

---

## STRATES DE COMPETENCE EN MATHEMATIQUES

---

Robert ADJIAGE  
IUFM de Strasbourg

François PLUVINAGE  
Irem de Strasbourg

*Résumé* : Nous souhaitons présenter, justifier et développer l'idée que les savoirs mathématiques relevant du domaine numérique, allant des entiers naturels munis des quatre opérations arithmétiques aux réels utilisés en analyse, relèvent de compétences nettement séparées. Une telle conception s'oppose à la fois au point de vue globalisant qui s'exprime par l'expression anglaise de «mathematical literacy» et au point de vue atomisant qui est apparu dans des colonnes de «compétences exigibles» de programmes scolaires, ou qui est présent dans l'expression «portefeuille de compétences». A partir de fondements épistémologiques et cognitifs, et en nous appuyant sur des observations que nous expliciterons, nous proposons une organisation en strates de compétence caractérisées par des modes de pensée et des formes d'expression qui les distinguent nettement les unes des autres.

### 1. — Questions autour de l'acquisition de compétence dans la scolarité obligatoire

Le terme de compétence est de ceux qui font aujourd'hui florès de par le monde. Non seulement il a cours dans de multiples domaines : biologie, linguistique, droit, management, etc. mais le mot est presque le même dans bien des langues (compétence, competence, competenza, kompetenz, kompetence, kompetencia, ...). Les enquêtes internationales PISA auprès des jeunes de quinze ans, organisées sous l'égide de l'OCDE, devaient lui donner une résonance particulière dans le monde de l'enseignement, car les comparaisons de

performances au niveau mondial, observées à l'aide d'instruments d'évaluation rigoureusement élaborés et appliqués, ont été de nature à jeter le trouble dans l'institution scolaire. Or les performances évaluées par PISA, dans les domaines intitulés en anglais *reading*, *mathematical* and *scientific literacy*, expressions pour lesquelles le français courant<sup>1</sup> ne dispose que de tournures négatives, comme *illettrisme* pour dire le contraire de ce que l'anglais (*reading*) *literacy* exprime, ne s'attachent pas tant aux apprentissages des programmes scolaires qu'à l'acqui-

---

<sup>1</sup> Nous serons cependant amenés à citer dans le § 3 un rapport sur l'enquête EILA (OECD, 2000), dans le titre duquel apparaît le terme « littératie ». Ce mot figure dans le Wiktionnaire, mais pas dans le TLF (trésor de la langue française).

sition des compétences nécessaires à la vie adulte<sup>2</sup> (OECD, 2006, p. 8).

L'emploi du mot « compétences » au pluriel apparaît dans le titre même du document de l'OCDE de 1999 en version française, pour traduire l'anglais *skills*. Hors de l'école, dans l'entreprise, *les compétences* sont l'affaire entre autres des responsables des ressources humaines. Le terme de *compétence* au singulier et son antonyme *incompétence*, quand ils ne sont pas employés dans un sens juridique ou administratif, renvoient le plus souvent au domaine d'activité d'un métier. Il n'est pas besoin de s'étendre longuement sur ce que l'on entend quand on parle par exemple d'un médecin d'une grande compétence. Une caractéristique simplement retiendra notre attention : la distinction que ce médecin fera, entre les cas où il lui est possible de décider d'un traitement et ceux où une consultation ou des examens supplémentaires s'imposent, est partie intégrante de sa compétence. Celle-ci ne se réduit donc ni à un savoir, ni à un savoir-faire, mais comporte aussi l'identification de leur champ de validité. Utiliser un savoir-faire à mauvais escient est ainsi une manifestation d'incompétence.

Toutefois la formation de professionnels n'incombe pas à l'école pour tous. C'est bien pourquoi l'idée de compétence que l'on trouve dans PISA a été déclinée en plusieurs composantes, la première d'entre elles étant la composante linguistique. Nous détaillerons ce point plus loin dans notre texte, mais avant d'entrer dans de telles considérations sur la compétence, il nous paraît important d'envisager de manière générale les risques qui peuvent résulter de l'approche par compétence, en particulier pour l'enseignement des mathématiques.

Un risque est ainsi de méconnaître la spécificité des mathématiques par rapport à d'autres disciplines, comme les sciences expérimentales, et ce faisant de conduire beaucoup d'élèves à quitter l'école ignorants de la nature de la démarche mathématique. La modélisation par exemple peut être extrêmement enrichissante pour les mathématiques, à condition cependant qu'on ne la voie pas comme une source possible d'économie de temps d'enseignement mathématique. Au contraire, il importe pour la formation que la démarche complète de la modélisation soit envisagée, comme elle apparaît par exemple dans l'étude conduite au Québec par Georges Touma (Touma, 2009), avec la prise en compte, entre un phénomène physique et son modèle mathématique, de l'interprétation inductive et de l'interprétation déductive.

Mais le risque qui vient d'être évoqué n'est peut-être pas le plus important. Un autre effet peut avoir davantage d'impact encore sur la scolarité : mettre à l'école l'accent sur la notion de compétence, c'est donner priorité à l'instruction par rapport à l'éducation. Le risque est notamment de négliger les aspects éducatifs possibles de l'enseignement mathématique dans la scolarité pour tous. Car il y a bien sûr une culture mathématique. Et c'est en faveur de cette culture que Georges Glaeser se prononçait, quand il avançait que l'école devait permettre à tout élève de vivre son « Miracle grec » (Glaeser, 1999) c'est-à-dire la rencontre avec un raisonnement mathématique qui peut déboucher sur des découvertes inattendues, comme l'avait été pour les philosophes et mathématiciens grecs l'irrationalité de la racine carrée de deux. Un autre vécu recommandé par un auteur qui reste d'actualité, à savoir Georges Polya, est celui de la résolution de problème, dont l'ouvrage sur l'heuristique (Polya, 1957) détaille soigneusement les démarches et propose au lecteur des méthodes de recherche. Et nous ne saurions conclure ce paragraphe sur l'objectif

<sup>2</sup> Texte anglais original : "PISA 2006 covers the domains of not so much in terms of mastery of the school curriculum, but in terms of important knowledge and skills needed in adult life".

d'acquisition d'une culture mathématique dans la scolarité obligatoire, sans citer la progression proposée par Martin Wagenschein pour l'enseignement des mathématiques : socratique avec la redécouverte, génétique notamment pour raisonner en prenant appui sur certaines règles axiomatiques<sup>3</sup> et enfin *exemplaire* (Wagenschein, 1968). Ce dernier adjectif ne rend qu'imparfaitement l'adjectif allemand *exemplarisch* employé par Wagenschein. Cet adjectif a en effet une connotation de représentativité, recherchée dans les études de cas que cet auteur préconise, plutôt qu'un enseignement allant systématiquement du général au particulier. C'est seulement dans ce dernier volet de la trilogie de Wagenschein que l'acquisition de compétence est questionnée, justement quand on est amené à analyser en quoi un cas envisagé est ou n'est pas *exemplarisch*.

Venons-en à présent à la considération de la compétence telle qu'elle est envisagée dans les enquêtes PISA, en particulier par rapprochement avec la compétence linguistique. Les études de Chomsky ont conduit à une acception précise de la *compétence linguistique*, à savoir ce que les locuteurs d'une langue en connaissent du fait même qu'ils la parlent. Nous y reviendrons par la suite, mais signalons tout de suite que, selon Chomsky, un phénomène remarquable est la répartition très uniforme de cette *compétence linguistique* au sein de l'espèce humaine, ce qui a pu être obscurci lorsque l'on s'est focalisé sur la variété des performances linguistiques individuelles. La compétence linguistique d'un individu se décline en des connaissances lexicales et un bagage grammatical, qui lui permettent aussi bien de comprendre que de produire des phrases qu'il n'avait auparavant jamais rencontrées.

3 On pensera bien sûr à la géométrie mais aussi, dans le domaine numérique, par exemple à l'appui sur la distributivité pour établir la règle du produit de deux relatifs.

Les mathématiques ayant pour nous un caractère affirmé de discipline d'expression, un tel point de vue ne manque pas de nous intéresser. Les mathématiciens sont appelés dans l'exercice de leur activité à acquérir plusieurs langues. Pour s'en convaincre, il suffit de montrer à un honnête homme, pourtant capable de lire et de comprendre des calculs arithmétiques voire des formules algébriques simples, un bref passage même non spécialisé comportant de l'écriture symbolique, comme la définition suivante

*Définition* : Une suite  $u$  est dite périodique si  
«  $\exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$  »

pour qu'il éprouve l'impression qu'on a mélangé du français et du chinois mandarin.

