'est pas de la même longueur ça refait deux possibilités en plus »

« Ouais »

« Ah ben non parce que après y aura un sommet qui sera dans la longueur »

« Et alors ? »

« Ben genre si tu fais un truc comme ça plus grand, plus grand par exemple tu le fais comme ça et après tu va refaire un triangle comme ça, eh ben là t'auras, eh ben là y a un triangle, voilà »

« Ouais mais j'suis pas sur donc »

Ce premier échange ne permet pas d'aboutir. C'est à la suite d'un nouveau temps de construction de pièces d'une vingtaine de minutes et d'une confrontation type « puzzle » qu'un retour à la question de la congruence se fera et il faut encore cinq minutes d'échanges pour conclure avec une manipulation constante des polygones découpés :

« Tu veux dire si on en prend un de c'te longueur là et ben ça marche »

« Mais on peut pas »

« Et pourquoi »

« Ben parce que le coin de là il est dans la longueur là et c'est dit euh on exclut heu assemblages voilà »

« Ah ouais c'est vrai »

« On exclut de ce problème les pavages tels que le sommet d'un polygone appartienne au coté ... »

« On aurait du y penser tout de suite alors »

La conclusion s'appuie là encore sur un retour à l'énoncé après une manipulation longue et dis-

27 Entre l'expérience cruciale et l'expérience mentale, au sens de la typologie des preuves de Balacheff .

cutée. L'énoncé proposait un exemple de pavage non strict, mais il apparait que les configurations possibles peuvent être diverses au point de masquer cette proximité. Pour certains élèves, ce temps semble donc nécessaire. La théorie, s'enrichit ainsi d'une condition nécessaire d'existence qui se traduira sur l'affiche par : « Pour former un pavage archimédien il faut que chaque formes utilisées aient leurs côtés de même longueurs ».

Le temps suivant est très peu productif du point de vue de l'avancée des connaissances. Les élèves se révèlent particulièrement maladroites dans les manipulations numériques et ne se libèrent pas de l'espace sensible. On peut toutefois extraire de ces échanges la confirmation que la condition nécessaire d'assemblage autour d'un nœud est présente au moins en acte. Elle sera d'ailleurs formulée explicitement sur l'affiche : « Il faut qu'à chaque sommet la somme des angles des figures soient égales à 360° ».

Mais si le problème semble se poser clairement au moins dans le domaine graphique avec par exemple des essais d'ajustements de pentagones et d'octogones et le constat que l'assemblage n'est pas possible, pour autant le groupe ne basculera jamais dans la démarche numérique malgré une certaine perception de la nécessité de ce genre d'approche « tu préfères pas calculer c'est quand même plus simple ». Les difficultés calculatoires et les rétroactions mal interprétées du milieu ne semblent pas permettre ce pas. Ainsi il y a bien ici appui sur les objets mais, étonnamment pour ces élèves, la familiarité insuffisante bloque l'élaboration de résultats supplémentaires.

Concernant l'aspect global, l'essentiel de l'élaboration dans ce domaine se fait au bout de 1h et 15 minutes avec la manipulation des polygones de différentes couleurs :

« ouais et ouais et là j'suis d'avis à mettre un autre blanc ah mais non parce que là regarde c't'angle regarde deux blancs et un jaune si y a un blanc là »

« ben oui et après »

« ben oui mais regarde là y a orange jaune blanc et là y a deux blancs un jaune »

« parce que là tu mets un orange »

« ouais »

« bon après tu mets un blanc là »

« hum donc ça va pas »

On peut voir ici la naissance d'un questionnement sur la possibilité de paver globalement à partir d'un assemblage. Ce passage confirme que l'élaboration théorique pour ce problème peut emprunter des voies variées, et qu'ici, le fait que la condition sur la somme des mesures des angles autour d'un nœud n'est pas suffisante, peut être établi indépendamment d'une avancée dans le registre numérique.

La rédaction de l'affiche pour ce groupe permettra de faire le point sur les objets considérés et les éléments de théorie construits. Les résultats obtenus sont rédigés. Ce temps de rédaction ne permettra pas de dépasser l'obstacle déjà rencontré.

La présentation et le débat qui suivront permettront les échanges nécessaires et fourniront en particulier à chacun des groupes les éléments manquants, pour l'un sur l'aspect global, pour l'autre sur l'utilisation du registre numérique. Mais le temps imparti ne permettra pas d'aller au-delà de cette première structuration de Ω.

Si on se centre sur les travaux du groupe 2 on peut estimer que des premiers allers-retours entre les objets sensibles et la construction théorique ont permis une avancée initiale relativement rapide. Le milieu matériel proposé contenait suffisamment d'objets familiers que les membres du groupe ont su manipuler. Le milieu objectif alors constitué, a tout d'abord bien joué son rôle, celui de milieu heuristique permettant les essais, les erreurs et les premières élaborations théoriques. Ce sont ici, les interactions avec les objets qui ont ainsi produit les premiers résultats de la théorie et en particulier les premières conditions nécessaires. Dans un deuxième temps toutefois, le milieu objectif s'est révélé insuffisamment riche, avec des familiarités avec les objets qui ne permettent pas que les résultats, en particulier numériques, soient réellement disponibles. L'élaboration de la construction s'en trouve stoppée et durablement. La dernière avancée (aspect global) s'opérera grâce à un retour aux objets sensibles. Elle prouve que l'approche des pavages archimédiens peut être multiple et que l'objet de la recherche peut-être ainsi cerné bien qu'encore dans l'ombre. Le groupe a ainsi, malgré tout, construit, à partir d'un milieu objectif peu stable, un ensemble déjà riche et une théorie affirmée sur les objets de cet ensemble. On peut imaginer qu'une poursuite du travail, après le temps d'échange, aurait permis de poursuivre la structuration du modèle.

B. Expérimentation en formation continue du second degré

Cette nouvelle expérimentation a été mise en place afin de s'assurer d'une part que la situation résiste aussi auprès d'un public plus averti qui peut développer des heuristiques différentes, et qu'elle confirme auprès de ce public ses potentialités. Mais il s'agit principalement de cerner les obstacles aux élaborations théoriques qui doivent permettre d'aller au bout de la recherche.

Le milieu matériel pour cette expérimentation est inchangé. La situation est proposée à 19 enseignants de mathématiques, de collège ou lycée, répartis pour l'occasion en 4 groupes de 4 et un groupe de 3. Le temps imparti se révélera légèrement plus long, 2h30 de durée globale, que pour la précédente expérimentation. Pour l'occasion, nous envisageons d'intervenir si nous en sentons la nécessité. Deux micros placés auprès de deux groupes distincts, enregistreront la totalité des échanges dans ces groupes et la mise en commun qui suivra. Nous retrouvons pour cette mise en œuvre une entrée rapide dans la recherche de tous les groupes et des manipulations dans un milieu objectif qui permettra ici, dans tous les cas sauf un, d'identifier rapidement l'objet d'étude.[28]

Nous revenons ici sur le début de recherche d'un groupe pour lequel nous retrouvons une démarche très similaire à celle du groupe 1 de l'expérimentation en TS. Sous l'impulsion d'un des collègues qui affirme que tous les angles sont les mêmes, c'est tout d'abord l'étude des angles des polygones réguliers qui est réalisée avec une idée de généralité, l'obtention de la formule , $180 \times \dfrac{n-2}{n}$ et l'idée de valeur maximale. Suit alors une étude d'un nœud d'un pavage (régulier !) avec rapidement, après l'observation du cas $p = 3$, la proposition $\alpha_n = \dfrac{360}{p}$ avec n le nombre de côtés du polygone considéré, α_n l'angle de ce polygone et p le nombre de fois où ce polygone apparaît autour du nœud.

L'extrait ci-dessous montre l'esprit du début de la recherche :

« Pour un même p peut-il y avoir plusieurs n ? »

28 Notons que le milieu objectif s'est enrichi, au moins pour un groupe, des ressources liées aux transformations.

« Non »

« Pour un même nombre on obtient un angle et pour un angle y a pas 25 polygones donc doit y avoir un lien entre n et p »

« Comment on exprime le nombre de côtés en fonction de l'angle »

« Faudrait trouver un lien entre n et p »

On observe donc en appui sur les objets qui se révèlent ici très familiers, un engagement franc dans les registres numérique et arithmétique. Après environ 12 minutes, c'est la résolution de l'équation $180 \times \frac{n-2}{n} = \frac{360}{p}$ qui occupe l'essentiel du temps de recherche de ce groupe.

On peut observer un instant critique, après environ 25 minutes de recherche, devant la difficulté de résolution de l'équation en n et p : « Non mais c'est des trucs que tu vois en terme » ... (en référence à des équations diophantiennes).

« ... si on en met plus de 6 on va peut-être trouver un angle trop aigu »

« Si si on va s'en sortir parce que là on essaie d'en mettre le plus possible à un moment donné on arrive à des angles aigus plus petits que l'angle du triangle ça marche plus ben tout simplement, on peut pas faire moins que 60 ... et oui oui ... n il est forcément plus grand ou égal à 60 euh

« Non pas n, p »

« Non p c'est un nombre de côté, non c'est le nombre de polygones »

Apparaît clairement ici le fait que la résolution d'un problème de la théorie se réalise en appui sur l'expérimentation. C'est la manipulation « mentale » des objets de la famille des polygones réguliers, qui permet de constater une impossibilité « ça marche plus ».

On peut aussi constater que l'élaboration de cet élément de la théorie, s'appuie cette fois, non pas sur les objets polygones réguliers mais sur la famille des ces polygones. Il est également à noter que se joue ici un moment crucial, avec une minoration de $\frac{360}{p}$, qui est délicate à obtenir non seulement du fait de la nature de cet angle mais également du fait de la manipulation de l'inégalité et des variations contraires de p et n.

C'est ainsi sans doute l'idée de variations, ou tout au moins de majoration, minoration qui apparait au cœur du raisonnement et qui permet ensuite rapidement de conclure pour les pavages réguliers.

Après 30 minutes le cas de ces pavages est ainsi réglé. Les 14 minutes suivantes seront consacrées à des clarifications, à la rédaction de l'affiche. Durant ce temps le terme pavage est employé sans que cela induise un retour sur ce qui a déjà été fait. Nous nous sommes alors décidés à intervenir en faisant remarquer aux groupes qu'ils avaient démontré qu'il existait trois et seulement trois pavages réguliers du plan. Ceci permettra à un des membres du groupe d'affirmer : « et on peut pas mettre un triangle avec ... avec un hexagone » et à un autre « Et ouais le truc c'est que c'est marqué tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même type de polygone » ...

Le collègue « mis en cause » pour la voie qu'il a proposée initialement enchaîne alors rapidement : « non mais y a encore des histoires de plus grand ou pas ou nombre limité quand même ... ». Et c'est cette piste poursuivie, qui mènera rapidement le groupe quasiment au bout de l'étude, la démarche consistant en une étude exhaustive suivant le nombre de polygones autour d'un nœud.