Mais la notion de langue ne rend pas compte de toute la complexité de l'expression mathématique. Car pour parler géométrie, on a besoin d'au moins deux « idiomes », la langue naturelle et l'idiome des figures, pour parler fonctions, on a besoin de la langue naturelle, des écritures algébriques, des écritures plus spécifiques ( $\lim_{x \rightarrow \infty}, \int f(x)dx$ , etc.), des graphes et tableaux... D'où le recours, nécessaire en mathématiques, à différents *registres d'expression*, qui conduit à des considérations spécifiques sur lesquelles Raymond Duval (1995, pp. 15-85) s'est penché avec une attention toute particulière. Rappelons notamment que pour Duval (1995, pp 59-61), l'expression par des registres hétérogènes n'est pas qu'un moyen de communiquer en mathématiques, elle est au cœur de la genèse conceptuelle.

Nous voyons donc qu'il y a beaucoup d'hétérogénéité dans l'expression mathématique, que cette hétérogénéité est nécessaire à la conceptualisation et qu'elle suppose des ruptures. C'est pourquoi une notion générale de compétence mathématique analogue à la compétence linguistique ne nous semble pas fondée. Nous proposerons de décliner la complexité mathématique,

restreinte ici au domaine numérique, en strates de compétence. Nous verrons que maîtriser une nouvelle strate nécessite la maîtrise d'au moins un nouveau registre mais que les notions de strate et de registre ne se recouvrent que partiellement. Nous verrons aussi qu'il y a lieu de considérer d'autres composantes que celles liées aux registres dans une strate donnée.

## 2. — Le point de vue atomisant vs globalisant

Le point de vue atomisant est celui qui a prévalu, notamment en France, depuis que le terme de compétence a été introduit dans les programmes scolaires et les documents d'accompagnement. Il consiste essentiellement à définir les compétences à acquérir en termes de savoir-faire ou de *potentiel d'action* selon l'expression de Winslow (2005). Cette approche a certes permis un certain nombre d'avancées. Winslow (ibid, p. 138) en distingue quatre que nous résumons ci-dessous.

- Déplacer en partie l'attention « du domaine de l'institution (savoirs à transmettre par l'enseignant) au domaine de l'élève et de ses actions »
- « Ce déplacement d'attention se transpose aussi à l'enseignement » supposé « faciliter et assister le développement de pratiques plutôt que de les transmettre »
- ... on est forcé d'explicitier des priorités réalistes par rapport à l'infinité potentielle de situations qui, normalement, sont liées à un élément de matière – ce qui peut considérablement nuancer la conception de la matière, surtout chez l'enseignant
- « Il devient possible de considérer l'évaluation des objectifs au-delà de l'implicite des pratiques habituelles ».

Le dernier point permet notamment de préciser certains défauts bien ciblés d'apprentissage et d'y remédier de manière adéquate.

D'un autre côté, ce saucissonnage en savoir-faire risque de reléguer la cohésion, la cohérence et la construction du savoir en jeu au second plan et de déboucher sur une dérive behavioriste. Brousseau (2003, pp. 6-7) énonce : « seuls les savoirs sont assez facilement traités dans les évaluations [destinées à déterminer à quel degré des compétences sont acquises] et dans les décisions didactiques actuelles. Or les connaissances<sup>4</sup> sont indispensables à la mise en œuvre des savoirs. Les décisions prises sans en tenir compte conduisent à de mauvaises corrections et à des résultats décevants ». Chevillard (2002, p. 55) craint que l'école ne devienne un lieu « de diffusion et de validation de compétences variées... acquises et validées sans référence ni révérence obligée aux savoirs 'monumentaux' ». Une telle école « peut prendre l'allure d'une salle des marchés où, loin des trop longs détours de la connaissance 'théorique', on gère fiévreusement un 'portefeuille de compétences' qu'il convient d'actualiser rapidement pour répondre aux demandes des différents marchés sur lesquels l'individu est censé réaliser sa valeur ».

A l'opposé de cette conception atomisante existe une conception globalisante. L'expression anglaise *Mathematical literacy*, qui tente de définir une compétence mathématique générale, s'appuie sur une telle conception. Elle est explicitement définie dans le cadre théorique du programme PISA : « *Mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics play in the world, to make well-founded judgments and to*

---

4 Définies dans le même document comme : « moyens de prendre une décision, de choisir une action, une formulation, une preuve ». Classiquement la théorie de Brousseau distingue savoir et connaissance : « Une situation où les connaissances... sont explicitement l'objet... d'une identification, d'une classification, d'une articulation avec d'autres etc. donne alors à ces connaissances une autre fonction : celle d'objets de l'action du sujet. Nous appelons ces nouveaux objets : « *savoirs* »... lorsqu'ils présentent certains caractères de stabilité, de validité etc. » (Brousseau, 2003, p. 6).

use and engage in mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflexive citizen » (OECD, 1999, p. 41).

Notons tout d'abord que ce cadre théorique repose sur un modèle scandinave de l'éducation. Il a en effet été développé sous la direction de Mogens Niss, qui se réfère explicitement au projet de réforme du système éducatif danois KOM, dont le rapport final date de 2002 : « It should be noted that the thinking behind and before the Danish KOM-project has influenced the mathematics domain of OECD's PISA project, partly because the author is a member of the mathematics expert group for the project ». (Niss, 2003, p. 12). Selon Winslow (2005, p. 141) : « Il y a, en Scandinavie, une tradition assez longue de considérer l'éducation mathématique dans une perspective politique de démocratisation ». D'où l'importance, pour un citoyen réflexif et participatif, de développer des compétences mathématiques suffisantes pour rester en prise avec une société de plus en plus dépendante des applications mathématiques. Il est donc tentant, dans ce cadre, de définir un capital mathématique pour l'honnête homme, en termes de potentiel d'action donc de compétence, ayant suffisamment d'homogénéité pour caractériser un niveau d'acquisition. Il est aussi tentant de naturaliser cette compétence en la rapprochant du fonds commun partagé par tous les humains, à savoir leur compétence linguistique : « The notion of mathematical literacy is "the counterpart in mathematics" of mastering a language. » (Niss, 2003, p.6). Pour préciser légèrement ce que nous avons dit en section 1 sur la « compétence linguistique » de Chomsky (1965)<sup>5</sup>, résumons le commentaire qu'en

font deux linguistes (Phillips & Tan, 2005). Chomsky considérait que cette compétence reposait sur la connaissance innée de règles plutôt que d'items et de relations, l'innéité de cette connaissance signifiant qu'on n'avait pas besoin d'être formé pour l'acquérir et qu'en outre elle pouvait s'appliquer à un nombre illimité d'exemples non rencontrés auparavant. A part quelques éléments de logique ou aussi le « subitizing », c'est-à-dire la capacité de discriminer des petits groupes de un à quatre objets dans un temps très court, on ne voit pas très bien les domaines mathématiques qui pourraient avoir de pareilles caractéristiques. Apprendre les mathématiques, même élémentaires, passe par de l'enseignement, de l'écrit (qui n'apparaît évidemment pas dans la « compétence linguistique »), des mises en relation, de l'entraînement. Quant aux transferts – « à un nombre illimité d'exemples » – tout enseignant sait qu'ils sont très limités, y compris à l'intérieur d'un même type de problèmes. L'expression même de mathematical literacy semble donc contradictoire dans les termes.

Mais, ainsi que nous l'avons déjà dit en section 1, les mathématiques, même élémentaires, n'ont pas suffisamment d'homogénéité pour que leur maîtrise soit réductible à une compétence générale. Observons que Niss lui-même a cru utile de décliner sa « mathematical competence » en huit sous-compétences (competencies en anglais) Niss (2003, p. 7-9)<sup>6</sup>. Ces dernières parviennent-elles à stratifier un tant soit peu les mathématiques du citoyen réflexif ? Donnons à nouveau la parole à Winslow (2005, p. 143) : « Ce qui est décrit par les huit compétences est une expertise idéalisée – voulue indépendante des savoirs, des individus et des contextes ». En effet, chacune d'entre elles décrit un aspect de l'activité mathématique en général (pouvoir reconnaître, formuler et résoudre des problèmes mathématiques, pouvoir suivre, analyser, évaluer et construire des raisonnements mathé-

5 Les développements actuels, notamment des neurosciences, rendent d'ailleurs en partie obsolète la notion de compétence linguistique

6 On trouvera une version résumée en français de ces huit sous-compétences dans Winslow (2005, pp. 140-141)

matiques, pouvoir manier diverses représentations de phénomènes mathématiques, pouvoir manier les formalismes mathématiques...), mais ne dit rien de la manière dont les savoirs et les moyens d'expression qui leur sont liés, ainsi que les institutions par exemple, la spécifient. Notons le cercle vicieux que risque d'entraîner l'usage du mot mathématique dans chacune des huit compétences. Mais retenons surtout que ce catalogue n'apporte pas une grande aide à la conception des enseignements et des évaluations. Toutes les décisions importantes sont laissées au choix des développeurs de sujet pour évaluer la capacité des élèves à utiliser les mathématiques lorsqu'elles croisent leur vie. Qu'est-ce qui est attendu d'un honnête homme ? Qu'il maîtrise les opérations arithmétiques ? Les rationnels ? Les proportions ? Les formules ? Au service de quels types de problèmes ? En surmontant quels obstacles pointés par les didacticiens ?