Ainsi il est à noter que les objets pavages réguliers ont joué pour certains groupes plus qu'un simple rôle d'objet « exemplaire » mais également un domaine d'expérience pour les élaborations théoriques.

Pour clore ces comptes-rendus, nous pouvons reprendre à notre compte, un extrait de [Dias et Durand-Guerrier, 2005], traitant de la situation des polyèdres de Platon, et affirmer dans un premier temps qu' : « il existe un rapport de contiguïté entre théorie et expérience. [...] Ce lien étroit entre l'expérimental et le théorique est porté par [...] l'articulation entre les registres numérique et géométrique. [...] Les preuves et démonstrations qu'elle [la géométrie] met en œuvre se «frottent» irrémédiablement au réel lors des phases d'élaboration de ces objets. [...] Les obstacles, les impossibilités se révèlent dans certains cas lors de la mise en œuvre d'un raisonnement déductif et dans d'autres cas par l'action expérimentale ; la connaissance des objets se développe dans ces allers-retours entre théorie et expérience. »

IV. — Quelques éléments complémentaires sur la situation

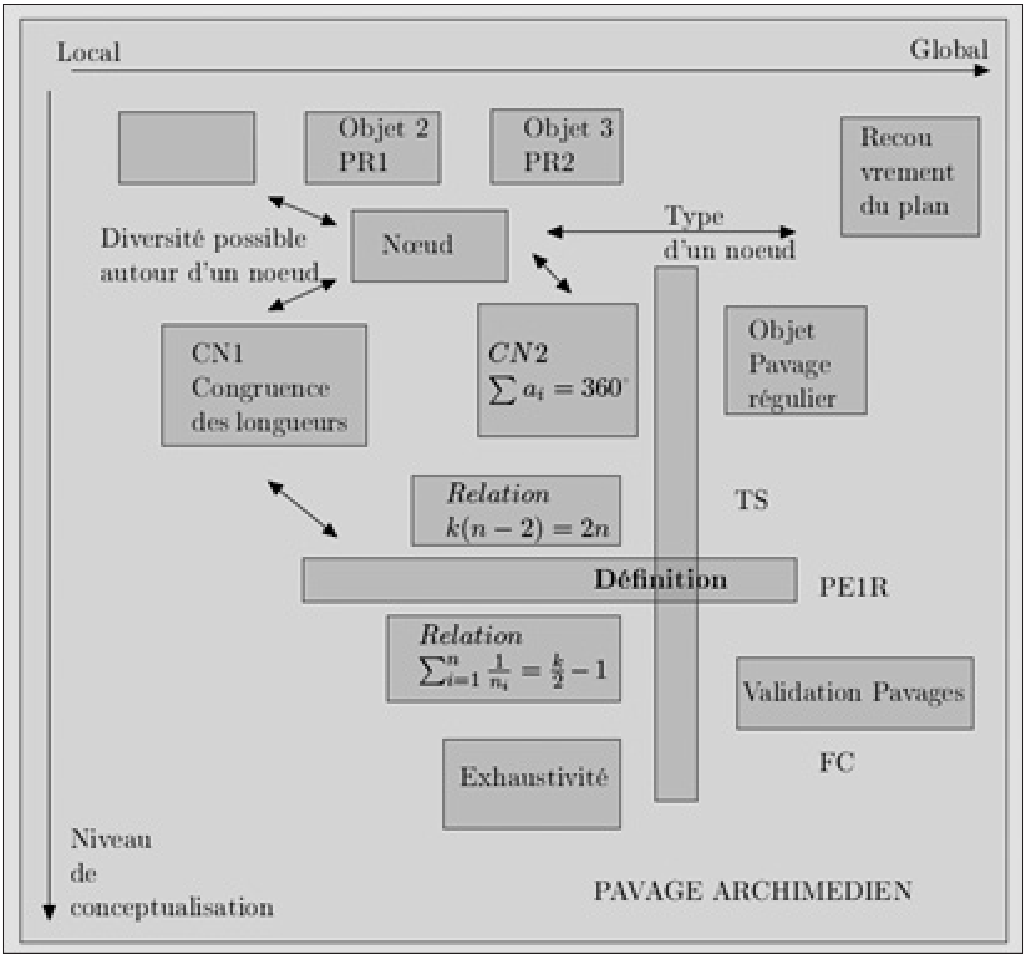
Dans toutes les expérimentations, il apparait que la phase collective d'appropriation de l'énoncé ne permet pas à tous les groupes de questionner la diversité possible des polygones réguliers autour d'un nœud. Plus globalement, c'est le milieu élaboré qui ne permet pas une adidacticité complète pour tous, dans la phase de recherche. Il pourrait être envisagé de modifier l'énoncé et de donner un exemple de pavage archimédien non régulier. Mais il nous parait préférable de privilégier l'intervention du professeur à un moment pertinent, de façon à permettre, ce qui a pu être observé, une élaboration théorique dans un cadre restreint qui semble propice à des développements. Ceci favorise également la prise en compte de la diversité des démarches et des conceptions. Cette intervention peut être envisagée suivant plusieurs modalités : des interventions ponctuelles autant que nécessaires et dans la bonne temporalité ou une mise en commun permettant une première confrontation.

Par ailleurs, le modèle expérimental a priori n'a pas pris suffisamment en compte le possible manque de familiarité avec les polygones réguliers. Il est nécessaire de s'assurer, pour une mise en œuvre dans un temps restreint, ou pour certains niveaux de classe, que la connaissance des mesures des angles des polygones réguliers fait partie du milieu objectif des élèves et ne bloque pas l'argumentation, le contrôle de la pertinence des théories élaborées. Il peut être envisagé, dans cette optique un dispositif intégrant plusieurs séances en classe. Ceci permettrait éventuellement l'explicitation de certaines connaissances nécessaires à l'action sur les objets, explicitation qui semble s'avérer nécessaire au vu de la recherche du groupe 2 de TS.

On peut à l'issue de ces confrontations à la contingence, esquisser une carte qui peut se lire comme un résumé des expérimentations, et que nous organisons ici suivant deux axes, le niveau de conceptualisation et le point de vue local-global. Les double-flèches représentent quelques allers-retours entre les objets, qui ne sont pas tous représentés.

Ce schéma permet une première visualisation mais il doit aussi être lu en creux. Sa structuration même le limite. Il ne rend par exemple, pas suffisamment compte du rôle central des polygones réguliers qui sont au cœur de tous les va et vient qui permettent le passage du sensible au théorique.

La présentation des relations en termes numériques rend aussi très mal les interactions entre



les registres et en particulier l'appui sur le sensible géométrique. D'autant plus que, comme le montrent les présentations lors du stage de formation continue, les expériences mentales décrites s'appuient fortement sur des « images » géométriques : « parce que là on essaie d'en mettre le plus possible à un moment donné on arrive à des angles aigus plus petits que l'angle du triangle ça marche plus ben tout simplement ». Le rôle de la définition est également à préciser. Elle irrigue la recherche, enrichit le milieu, mais elle n'est pas au centre de la situation. C'est ce que nous souhaitions, il ne s'agit pas ici, en effet, de construire une définition des pavages archimédiens, mais bien d'explorer une situation problématique. La définition se conçoit alors comme un objet du milieu, presque comme les autres.

Le point de vue local-global peut également être envisagé comme un des enjeux de la situation. Marc Rogalski, dans un résumé d'une intervention à l'université de Paris 7, écrit : « Ainsi, en géométrie ou topologie, définir un objet par des propriétés des voisinages de chacun de ses points n'en assure pas en général une caractérisation globale, il faut y rajouter des propriétés elles-mêmes globales [...] » et il précise : « L'analyse d'un certain nombre de difficultés didactiques des élèves ou étudiants sur ces diverses questions nous fait penser qu'un enjeu important de l'enseignement est sans doute de développer chez eux une prise de conscience de l'existence des points de vue local et global ». Ainsi, la création d'une direction, local-global dans notre structuration, doit pousser à prendre en compte cette dimension d'analyse complémentaire pour enrichir encore les potentialités de la situation.

Conclusion

Cet exemple d'étude de la dialectique qui peut s'établir entre les éléments d'une théorie en construction et les actions sur les objets met en évidence l'intérêt de ce type d'analyse pour identifier les processus en cours dans la construction de nouveaux objets mathématiques.

Nous avons ici croisé et articulé les approches épistémologique et didactique. De ce point de vue les investigations historiques montrent tout leur intérêt, y compris par les similitudes observées entre les démarches des chercheurs et des « étudiants ». Au-delà des éléments présentés, il est certain, qu'une étude historique approfondie de la notion de pavages archimédiens du plan doit s'intégrer dans un questionnement plus vaste qui rende compte du contexte historique, technique et philosophique. Concernant Kepler en particulier, l'étude de son positionnement épistémologique et philosophique, de son rôle au cœur de la révolution mathématique, mais également des environnements géométrique et axiomatique de sa pensée sont autant de pistes à emprunter pour mieux interroger ses démarches.

Mais déjà, les premiers éléments présentés ici permettent de réfuter l'apparente « transparence » des objets étudiés, d'identifier des obstacles de différentes natures qui peuvent se présenter dans leur dévoilement, et plus précisément d'entrevoir le réseau d'expériences qui peut permettre de les mettre au jour et le réseau d'élaborations théoriques qui peut permettre de les structurer.

L'enquête entreprise facilite également l'élaboration d'un « projet didactique », pour reprendre une formulation d'Anna Sierpinska. Et de ce point de vue, la situation considérée a fait la preuve de ses potentialités en termes d'élaborations théoriques et ceci a tous les niveaux envisagés dans cette étude. Il est à remarquer que les difficultés relèvent diversement du curriculum mais que la situation résiste, y compris à des enseignants de mathématiques du second degré.

Pour toutes les recherches évoquées, la familiarité avec les objets (objets particuliers ou ensemble d'objets), la capacité à agir sur eux par des manipulations dans l'espace sensible ou en réalisant des expériences mentales s'appuyant sur des « images », le jeu entre les registres de représentations, le regard local et global, sont des éléments favorables aux élaborations théoriques dans l'exploration du problème. *A contrario*, les obstacles à l'élaboration peuvent s'avérer nombreux et par exemple, si l'investissement du champ numérique comme domaine d'expériences privilégié semble favorable aux élaborations, il apparaît nettement qu'il ne peut être le garant de la réussite s'il finit par induire une perte de contact, un éloignement des objets premiers de la recherche.

Ce regard porté sur les élaborations théoriques en appui sur les manipulations d'objets offre ainsi des possibilités d'analyses quand on interroge des processus de recherche, aussi bien du point de vue historique que didactique. Il permet dans un contexte de problèmes de recherche pour la classe d'envisager des modèles de situations prenant réellement en compte les actions effectives des élèves et leur offrant potentiellement la possibilité de s'engager dans une réelle activité mathématique. A l'interface entre construction d'objets et élaboration de raisonnements ad hoc, il nous semble fructueux de proposer de telles situations, pour des élèves créateurs de mathématiques dans la salle de classe.