C'est peut-être l'absence de réponses à de telles questions qui a pu conduire en France le Ministère à insérer des capacités dans les programmes scolaires (MEN, 2008b) et à publier des grilles de référence pour l'évaluation et la validation des compétences du socle commun (MEN, 2008a, p. 13). Une lecture superficielle de ces documents pourrait laisser penser qu'il y a là une tentative de conciliation des deux approches atomisante et globalisante. Un examen plus approfondi montre qu'il n'en est rien. Lorsqu'une compétence d'apparence générale est formulée, elle renvoie à sa déclinaison en des capacités qui se trouvent décrites dans les programmes et dont la somme définirait la compétence. Cela est pour nous la marque d'une approche atomisante : nous avançons qu'en termes de compétence, le tout n'est pas la somme des parties. L'étude des résultats à trois exercices de l'évaluation PISA 2003, dont les énoncés figurent en annexe 1, nous permettra d'étayer une telle affirmation et de proposer un cadre alternatif pour analyser les compétences.

Les trois exercices que nous avons sélectionnés présentent des variations de score pas forcément attendues. Dans le tableau ci-dessous apparaissent les scores des élèves finlandais, classés régulièrement au meilleur niveau par cette évaluation.

PISA 2003 Exercices	Score Finlande
<i>Taux de change 1</i>	89,5%
<i>Taux de change 2</i>	88%
<i>La meilleure voiture</i>	76%
<i>Marche à pied</i>	41%

Tableau 1 : comparaison de scores à quatre items de PISA 2003 (Finlande)

La résolution de *Taux de change 1* amène à poser et à effectuer :  $3000 \times 4,2$ . Le choix opératoire est congruent à l'énoncé et le taux de réussite très élevé n'est pas surprenant. *Taux de change 2* amène à poser et à effectuer  $3900 \div 4$ . Le recours à l'opération réciproque, bien que faisant partie du bagage courant relatif au champ multiplicatif, peut expliquer la légère chute du taux de réussite.

*La meilleure voiture* demande d'abord de sélectionner l'information pertinente. Pour cela, il suffit de lire séquentiellement la première ligne du tableau, puis de remplacer les lettres par les valeurs adéquates. Il n'empêche que la moindre immédiateté de la production de l'écriture arithmétique résolutive par rapport à l'énoncé pourrait expliquer la chute modérée de 12% dans la réussite.

Comment expliquer la chute brutale du score à la *Marche à pied* ? Ni par la présence de lettres (sinon la chute à *La meilleure voiture* devrait être du même ordre), ni par l'opération résolutive :  $70 \div 140$ , d'une difficulté comparable à *Taux de change 2* (le résultat est

certes inférieur à 1, mais la possibilité de l'exprimer en termes de moitié en diminue la complexité).

Aucune des huit compétences de l'approche globalisante ne permet bien sûr de différencier ces quatre items. Qu'en est-il des compétences pointées dans l'approche atomisante ? Nous avons recherché dans les grilles de références pour l'évaluation et la validation des compétences du socle commun (MEN, 2008a, p. 13) et dans les Programmes du collège (MEN, 2008b, pp. 22-34), les extraits qui peuvent se rapporter à ces trois exercices. Ils sont exprimés en termes de connaissances et de capacités et accompagnés de commentaires qui témoignent d'une intention louable, car ils établissent des liens entre les « atomes »-capacités et précisent les types d'activités associées, par exemple au moyen de classifications (voir notamment les trois axes du calcul littéral). Ces extraits sont présentés en annexe 2. Commençons par les grilles de référence. A partir des capacités citées dans la colonne 2 *Explicitation des items* et des indications fournies en colonne 3, il est possible de concevoir n'importe lequel des trois exercices que nous analysons. Donc, le socle commun n'est pas d'un grand secours pour nous aider à comprendre ce qui les différencie.

Regardons à présent du côté des programmes. *La meilleure voiture* relève clairement de la capacité associée à l'utilisation d'un tableau (6<sup>ème</sup>, année 6) et *Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques* (4<sup>ème</sup>, année 8). *Taux de change* et *La Marche à pied* évaluent la capacité à *Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné* (3<sup>ème</sup>, année 9). En outre, pour *La Marche à pied*, il faut sans doute y adjoindre des capacités liées aux fractions : *Utiliser l'écriture fractionnaire comme expression d'une proportion, d'une fréquence* (5<sup>ème</sup>, année 7) et, peut-être pour isoler l'inconnue p : *l'équivalence*

entre  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  (4<sup>ème</sup>) et  $ad = bc$  (b et d étant non

nuls). On peut ainsi différencier les trois exercices entre eux, ce qui est un progrès, et expliquer leur hiérarchie puisque *Taux de change* ne relève que d'une capacité-atome, *La meilleure voiture* de deux, et *La Marche à pied* de trois. Mais on reste en même temps insatisfait, car on comprend que la complexité de la tâche tient moins au nombre de capacités requises qu'à leur nature, leur activation pertinente et leur coordination. C'est donc du côté des traitements que nous allons nous pencher à présent pour tenter d'approfondir notre analyse. Nous y développerons des analogies grammaticales qui permettront de mieux comprendre la nature de la complexité.

**Taux de change 1** demande de comprendre la formation des nombres (l'écriture décimale de 3000 et 4,2) qui jouent le rôle des mots, la mise en relation des nombres (le choix de la multiplication) pour former le « syntagme » multiplicatif  $3000 \times 4,2$  (où  $\times$  tient le rôle d'un connecteur) et l'effectuation de la multiplication, la formation de la « phrase » (où le signe d'égalité tient le rôle de verbe) :  $3000 \times 4,2 = 12600$ .

**Taux de change 2** demande la formation du même type de phrase, où le connecteur  $\times$  est remplacé par le connecteur  $\div$  car il s'agit de l'opération réciproque.

**La meilleure voiture** demande de remplacer les mots d'un syntagme qui est déjà fourni

$$3 \times S + F + E + T$$

par d'autres mots à sélectionner de façon univoque dans un tableau, puis d'effectuer les opérations et de compléter le syntagme en phrase :

$$3 \times 3 + 1 + 2 + 3 = 15$$

Dans *la Marche à pied*, une phrase entière est

fournie :  $\frac{n}{L} = 140$ , mais son niveau de complexité est plus élevé car, s'agissant de l'expression d'un rapport, la ligne d'écriture se brise en deux, celle du numérateur et du dénominateur. Nous avons déjà abordé de nombreuses fois cette question, par exemple dans Adjiage (2001, p. 12 ; 1999, pp. 131-134), et montré à partir d'observations d'élèves que l'existence de ces deux lignes, en interrelation mais obéissant à des règles de syntaxe fort différentes<sup>7</sup>, est une véritable rupture dans le mode de pensée des élèves. Nous avons exprimé cela en disant que l'écriture fractionnaire est bidimensionnelle (ibid, pp. 45-48), contrairement à l'expression d'un rationnel sur une droite graduée ou à l'expression décimale d'un nombre qui est unidimensionnelle (se déploie sur une seule ligne).

De plus la solution passe, après remplacement de  $n$  par 70, par la transformation de

la phrase initiale :  $\frac{70}{L} = 140$ , en la nouvelle

phrase :  $L = \frac{70}{140}$ .

Pour dire les choses autrement, on passe d'un traitement de mots dans les deux premiers exercices à un traitement de phrases dans le dernier. Et toutes nos observations d'élèves le confirment, ceci est une autre rupture dans leur mode de pensée et leur appréhension des traitements mathématiques.

A la lumière de cette nouvelle analyse, on constate que malgré la présence de lettres dans *La meilleure voiture* et son absence dans *Taux de change*, ces deux exercices sont beaucoup plus proches l'un de l'autre, sur un plan qu'on peut qualifier de cognitif, que de *La Marche à pied*. Ce qui explique beaucoup mieux les différences relatives de scores.

Il est temps à présent de conclure cette section. Une compétence globalisante ne peut être pertinente, même à un niveau élémentaire des mathématiques, parce qu'il existe plusieurs niveaux d'appréhension de ces mathématiques. De même, la seule décomposition de la compétence à résoudre tel type de problème en atomes-capacités n'est pas satisfaisante non plus, car elle passe sous silence une bonne part de la complexité des traitements, notamment en termes de mobilisation et de coordination. On a vu par exemple qu'une même capacité, comme le calcul d'un antécédent par une application linéaire, peut être mobilisée à plusieurs niveaux, selon qu'elle implique des nombres entiers ou à virgules, ou des fractions.