Bibliographie

[Arsac et Mante, 2007] Arsac, G. et Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren CRDP de Lyon.

[Badoureau, 1881] Badoureau, A. (1881). Mémoire sur les figures isoscèles. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 30 : 47 à 172.

[Barbin, 1997] Barbin, E. (1997). Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique, *Repères IREM*, n°27, pp. 63-80.

[Barbin, 2001] Barbin, E. (2001). Qu'est-ce que faire de la géométrie ?, *Repères IREM*, n°43, pp. 59-82.

[Coxeter, 1974] Coxeter, H. (1974). Kepler and mathematics. *Vistas in Astronomy*, 18:661-670.

[Dias, 2008] Dias, T. (2008). *L'intégration de la dimension expérimentale des mathématiques*
dans des situations d'enseignement et de formation. Thèse de doctorat, Université Lyon 1.

[Dias et Durand-Guerrier, 2005] Dias, T. et Durand-Guerrier, V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM*, n°60, pp. 61-78.

[EXPRIME, 2010] EXPRIME (2010). Expérimenter des problèmes innovant en mathématiques à l'école. INRP

[Front et Legrand, 2010] Front, M. et Legrand, P. (janvier 2010). Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin de l'APMEP*.

[Grenier, 2008] Grenier, D. (2008). *Expérimentation et preuves en mathématiques*. PUF, collection « Sciences, homme et société ».

[Grünbaum et Shephard, 1977] Grünbaum, B. et Shephard, G. (1977). Tilings by regular polygons. Patterns in the plane from Kepler to the present, including recent results and unsolved problems. *Mathematics magazine*, 50, N°5 : 227-247.

[Grünbaum et Shephard, 1987] Grünbaum, B. et Shephard, G. (1987). *Tilings and patterns*. Freeman and Co.

[Houdement, 2004] Houdement, C. (2004). Mathématiques, didactique et découpages : la richesse d'un problème. *Mathématiques et résolution de problèmes : un point de vue didactique*.

Actes des journées de formation, IREM Montpellier 13-14 mai 2004, pages 43-52.

[Kepler, 1619] Kepler, J. (1940 [première édition 1619]). *Harmonices Mundi*. C.H. Beck, München.

[Kepler, 1619/1980] Kepler, J. (1980). Harmonie du monde. Harmonices mundi [première édition 1619]. Traduit du latin avec un avertissement et des notes par Jean Peyroux.

[Lakatos, 1984] Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique. Textes présentés par John Worall et Élie Zahar Traduction de Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde*. Hermann, Paris.

[Lévy, 1891] Lévy L. (1891). Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers. *Bulletin de la société philomatique de Paris*. pp. 46-50.

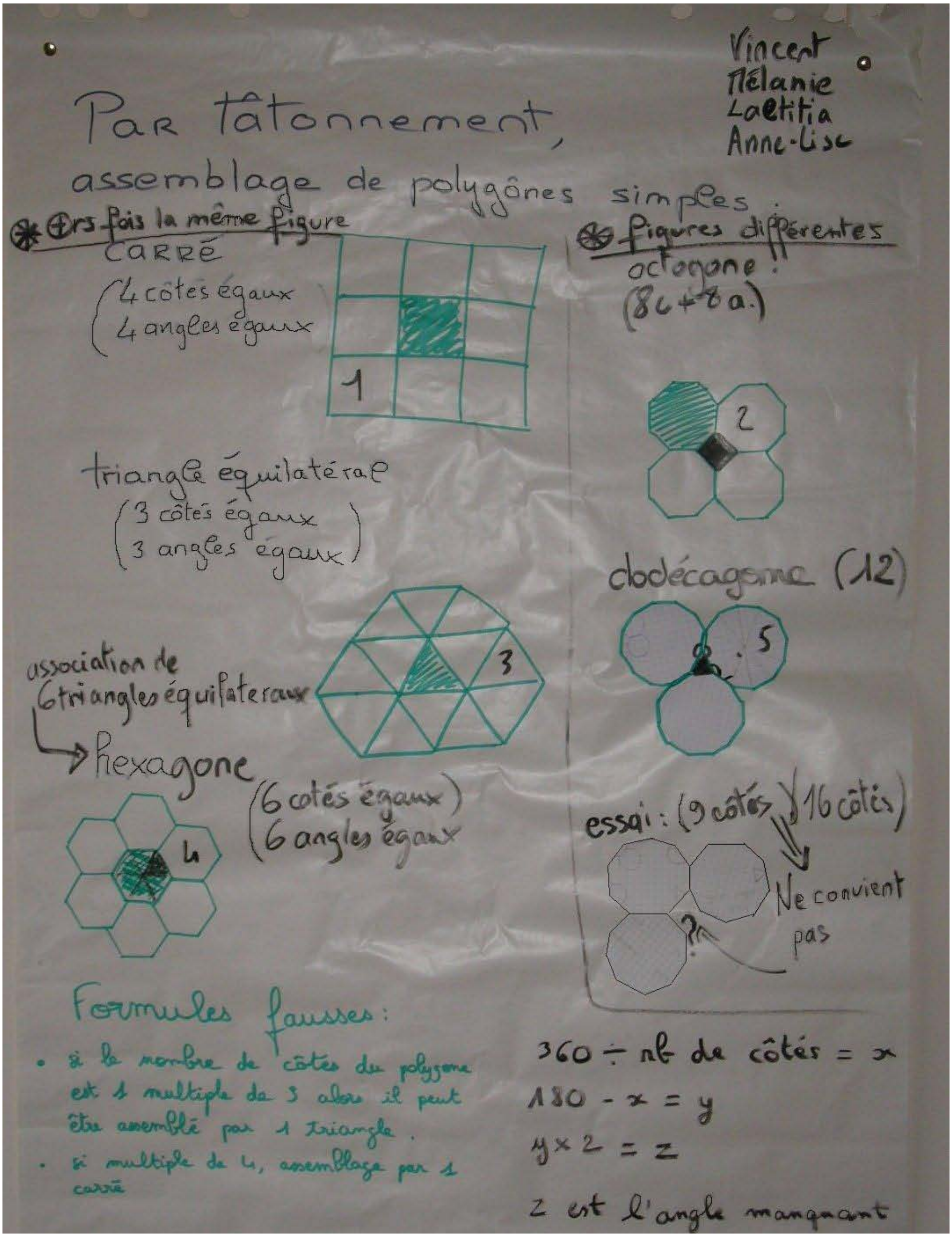
[Pappus, ~340/1933] Pappus, d'Alexandrie traduit par Ver Eecke, P. (1933). *La Collection mathématique*. Desclée De Brouwer, Paris and Bruges. Réédition Blanchard, Paris 1982.

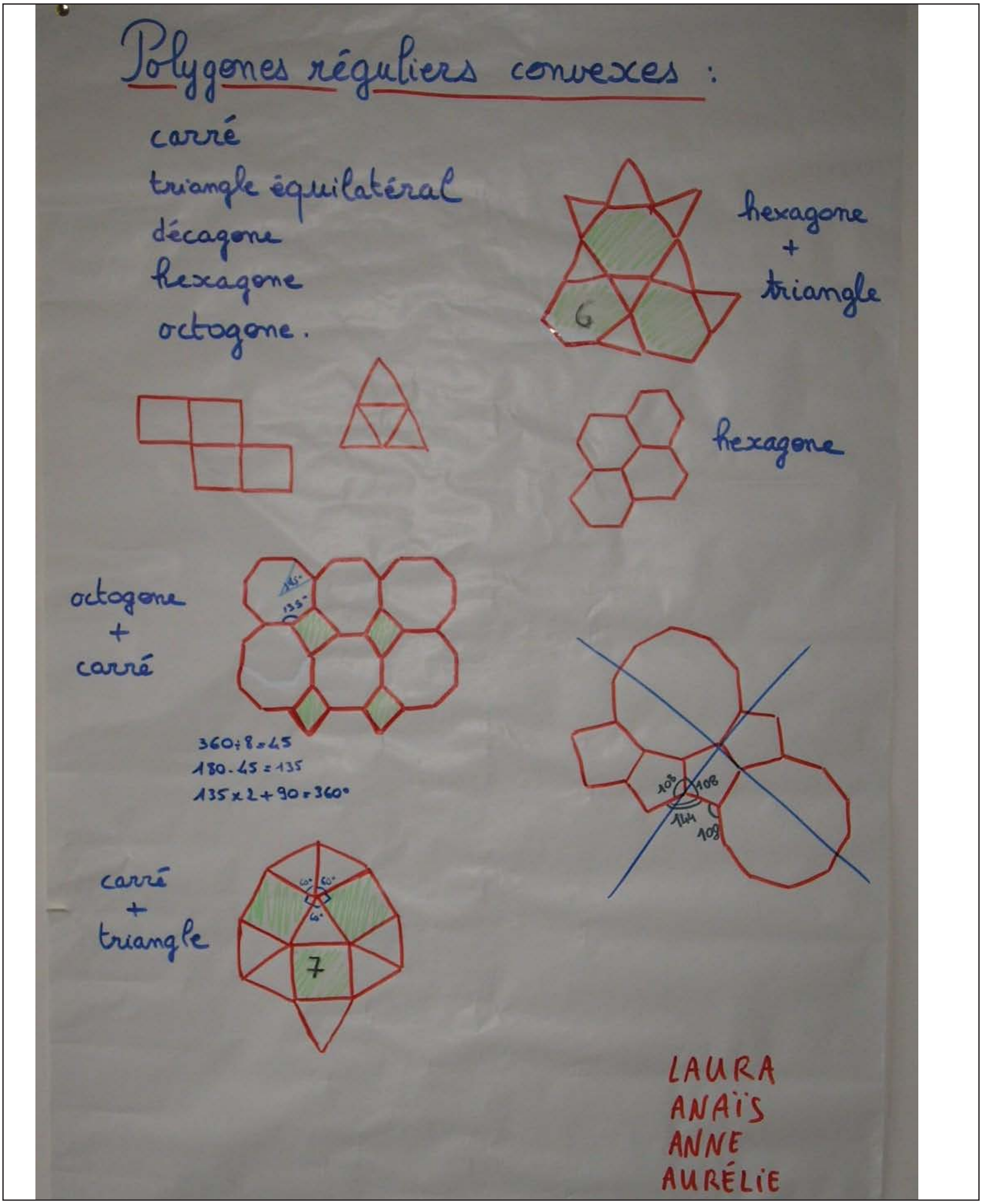
[Pauli, 2002] Pauli, W. (2002). *Le cas Kepler*. Albin Michel, collection « Sciences d'aujourd'hui. »

[Peix et Tisseron, 1998] Peix, A. et Tisseron, C. (1998). Le problème ouvert comme moyen de réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques. *Petit x*, 48:5 - 21.