C'est la détermination et la caractérisation de ces niveaux<sup>8</sup> qui va à présent nous préoccuper et qui nous amènera à une acception de la notion de compétence plus utile pour comprendre les difficultés de l'apprentissage et pour concevoir enseignements et évaluations.

### 3. — Compétence et impotence en mathématiques

C'est en situation que, par principe, la compétence d'un individu s'apprécie. C'est pourquoi les enquêtes internationales comme l'Enquête Internationale sur la Littératie des Adultes (OECD, 2000)<sup>9</sup>, désignée par EILA dans ce qui suit, ainsi que PISA 2000, 2003, 2006 et 2009, cherchent à présenter aux populations interrogées des situations typiques auxquelles

7 Penser à l'aspect désarçonnant d'une phrase comme  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  lorsqu'on la considère sous l'angle du développement de deux lignes d'écriture

8 Le mot niveau est ici employé en première approximation. Nous le remettrons en question plus loin.

9 Nous renvoyons au rapport en français disponible en ligne



la société amène les individus à être confrontés. Mais, par la force de choses, cela est fait sur support écrit<sup>10</sup>, ce qui peut amener à douter de l'authenticité de ces confrontations.

Dans les analyses des réponses fournies par les populations interrogées, on part du postulat que pratiquement toutes sont alphabétisées et on distingue différents niveaux de *littératie*, numérotés de 1 à 5. Voici par exemple ce qui est dit dans le rapport sur EILA du premier niveau : « **Le niveau 1 de Littératie** dénote un niveau de compétences très faible ; par exemple, la personne peut être incapable de déterminer correctement la dose d'un médicament à administrer à un enfant d'après le mode d'emploi indiqué sur l'emballage. » Et le niveau 3 est le niveau de compétences nécessaire pour terminer des études secondaires et entrer dans le supérieur (OECD, 2000, p. 11). Chaque question proposée est classée selon un de ces niveaux. On regarde alors, pour une personne interrogée, jusqu'à quel niveau elle réussit un pourcentage des questions au moins égal à un seuil donné (la valeur retenue dans EILA est de 80%) et c'est ce niveau qui est pris pour celui de la personne.

Nous souhaitons discuter ici, dans le cas précis des mathématiques, non pas la méthodologie de telles enquêtes, ce qui serait prétentieux de notre part car celle-ci a été extrêmement travaillée, mais les prémisses sur lesquelles ces enquêtes sont fondées. La discussion peut être menée autour de l'idée même de compétence, car l'enquête EILA et à sa suite les enquêtes PISA reposent davantage sur une idée de compétences (ou capacités, en anglais *skills*) que de compétence (*competency*), comme l'extrait qui suit le montre clairement, même si le mot *compétence* y est employé au singu-

lier : « *La relation qui existe entre la difficulté de la tâche et la compétence de la personne est comparable à l'épreuve du saut en hauteur dans une compétition d'athlétisme : l'athlète essaie de sauter par dessus une barre placée de plus en plus haut. Chaque athlète est compétent à une hauteur particulière. A cette hauteur, la probabilité de réussite est élevée et il peut sauter presque tout le temps par-dessus la barre placée à des niveaux plus bas. Cependant, lorsque la barre est placée à un niveau plus élevé que celui où l'athlète est compétent, on ne s'attend pas à ce qu'il puisse réussir de manière constante.* » (OECD, 2000, p. 96)

S'agissant de mathématiques, et en adoptant un point de vue didactique, on ne peut pas considérer un sujet comme possesseur à un moment donné d'un certain savoir ou de certaines compétences (au pluriel) qui suffiraient à le mener inéluctablement à une réponse acceptable à un problème posé. Pour Balacheff & Margolinas (2005, pp. 5-7), il est essentiel de prendre en compte non pas le sujet seul, mais aussi ses interactions avec le milieu. Le système « sujet-milieu », que ces auteurs nomment une *conception*, se compose de problèmes, d'opérateurs, d'un système d'expression et d'une structure de contrôle « *qui permet jugements et décisions* » (ibid. p. 24). C'est dans cette structure de contrôle qu'il y a sans doute lieu de situer la compétence (au singulier) du sujet. Elle est en effet dotée d'un caractère de stabilité qui ne la limite pas à un petit nombre de cas précis. Elle peut aussi permettre au sujet la reconnaissance d'une erreur, que celle-ci soit due à des raisons sémantiques internes aux mathématiques ou à un défaut d'adéquation à la réalité en étude. Tout ceci suppose notamment de la part du sujet une maîtrise mathématiquement correcte du système de représentation « *qui permet l'expression des problèmes et des opérateurs* » (ibid. p. 6).

10 Dans la plus récente enquête PISA, le support informatique est également sollicité.

Certaines questions mathématiques peuvent être tout simplement hors champ d'une conception, lorsqu'elles ne constituent pas un *problème* pour le système *sujet-milieu* parce qu'elles n'y rencontrent pas de référence physique ou de moyen de s'y exprimer. Devant la question suivante relevant de la règle de trois : « Sachant que 4 stylos valent 2,42 €, combien valent 14 stylos ? » quelqu'un qui déclare d'emblée : « Je ne sais pas le faire du tout » exprime que la question ne se situe pas dans son champ de compétence. Il s'agit donc d'une déclaration d'incompétence, même si les capacités mathématiques de la personne pourraient au moins lui permettre de s'engager dans le problème. Nous parlerons d'impotence dans un tel cas.

La notion de compétence est-elle pour autant à lier à un concept, c'est-à-dire un ensemble de conceptions au sens qui vient d'être vu ? Pour répondre par l'affirmative, nous allons devoir donner une large acception à cette notion de concept. En effet, nous avons pu constater (Adjage & Pluvillage, 2007), pour des traitements mobilisant la proportionnalité, que la réussite mathématique peut emprunter des chemins différents. Nous avons fait une étude d'une durée de deux ans (6<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup>, années 6 et 7) dans deux classes, dont l'une, dite d'expérimentation partielle, avait travaillé dans l'environnement papier-crayon alors que l'autre, dite d'expérimentation complète, avait disposé d'un logiciel d'apprentissage des fractions ORATIO<sup>11</sup> (Adjage & Heideier, 1998). Nous avons soumis aux élèves des deux classes un questionnaire d'évaluation. Pour se donner une référence externe à notre étude, nous avons proposé ce questionnaire à des élèves-maîtres préparant le concours de professeur des écoles. L'observation mit en évidence pour les élèves-maîtres un excellent niveau de réussite, pour les élèves de l'expérimentation complète un niveau

approchant celui des élèves-maîtres et pour les élèves de l'expérimentation partielle un niveau moindre, plus proche des résultats de la population scolaire standard. En termes de procédures, la grande majorité des élèves-maîtres interrogés dans notre étude eut recours aux « produits en croix », alors que dans la population de l'expérimentation partielle les procédures étaient très dispersées, et que dans le groupe de l'expérimentation complète, c'est l'écriture fractionnaire qui dominait nettement. On peut donc assimiler le niveau de compétence qui avait été atteint par beaucoup des collégiens de l'expérimentation complète à celui des élèves-maîtres et, malgré des différences procédurales qui renvoient à des conceptions différentes, nous proposerons de situer les uns et les autres dans ce que nous nommons une même *strate de compétence*, la strate *rationnelle*.

En raison des différences de registres utilisables, une strate recouvre plusieurs conceptions ayant en commun un champ de problèmes, des langages non identiques mais permettant des échanges, des systèmes de contrôle fonctionnant de manières isomorphes. Dans le cas de la proportionnalité dont nous venons de parler, on peut voir ainsi trois conceptions mathématiquement justifiées, qui mobilisent respectivement les procédures : « règle de trois », « produits en croix », calcul fractionnaire. Pour un individu, l'une ou l'autre de ces procédures sera acquise de manière très stable en raison de la sécurité à l'emploi qu'il aura éprouvée. Mais pour autant, moyennant des explications appropriées, il pourra comprendre les autres procédures et les considérer comme acceptables. Et par ailleurs, quelle que soit la procédure qu'il mobilise, des comparaisons de proportions sont utilisables pour le système de contrôle.

C'est pourquoi des interlocuteurs qui se situent dans une même *strate de compétence* sont à même de communiquer : ainsi, l'élève-maître utilisera

---

11 Téléchargeable gratuitement à l'adresse donnée en bibliographie.

teur des produits en croix et l'élève de l'expérimentation complète utilisateur des fractions pourront mettre leur procédure respective en regard et les confronter. Par ailleurs, une strate n'est pas figée pour un individu donné : elle peut s'enrichir de conceptions nouvelles. Ainsi, pour un individu familier des quatre opérations arithmétiques élémentaires, l'introduction des notions de troncature et d'arrondi ne nécessite pas de remise en question de son univers numérique. Au contraire, passer d'une strate à une autre est long et difficile, car cela demande :

- une rupture dans le mode de pensée,
- une rupture dans les moyens d'expression des objets et relations mathématiques impliqués.

Cela est comparable à un changement de langue et explique qu'un individu puisse être parfaitement compétent relativement à une strate et incompetent relativement à une autre. C'est le cas par exemple pour l'apprentissage de la proportionnalité au collège (années 6 à 9 de la scolarité). Les élèves de cette tranche d'âge maîtrisent en gros les « quatre opérations » mais nombre d'entre eux échouent à mobiliser et mettre en œuvre des opérateurs pour les traitements rationnels, malgré l'enseignement des fractions qu'ils reçoivent.

En conclusion de ces considérations, nous dirons que plusieurs caractéristiques de notre idée de la compétence en mathématiques, notamment son caractère relatif au milieu, son aspect évolutif, l'importance des éléments langagiers nous amènent à proposer un glissement de la prise en compte de niveaux vers celle de strates, sans méconnaître des niveaux à l'intérieur des strates. C'est pourquoi la comparaison avec le saut en hauteur proposé dans EILA ne nous convient pas. Si l'on veut (mais ce n'est pas obligatoire) faire une comparaison avec des activités physiques, nous préférons penser à la glisse sur l'eau avec planche à voile ou kitesurf ;

chaque discipline a ses niveaux, mais un véliplanchiste même confirmé pourra se sentir désemparé si on le lâche de but en blanc au bord d'une plage avec un kitesurf.

En accord avec les réflexions de la commission Kahane (2002) et avec les observations que nous avons pu faire, une proposition de partition selon quatre strates de compétence touchant au domaine numérique nous a paru justifiée. L'objet de la section 4 qui suit est d'expliquer ces quatre strates.

#### 4. — Les quatre strates de compétence

Nous allons préciser ce que nous mettons dans chacune des quatre strates de compétence. Notre propos n'est pas dans cet article de détailler tous les constituants de ces quatre strates. Les lecteurs qui viseraient plus d'exhaustivité sont invités à se reporter à Adjage et Pluvinaige (2008, pp. 37-51). Nous nous contenterons donc de proposer, à partir d'exemples, quelques caractérisations permettant avant tout de décider quelle strate de compétence requiert telle activité. Nous insisterons sur les caractérisations qui s'éloignent de celles qui sont habituellement prises en compte ce qui amènera à mettre au jour des zones de non recouvrement par les catégories habituelles. Nous commencerons par fournir une présentation synthétique de chaque strate, avant d'en préciser les frontières à partir d'exemples. Notre description se fera en termes mathématiques bien sûr, mais nous conserverons la métaphore grammaticale pour caractériser les aspects qui nous semblent bien expliquer des spécificités des strates et des difficultés et obstacles liés aux changements de strates. Notons enfin qu'il y a une hiérarchie entre ces strates, correspondant à l'ordre dans lequel nous les présentons. Ce qui ne signifie pas qu'on doit totalement maîtriser la strate antérieure avant d'aborder la suivante, mais que celle-ci doit pouvoir s'appuyer solidement sur celle-là.

Nous définissons :

- La strate numérique (ou strate des quatre opérations) : capacités à maîtriser les entiers et les décimaux, ainsi que les quatre opérations de l'arithmétique élémentaire (choix opératoires pertinents pour résoudre les problèmes et effectuation des techniques opératoires) ; former des nombres au moyen des règles de la numération décimale (former des mots), former des expressions arithmétiques comme  $3000 \times 4,2$  (former des syntagmes), produire des égalités arithmétiques pour résoudre un problème (former des phrases pertinentes par rapport à un problème posé).
- La strate rationnelle : Maîtriser les rapports et les proportions, ainsi que le produit et le quotient de nombres relatifs ; comme pour la strate numérique, on retrouve la formation de mots et de phrases mais la partition se joue à présent sur deux lignes, un peu comme en solfège lorsqu'on adjoint à la clé de sol la clé de fa sur deux lignes séparées mais pourtant coordonnées. Sans cette coordination, la représentation des fractions sur la droite graduée et la règle d'addition des fractions sont incompréhensibles. C'est une rupture majeure dans les apprentissages qui accompagne l'entrée dans un mode de pensée relative.
- La strate algébrique : Elle englobe le calcul avec des lettres, ou calcul formel, mais, comme on le verra sur des exemples, nous ne pouvons limiter la strate algébrique à la maîtrise des écritures littérales, même considérées dans leur diversité au collège telle que décrite dans la colonne Commentaires de la grille d'extraits des programmes de l'annexe 2, 4<sup>ème</sup>, rubrique Calcul littéral. Car il existe des activités du niveau de la strate algébrique qui n'utilisent pas de lettres, et des activités qui utilisent des lettres et qui sont du niveau de la strate numérique (voir

*La meilleure voiture* en section 2). Pour nous, la rupture majeure de la strate algébrique à la strate rationnelle réside dans la capacité non plus seulement à former des phrases, mais à traiter des phrases, par exemple remplacer une phrase par une phrase de même signification.

- La strate fonctionnelle : L'étude des fonctions fait apparaître des problématiques nouvelles par rapport à celles de l'algèbre. Des traitements comme l'interpolation et l'extrapolation, à la base de démarches de modélisation, ont conduit à des notions et des notations nouvelles comme celles de dérivation et différentiation reposant sur des variations, puis celles d'intégration reposant sur des « moyennisations », afin d'anticiper et de prédire. Le fait qu'une fonction apparaisse comme un « procept », terme introduit par Gray & Tall (1994) pour désigner à la suite de l'étude de Sfard (1991) une combinaison de procédure (process en anglais) et de concept, et le fait que des fonctions se composent, ou s'inversent quand elles sont monotones, marquent des ruptures nettes par rapport à l'algèbre.

#### 4. 1 *La strate numérique*

La strate numérique est celle dont on comprend le plus aisément la portée. Résoudre un problème à ce niveau demande de prendre en compte les grandeurs de l'énoncé, de les mettre en relation, d'interpréter cette relation en termes numériques, mobilisant des entiers ou des décimaux, de recourir à des opérations arithmétiques résolvantes (former une phrase), se déployant le long d'une seule ligne de calcul en une expression unidimensionnelle.

Si nous devons envisager une évaluation pour détecter les élèves qui sont déjà en difficulté dans cette strate des « quatre opérations », nous pourrions proposer le sujet de l'annexe 4,

inspiré des questions de base des évaluations nationales appliquées en fin d'école primaire. Comme des erreurs (par exemple des erreurs de calcul) peuvent se glisser dans des traitements mathématiques corrects du point de vue de la méthode, nous souscrivons complètement à la décision prise dans le rapport EILA de considérer comme concluants des taux de réussite à partir de 80%. En conséquence, suite à la passation du sujet proposé en annexe 4, un élève qui n'obtiendrait pas quatre réussites sur les cinq questions posées pourrait légitimement donner lieu à une suspicion d'*illettrisme mathématique*, jugement à compléter au vu d'une épreuve élémentaire de français pour voir s'il ne s'agit pas d'*illettrisme* tout court, car une proportion non négligeable d'élèves entre au collège en éprouvant des difficultés de lecture courante.

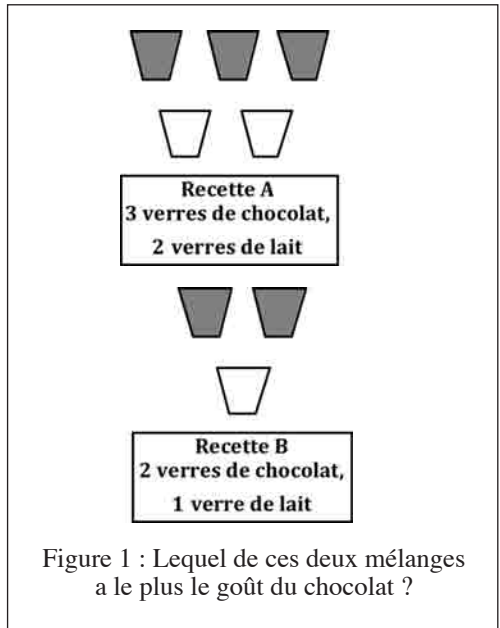
4. 1 *La strate rationnelle vs la strate numérique*

Commençons par préciser les deux ruptures importantes (voir section 1) dans le mode de pensée et dans le mode d'expression, pouvant caractériser le passage de la strate numérique à la strate rationnelle.