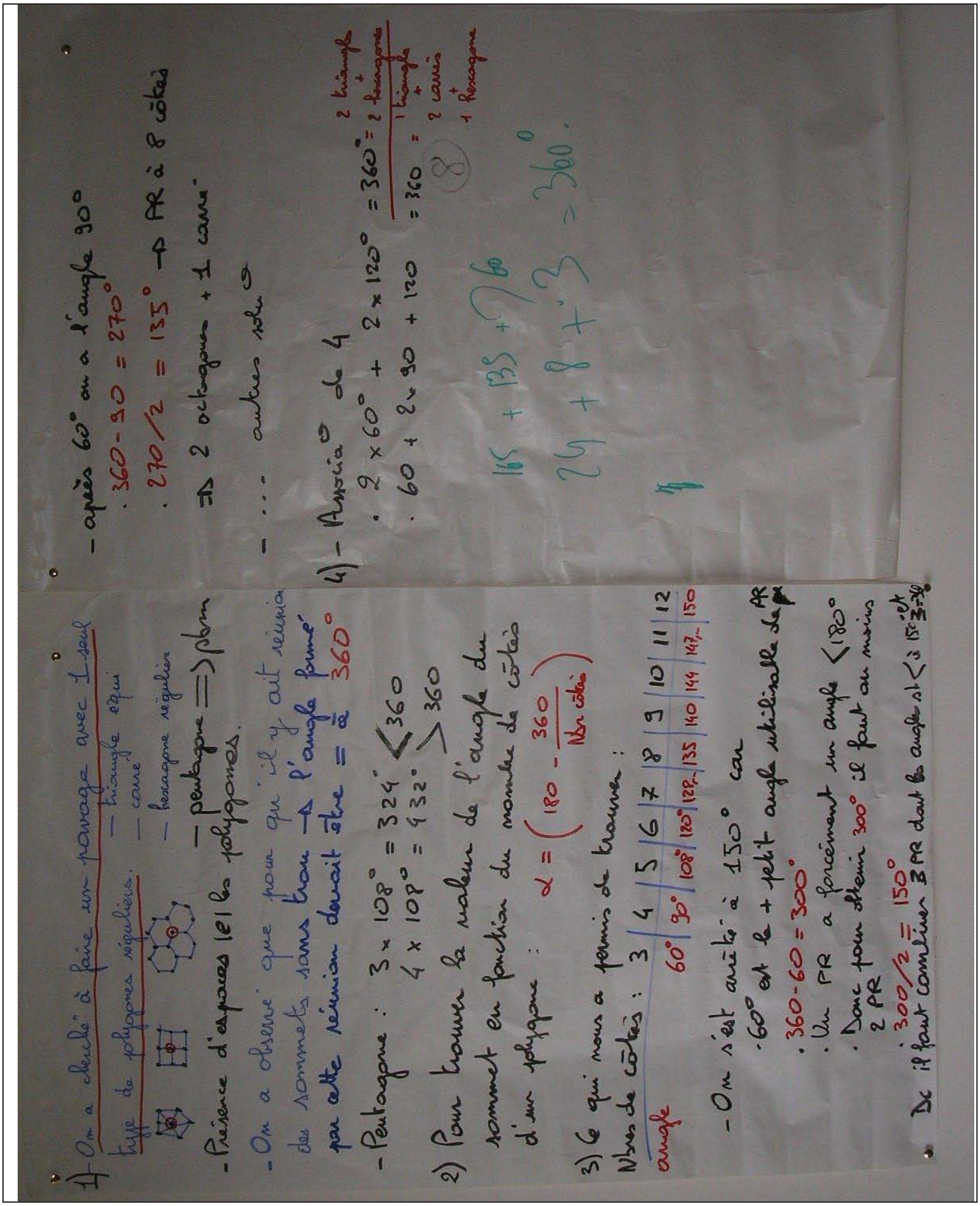
[Simon, 1979] Simon, G. (1979). *Kepler astronome astrologue*. Paris, Gallimard, 1979, Bibliothèque des sciences humaines.

ANNEXE 1


Vincent
Mélanie
Laëtitia
Anne-Lise
Par tâtonnement,
assemblage de polygônes simples :
plrs fois la même figure
carré
4 côtés égaux
4 angles égaux
1
triangle équilatéral
3 côtés égaux
3 angles égaux
3
association de 6 triangles équilatéraux
hexagone
6 cotés égaux
6 angles égaux
4
figures différentes
octogone !
(8c + 8a.)
2
dodécagone (12)
5
essai : (9 côtés) (16 côtés)
Ne convient pas
?
Formules fausses :
• si le nombre de côtés du polygone est 1 multiple de 3 alors il peut être assemblé par 1 triangle.
• si multiple de 4, assemblage par 1 carré
360 ÷ nb de côtés = x
180 - x = y
y × 2 = z
z est l'angle manquant


Polygones réguliers convexes :
carré
triangle équilatéral
décagone
hexagone
octogone.
hexagone
+
triangle
6
hexagone
octogone
+
carré
45°
135°
360÷8=45
180-45=135
135×2+90=360°
108
108
144
108
carré
+
triangle
60°
60°
7
LAURA
ANAÏS
ANNE
AURÉLIE