- au niveau de la rupture dans le mode de pensée, à travailler sous hypothèse(s) et à rendre variables des données constantes de l'énoncé
- au niveau de la rupture dans le mode d'expression, à prendre en compte une partition à deux lignes, par exemple lors des traitements fractionnaires

4. 2. 1 *Le goût du mélange*

Le plus simple est de considérer l'exemple basé sur les fameux mélanges de Noelting (1980), représenté sur la figure 1, pour illustrer ces deux ruptures. Un raisonnement juste, fréquemment utilisé par les élèves de fin de l'école



ou début du collège, est le suivant : « Si la recette B avait le même goût que la recette A, il y aurait 4 verres de chocolat dans la recette A. » Ce raisonnement consiste à substituer au mélange B le mélange B', considéré comme équivalent, constitué de 2 verres de lait et 4 verres de chocolat. Ce raisonnement s'appuie sur deux hypothèses :

- Rendre variables certaines données constantes du problème est légitime
- On ne change pas le goût d'un mélange en doublant chacun de ses composants.

Pour fournir cette solution et en contraste avec le travail dans la strate numérique, il convient de se détourner du seul énoncé, d'en transformer certains termes à partir de théorèmes en actes ou consciemment mobilisés, avant de former une ou des phrases résolvantes. Remar-

quons que pour cette solution, le recours aux fractions n'est pas nécessaire. On trouve néanmoins dans ce raisonnement des traces d'une partition à deux lignes<sup>12</sup> lorsque d'une part le doublage du nombre de verres de lait rejaillit sur le nombre de verres de chocolat, d'autre part lorsque dans la comparaison finale on neutralise légitimement la ligne du nombre de verres de lait en considérant des mélanges équivalents ayant le même nombre de verres de lait. On préfigure ainsi une équivalence du type :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \text{ équivaut à } a = c.$$

La résolution de ce problème de mélange tend à s'uniformiser avec le temps par l'usage de fractions (Adjage, 2005, p. 115). On trouve alors des raisonnements qui par exemple amènent à comparer  $\frac{3}{5}$  et  $\frac{2}{3}$  :

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15} ; \frac{2}{3} = \frac{10}{15}, \text{ donc } \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

On ne rappellera jamais assez à quel point ce type d'écriture est récent en histoire des mathématiques et déstabilisant pour les novices (Adjage, 1999, p. 157-160), notamment l'usage des signes = et < qui ne portent sur aucun des nombres entiers explicités dans les égalités et inégalités ci-dessus, mais sur un lien implicite (une relation partie-tout en l'occurrence), donc non visible, de 3 à 5, de 9 à 15 etc. Rappelons que dans l'encyclopédie de Diderot, voire enco-

re plus tard au XIX<sup>ème</sup> siècle, on trouve des formulations comme « a : b :: c : d » qui se liaient « a est à b comme c est à d ». Cette dernière formulation est unidimensionnelle, contrairement à la formulation moderne fractionnaire qui elle est bidimensionnelle. C'est au XIX<sup>ème</sup> siècle que cette nouvelle formulation s'impose. Jusque là en effet, la mesure d'une grandeur quelconque n'était pas explicitable par un nombre. Elle était appréhendée, dans la tradition initiée par Euclide, comme rapport, commensurable – on dirait rationnel aujourd'hui – ou incommensurable – on dirait irrationnel aujourd'hui –, de cette grandeur à une grandeur unité, les traitements se menant à partir de théorèmes établis sur les rapports<sup>13</sup>. Au XIX<sup>ème</sup> siècle, la construction formelle des nombres permet de s'affranchir des grandeurs. Cette émancipation des nombres par rapport aux grandeurs a un coût : la rupture de la ligne d'écriture en deux est un élément de ce coût. Cette bi-dimensionnalité est une condition suffisante d'un traitement au niveau de la strate rationnelle, même si elle n'est pas nécessaire.

#### 4.2.2 Agrandissement et mise en rapports de grandeurs hétérogènes associées à un même objet

Nous voudrions à présent examiner un cas limite strate numérique / strate rationnelle. Il se rapporte aux exercices *Voilier* et *Miel* présentés en annexe 3. Ces deux problèmes tombent dans la catégorie problèmes de proportionnalité. Sur six classes de CM2 (année 5), représentant une bonne diversité de publics, testées en mai 2010, *Voilier* est réussi par 7 élèves sur 140 (5%). Par opposition, *Miel* est réussi par 11 élèves sur 22 (50%) dans une classe de CM2 classée ZEP testée en mai 2008. Un type d'exercice comparable à *Miel* mais avec des données

12 Ce qui n'est pas le cas de raisonnements faux, et pourtant encore fréquents en 6ème (année 6), consistant soit à ignorer la « ligne » relative aux verres de lait (« A a plus le goût de chocolat car il y a plus de verres de chocolat »), soit à mixer les deux lignes (« Recette A [répond à la question posée] car il y a plus de verres de chocolat et de verres de lait ») (Adjage, 2003, p. 145), ce que nous interprétons comme une impossibilité pour ces élèves à traiter ce problème à son niveau, soit celui de la strate rationnelle.

13 Par exemple si a : b :: c : d alors a : c :: b : d

The image shows two handwritten student solutions. The first, for 'Voilier', shows four multiplication problems:  $2,7 \times 6 = 16,2$ ,  $2,6 \times 6 = 15,6$ ,  $2,5 \times 6 = 15,0$ , and  $9 \times 2,5 = 22,5$ . A note below states: 'La longueur du pont est de 22,5 cm sur la photocopie.' The second, for 'Miel', lists '2 litres 3 kg' and '1 litre 1,5 kg', followed by the calculation  $1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5$  or  $1,5 \times 5 = 7,5$ , concluding with '5 litres de miel pèsent 7,5 kg.'

Production d'élève 1 : une procédure de résolution de *Voilier*

Production d'élève 2 : une procédure de résolution de *Miel*

numériques plus difficiles<sup>14</sup>, extrait de l'évaluation nationale à l'entrée en 6<sup>ème</sup> (année 6) de 2008<sup>15</sup>, obtient 39,5% de réussite à l'échelle de la France. Ces différences de score révéleraient-elles un passage de la strate numérique à la strate rationnelle malgré un contenu mathématique identique ? Rappelons tout d'abord que nous avons classé les problèmes mettant en jeu des rapports en six catégories (Adjage, 2005, pp. 100-102) et avons montré qu'à problème mathématique sous-jacent constant (recherche d'une quatrième proportionnelle), il y avait des différences significatives, tant dans la réussite que dans les procédures utilisées, selon le contexte dans lequel était proposé le problème (ibid, pp. 103-

112). *Voilier* appartient au contexte « problème de dilatation », *Miel* à celui de « rapport de grandeurs hétérogènes ». Voici (figure ci-dessus) deux procédures de résolution d'élèves.

La Production d'élève 1 relie fonctionnellement deux univers parallèles, l'original et la photocopie agrandie. Les trois premières multiplications peuvent s'interpréter comme la recherche du rapport faisant passer des 6 cm du mât original aux 15 cm du mât agrandi. La quatrième multiplication représente l'application de ce rapport aux 9 cm du pont original pour trouver la longueur du pont agrandi. Deux fortes hypothèses implicites sont ici requises.

- Le lien fonctionnel mobilisé est multiplicatif. Dans une enquête que nous avons menée en 2004 sur 121 élèves de cinquième représentant une bonne diversité de publics,

14 Enoncé : 6 objets identiques coûtent 150 ? Combien coûtent 9 de ces objets ?  
15 Dernière évaluation nationale où les résultats par item sont disponibles... en tout cas à notre connaissance.

près de 60% (Adjage, 2005, p. 112) utilisaient un lien additif *non fonctionnel* : le pont a 3 cm de plus que le mât, sur la photocopie comme sur l'original

- Ce lien fonctionnel s'applique à tout segment du voilier, d'où la possibilité de le calculer à partir du rapport mât agrandi / mât original et de l'appliquer au pont.

De plus, l'univers se dédouble, entre l'original et la photocopie, même si ce dédoublement n'est pas ici numérisé au moyen de fractions.

Au contraire, dans la Production d'élève 2, il n'est pas nécessaire de dédoubler l'univers. Il suffit de se placer dans l'univers de l'objet miel et d'évaluer celui-ci une fois par son volume, une autre fois par sa masse. Il est alors possible de suivre sur une seule ligne l'évolution de cet objet selon deux caractères, volume ou masse: 2 litres « ou » 3 kilogrammes, 1 litre « ou » 1,5 kilogramme, 5 litres, vus comme l'itération de 5 pots de miel bien concrétisés par l'addition répétée des 1,5 kg. ou 7,5 kilogrammes. Contrairement au goût du mélange de 4.2.1 où l'initiative de faire varier les données, et le but de cette variation (neutraliser un des deux constituants du mélange) sont à la charge de l'élève, ici les deux sont orientés par l'énoncé : atteindre les 5l de miel. De plus, aucune hypothèse (invariance du goût sous une invariance des proportions) n'est requise car un demi pot de miel « fera » indifféremment 1l ou 1,5 kg etc.