ANNEXE 2


1) On a cherché à faire un pavage avec 1 seul type de polygones réguliers.
— triangle équi
— carré
— hexagone régulier
— pentagone ⟹ pbm
- Présence d'espaces entre les polygones.
- On a observé que pour qu'il y ait réunion des sommets sans trou → l'angle formé par cette réunion devait être = à 360°
- Pentagone : 3 × 108° = 324° < 360
4 × 108° = 432° > 360
2) Pour trouver la valeur de l'angle du sommet en fonction du nombre de côtés d'un polygone :
α = (180 - 360/Nbr côtés)
3) Ce qui nous a permis de trouver :
Nbres de côtés : 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12
angle 60° | 90° | 108° | 120° | 128,.. | 135 | 140 | 144 | 147,.. | 150
- On s'est arrêté à 150° car
· 60° est le + petit angle utilisable des PR
· 360-60 = 300°
· Un PR a forcément un angle < 180°
· Donc pour obtenir 300° il faut au moins 2 PR
· 300/2 = 150°
Dc il faut combiner 3 PR dont les angles st < à 150°
- après 60° on a l'angle 90°
· 360 - 90 = 270°
· 270/2 = 135° → PR à 8 côtés
⟹ 2 octogones + 1 carré
- ... autres solutions
4) - Association de 4
· 2 × 60° + 2 × 120° = 360° = 2 triangles + 2 hexagones
· 60 + 2 × 90 + 120 = 360 = 1 triangle + 2 carrés + 1 hexagone
8
165 + 135 + 60
24 + 8 + 3 = 360°

ANNEXE 3

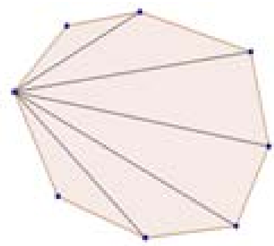
Eléments pour une institutionnalisation

Ces éléments sont à adapter en fonction du public et des objectifs associés et également en fonction des débats qui auront eu lieu dans la clase et qui auront peut-être permis de statuer sur certains points.

Autour des polygones réguliers

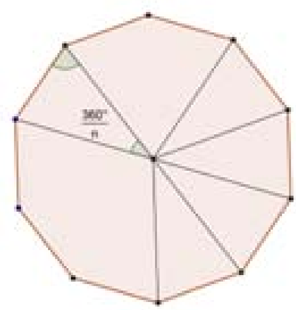
— Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

— Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la mesure des angles d'un polygone régulier, par exemple :



Pour un polygone convexe à n côtés, la somme des mesures de tous les angles intérieurs est égale à $n-2$ fois la somme analogue pour un triangle, qui vaut 180°. Comme les angles d'un n-gone régulier sont tous égaux et qu'il y en a n alors la mesure en degré de chacun vaut $\frac{n-2}{n}180$;

ou :



un polygone régulier à n côtés peut être décomposé en n triangles isocèles dont la mesure des angle au sommet vaut en degré $\frac{360}{n}$ et celle des angles à la base $(180 - \frac{360}{n})/2$. Il faut deux angles à la base pour former un angle de polygone donc la mesure de l'angle en degré est $180 - \frac{360}{n}$.

...

Autour des pavages

— S'il existe un pavage régulier, une condition nécessaire en un nœud du pavage est

$k\frac{n-2}{n}180 = 2 \times 180$, où k est un entier supérieur ou égal à 3. Cette condition s'écrit aussi : $(n-2)(k-2) = 4$. Les seules solutions entières qui conviennent sont $n = 3$ et $k = 6$, $n = 4$ et $k = 4$, $n = 6$ et $k = 3$. Elles correspondent à des pavages par, respectivement, des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers.

— Pour les pavages archimédiens on peut proposer différentes approches en fonction des productions des étudiants.

- On peut construire un arbre de tous les possibles qui épuise successivement les candidats utilisant des triangles, puis des carrés, ...

- On peut aussi présenter l'approche de Kepler, énoncer les propositions XIX, XX, XXI de l'harmonie du monde et débuter l'étude systématique en montrant que Kepler a choisi de travailler sur le nombre de figures différentes présentes. Par exemple pour la proposition XIX, il s'agit de comprendre que Kepler traite le cas où l'on ne considère que deux figures différentes. Il énonce tout d'abord qu'on ne peut associer 6 telles figures car si il existe a_i tel que $a_i > 60$ alors la somme des a_i est supérieure à 360. Puis il cherche à assembler 5 figures de 2 espèces différentes :

  $4 \times 60 + 120 = 360$ ... on obtient le pavage (3,3,3,3,6)
  $3 \times 60 + 2 \times 90 = 360$ ... on obtient les pavages (3,3,3,4,4) ou (3,3,4,3,4)
  $2 \times 60 + 3 \times 90 > 360$ et idem si on prend 3 autres figures à la place du carré.
  ...

- On peut présenter une démarche numérique sur un exemple avec trois polygones réguliers : autour d'un nœud potentiel on a : $a_1 + a_2 + a_3 = 360$ où a_i est la mesure en degré d'un des 3 angles. Par ailleurs, si n_i est le nombre de cotés du polygone régulier i, on a : $a_i = 180\,\frac{n_i - 2}{n_i} = (1 - \frac{2}{n_i})\,180$ et donc la relation précédente devient :

$$\left(1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + 1 - \frac{2}{n_3}\right) \times 180 = 360$$

  soit : $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$ et il reste à chercher les triplets possibles...

Les approches n'utilisant que la condition nécessaire locale sur les angles amènent à 21 n-uplets possibles que l'on peut donner : (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15), (3,12,12), (4,5,20), (4,6,12), (4,8,8), (5,5,10), (6,6,6), (4,4,4,4), (3,4,4,6) ou (3,4,6,4), (3,3,6,6) ou (3,6,3,6), (3,3,4,12) ou (3,4,3,12), (3,3,3,4,4) ou (3,4,3,3,4), (3,3,3,3,6), (3,3,3,3,3,3). On remarque alors que la vérification d'une condition nécessaire, condition locale, ne permet pas d'affirmer que l'assemblage autour d'un sommet va aboutir à la réalisation d'un pavage et on peut conclure avec la présentation des 11 pavages archimédiens.