Comme on le voit, *Miel* est traité au niveau de la strate numérique, alors que *Voilier* est traité au niveau de la strate rationnelle. Il est possible de traiter *Miel* au niveau de la strate rationnelle, en dédoublant l'univers unique de l'objet miel en deux univers, celui de son volume et celui de sa masse. Un tel traitement prendrait en

compte par exemple le lien fonctionnel  $\frac{3}{2}$  kg/l

ou 1,5 kg/l qui relie les deux univers, mais nous n'avons jamais observé une telle procédure à ce niveau de la scolarité. Il paraît plus difficile de décrire, à l'inverse, un traitement du niveau de la strate numérique pour *Voilier*, car toute procédure de résolution de cet exercice doit prendre en compte deux échelles différentes et s'appuyer sur des hypothèses d'invariance des proportions, internes ou externes, sous un changement d'échelle.

#### 4. 3 La strate algébrique vs la strate rationnelle

Nous allons à présent étudier un problème qui peut se traiter au niveau de la strate rationnelle ou de la strate algébrique. Cet exemple nous permettra de mettre en valeur les caractéristiques du passage de la strate rationnelle à la strate algébrique et nous amènera à prendre position sur le débat : de l'arithmétique à l'algèbre, rupture ou continuité ? Le problème que nous allons examiner a souvent été cité par Brousseau. Il est repris dans Comin (2000, p. 175 et p. 68 des annexes) pour illustrer l'histoire de la proportionnalité en fonction de l'évolution des savoirs savants et des contraintes institutionnelles. La solution au niveau de la strate rationnelle utilise la méthode dite des proportions qui était enseignée en France avant la deuxième guerre mondiale et un peu au-delà. Cette méthode s'appuyait sur une technologie de reconnaissance de situations de proportionnalité (respectivement d'inverse proportionnalité) entre deux grandeurs : si on double, triple, quadruple... une des grandeurs, l'autre est multipliée (respectivement divisée) par 2, 3, 4... Cette technologie légitimait des techniques dont une s'apparente aux produits en croix. Voir pour plus de détails Adjage et Pluvinage (2008, pp. 41-44).

*Énoncé du problème* : Un marchand vend une pièce de tissu. Il en attend un bénéfice de 20%. Après la vente totale de la pièce de tissu, il consta-



te que son bénéfice n'est que de 19%. Il incrimine bientôt la distance entre les deux marques qu'il a tracées sur son comptoir et qu'il utilise pour mesurer un mètre de tissu. Quelle est la distance qui sépare en fait ces deux marques ?

*Une solution dans la strate rationnelle :* On considère que la distance entre les deux marques est variable. On appelle unité la longueur de tissu mesurée par la distance entre les deux marques.

Le prix de vente effectif d'un coupon est proportionnel au nombre d'unités qui mesure ce coupon (si on double, triple... le nombre d'unités, on double, triple... le prix). Le nombre d'unités est inversement proportionnel à la distance entre les deux marques (si on double, triple... la distance entre les deux marques, on divise par 2, 3 ... le nombre d'unités). Donc le prix de vente est inversement proportionnel à la distance entre les deux marques (technologie de composition de la proportionnalité et de l'inverse proportionnalité). Or, si la distance entre les deux marques est 1, le prix de vente est  $1,2 \times (\text{Prix d'achat})$  ou 1,2 si on prend le prix d'achat comme unité de prix. Si la distance entre les deux marques est celle du comptoir du commerçant, le prix de vente est  $1,19 \times (\text{Prix d'achat})$  ou 1,19 si on prend le prix d'achat comme unité de prix. Soit en utilisant les produits en croix de l'inverse proportionnalité (technique enseignée) dont la formulation moderne serait :

$$\text{Si } a = \frac{k}{b} \text{ et } c = \frac{k}{d}, \text{ alors : } d = \frac{ab}{c} \quad (E_1)$$

la distance en cm entre les deux marques est de :

$$\frac{1,2 \times 1}{1,19} \approx 1.008 \quad (E_2)$$

Remarquer l'importance de la « variation des constantes », notamment de celle de la distance entre les deux marques totalement artificielle, des hypothèses de proportionnalité et d'inverse proportionnalité fondées sur

une intelligence de la situation concrète. Ces caractéristiques rangent cette résolution à un niveau élevé de la strate rationnelle, même si l'expression de la résolution est unidimensionnelle vu que d'une part la règle des produits en croix de l'inverse proportionnalité peut être énoncée rhétoriquement, sans passer par sa formulation algébrique moderne bidimensionnelle ( $E_1$ ), et d'autre part le calcul final ( $E_2$ ) ne demande aucun traitement de type fractionnaire car il peut être mené séquentiellement en enchaînant une multiplication (triviale ici) puis une division. Enfin, on n'a eu qu'à former des phrases, rhétoriques ou arithmétiques, pour mener cette résolution à son terme.

*Une solution dans la strate algébrique :* Soit  $d$  la distance entre les deux marques,  $PM$  le prix d'achat au mètre de tissu,  $PV$  le prix de vente de toute la pièce de tissu,  $n$  le nombre total d'unités vendues. Calculons  $PV$  de deux manières différentes.

Chaque fois que le marchand vend une unité, il pense vendre un mètre de tissu et donc applique un coefficient 1,2 à  $PM$ . On a donc :

$$PV = 1,2 n PM .$$

La longueur réelle de tout le tissu est  $nd$ , le marchand a donc payé  $n d PM$  à l'achat. Son bénéfice réel étant de 19%, le prix de vente de tout le tissu est donc :

$$PV = 1,19 n d PM .$$

Soit :

$$1,2 n PM = 1,19 n d PM$$

Après simplification par  $n PM$ , on obtient  $d$  en

$$\text{cm : } \frac{1,2}{1,19} \approx 1.008 .$$

Analysons les traitements nécessaires à cette mise en équation et à la résolution de celle-ci.

- Il convient tout d'abord de redéfinir avec des lettres ce qui a déjà été désigné avec des mots : « Soit  $d$  la distance entre deux marques » ; « soit  $PM$  le prix d'achat au mètre » etc. Remarquons qu'on remplace tout un syntagme par une seule lettre, ce qui peut amener à des confusions : grandeur et objet ( $PM$  désigne-t-il un prix, une longueur en mètres, un achat, un tissu ?) ; focalisation sur un mot du syntagme, par exemple le prix, et désigner par  $PM$  tout prix de l'énoncé.
- Il importe ensuite de réduire le lexique :  $PV$  disparaît du lexique car il est dépendant d'autres inconnues et exprimé en fonction de ces dernières
- Il faut aussi accepter de désigner la même quantité,  $PV$ , de deux façons différentes,  $1,2 n PM$  et  $1,19 n d PM$ , ces deux syntagmes pouvant être considérés comme l'expression d'un objet ( $PV$ ) ou d'un processus (le calcul de  $PV$ ) (Sfard, 1991)
- Il convient alors de former une phrase :  $1,2 n PM = 1,19 n d PM$  qui est d'une nature tout à fait différente des phrases considérées aux strates précédentes, car elle n'est pas orientée vers la production immédiate d'un résultat chiffré comme dans :
 
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
- Il faut alors traiter cette phrase, ici d'abord par simplification de  $n PM$ , puis isoler l'inconnue avant de produire un résultat chiffré. C'est dire qu'il faut accepter de mener des calculs sur des quantités inconnues, dont on n'est pas sûr qu'on en connaîtra une valeur, et en différant la production du résultat.

Chaque étape de ce long processus est en rupture avec les attendus des strates antérieures et établit les spécificités majeures de la strate

algébrique. Alors rupture ou continuité ? Certes, les calculs algébriques, comme les calculs arithmétiques, utilisent l'addition, la multiplication... et donc s'appuient sur les opérations de l'arithmétique. Mais l'usage qui en est fait est tellement éloigné de ce qui se faisait auparavant que chacune de ces connaissances en même temps que point d'appui s'érige en obstacle.

Là encore, les modes de pensée et les moyens d'expression changent radicalement. On est donc plus du côté de la rupture, en tout cas du saut, que de la continuité, et chacun des éléments de cette rupture doit être pris en compte à la fois pour concevoir un curriculum et pour l'évaluer.

Il existe d'autres usages du calcul littéral que la mise en équation ou la résolution d'équations, par exemple les identités où le signe « = » acquiert un autre statut, les formules, la démonstration de résultats généraux notamment en arithmétique, l'usage de variables dans des fonctions. Ces différents usages relèvent-ils de la strate algébrique ? La réponse est nuancée. La question qui pour nous permet de trancher est la suivante : l'essentiel de la complexité réside-t-il dans la formation ou le traitement de phrases ? Dans le cas de l'application de formules, on serait plus du côté de la formation ainsi que relevé dans l'exemple de *La meilleure voiture* (section 2) et donc dans la strate numérique ou la strate rationnelle. Pour les démonstrations algébriques, le cas suivant est intéressant, car il est du niveau de la strate algébrique sans recourir nécessairement à des lettres. Il est cité par Kahane (2002, p. 30).

« Deux nombres ont une somme égale à 300. De combien augmente leur produit si l'on ajoute 7 à chacun ? »

Considérons la résolution suivante qui n'utilise que des expressions numériques :

Choisissons à notre gré un nombre, par exemple 68. Le second sera alors 232. En développant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (68 + 7) \times (232 + 7) &= \\ 68 \times 232 + (68 + 232) \times 7 + 7 \times 7 &= \\ 68 \times 232 + 300 \times 7 + 7 \times 7 &= 68 \times 232 + 2149. \end{aligned}$$

D'où :  $(68 + 7) \times (232 + 7) = 68 \times 232 + 2149$ . Le terme obtenu  $2149 = 300 \times 7 + 7 \times 7$  ne dépend pas du nombre (68) que nous avons choisi ; c'est donc la réponse.

Il est évident que la complexité de cette résolution repose sur le choix des calculs à effectuer (ex.  $68 + 232 = 300$ ) ou pas ( $68 \times 232$  ou  $300 \times 7 + 7 \times 7$ ) et sur le rapprochement des deux termes extrêmes du calcul qui produit la phrase qui suit le « donc ». Il s'agit bien dans chaque cas de traitements de phrases. Nous situons donc ce traitement dans la strate algébrique. Un élève qui raisonnerait au niveau de la strate numérique irait au plus vite aux résultats :

$$\begin{aligned} 68 \times 232 &= 15776, \\ (68 + 7) \times (232 + 7) &= 75 \times 239 = 17925 \\ \text{et } 17925 - 15776 &= 2149. \end{aligned}$$

L'élève pourrait recommencer son calcul avec d'autres paires de nombres dont la somme vaut 300, effectuer chaque fois la différence avec le produit initial et constater que le résultat vaut toujours 2149. Il pourrait donc conjecturer que cette différence est indépendante du choix de la paire de nombres en s'en tenant à des traitements du niveau de la strate numérique. Mais il serait bien incapable d'expliquer les raisons de cette indépendance, là où le traitement de phrase permet d'explicitier une décomposition de la différence ne dépendant que de la somme des deux nombres (300) et de la valeur de l'accroissement (7).

#### 4. 4 La strate fonctionnelle vs la strate algébrique

Proposons nous de faire résoudre par le logiciel Derive l'équation de variable réelle  $x\sqrt{x^2 - 1} = 0$ . Entrons SOLVE( $x\sqrt{x^2 - 1}$ , x, Real) ; nous obtenons le résultat «  $x = -1 \vee x = 1 \vee x = 0$  », c'est-à-dire les trois solutions  $-1, 1$  et  $0$ . A présent, demandons le tracé de la courbe  $y = x\sqrt{x^2 - 1}$  :

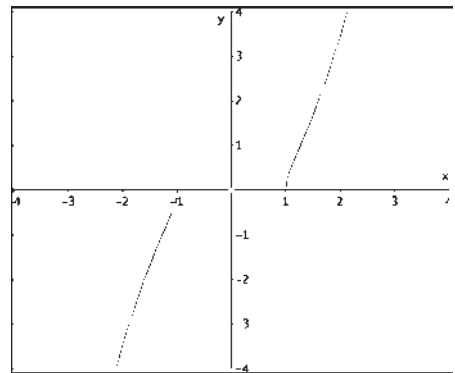


Fig. 2 : Tracé de la fonction  $y = x\sqrt{x^2 - 1}$

Nous voyons alors que le tracé s'interrompt entre  $-1$  et  $1$ . Autrement dit, pour la résolution d'équation, le logiciel applique seulement la règle : un produit de facteurs est nul dès que l'un de ses facteurs est nul (strate algébrique), et accepte donc 0 comme solution alors que le radical n'est pas défini en 0. En revanche, pour le tracé, il tient compte de l'ensemble de définition (strate fonctionnelle).

L'ensemble de définition d'une fonction fait partie de ses propriétés globales. La fonction est un objet mathématique qui, selon Vandebrouck (2011), donne lieu en même temps à plusieurs

visions : ponctuelle, locale, globale. Il y a là une rupture par rapport à la vision des objets de la strate algébrique. On peut aussi noter que le monde des expériences physiques présenté par exemple par Georges Touma s'intéresse à des problématiques autres que celles des équations : mouvements, évolutions pour les modéliser (Touma, 2009).

Le langage des fonctions fait apparaître des objets qui n'avaient pas cours dans la strate algébrique : la composition de fonctions  $g \circ f$ , qui a le mauvais goût de n'être pas commutative, la dérivée et la différentielle, l'intégrale. Et des problèmes de définition se soulèvent, qui obligent à des contrôles attentifs. Ainsi doit-on déjouer un piège comme celui de la composée de  $f(x) = \frac{1}{x}$  avec elle-même, car dans un premier temps,  $f \circ f(x) = \frac{1}{1/x}$ . Mais  $f \circ f$  n'est pas définie en 0 et c'est donc seulement pour tout  $x \neq 0$  que  $f \circ f(x) = x$ .

### 5. — Un exemple pour enseigner au niveau de la strate algébrique

Nous avons déjà longuement rapporté des ingénieries au niveau de la strate rationnelle. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces ingénieries par exemple à (Adjigat, 2007). Nous nous contenterons ici de proposer une idée d'enseignement dans la strate algébrique (4<sup>ème</sup> ou 3<sup>ème</sup>, années 8 et 9). Cette idée s'appuie sur une communication de Raymond Duval, donnée le 7 décembre 2005 à l'IREM de Strasbourg, essentiellement consacrée à la mise en équation à une inconnue.

*Soit l'énoncé suivant* : Un directeur d'école achète 30 manuels de CE2 (année 3) et 25

manuels de CM1 (année 4). Un manuel de CM1 coûte 1,6 € de plus qu'un manuel de CE2. Il dépense en tout 722 €. Combien coûte chacun des manuels ?

Détaillons une résolution « experte » de ce problème. Soit  $x$  le prix d'un manuel de CE2. Soit  $y$  le prix d'un manuel de CM1. On a :  $y = x + 1,6$ . L'énoncé m'amène à considérer deux syntagmes :  $30x$  et  $25y$ . D'autre part, l'énoncé me permet de fournir une expression chiffrée de la dépense totale : 722 €.

L'énoncé et la redésignation de  $y$  fonctionnellement par rapport à  $x$  me permettent de fournir une autre expression, littérale cette fois-ci, de la dépense totale par le syntagme :  $30x + 25(x + 1,6)$ . Enfin, l'énoncé me permet de dire que 722 et  $30x + 25(x + 1,6)$  désignent le même objet (dépense totale) et donc de former la phrase :  $30x + 25(x + 1,6) = 722$

Analysons à présent les difficultés et obstacles en commençant par le syntagme « Le prix d'un manuel de CE2 ». Ce syntagme réfère à un objet qui n'est pas désignable par un mot unique (comme un nom propre). C'est cette pénurie de vocabulaire en langue naturelle qui amène à une désignation descriptive de cet objet au moyen du syntagme ci-dessus, formé de noms et de compléments de noms. Il lui correspond dans l'univers mathématique ce que Duval appelle une « liste ouverte » de nombres : tous les prix envisageables pour un manuel de CE2 ; contrairement à une description générique close qu'on rencontre dans les démonstrations algébriques, par exemple à la description « un nombre pair » correspond une liste close : 0, 2, 4, 6...

Ce syntagme ou cette liste ouverte vont être désignés par... une seule lettre,  $x$ . Cette condensation est une grosse difficulté mais aussi un obstacle, car un élève peut croire que cette désignation fonctionne comme un nom

propre, alors qu'elle se prête dans l'univers algébrique à des redésignations fonctionnelles, essentielles pour la suite de la mise en équation, ici  $y = x + 1,6$  qui n'ont pas d'équivalent bien sûr dans l'univers des noms propres.

Donc, premier obstacle : une lettre au moyen de laquelle on désigne une première pluralité (la liste ouverte des prix d'un manuel de CE2) puis une deuxième pluralité (la liste ouverte des prix d'un manuel de CM1). Mais apparaît un deuxième obstacle encore plus redoutable. A partir de ces deux expressions littérales,  $x$  et  $x + 1,6$ , il va falloir produire une deuxième désignation du prix total,  $30x + 25(x + 1,6)$ , donc accepter de calculer sur des [listes ouvertes] inconnues. Remarquons que sur notre exemple, le membre de droite est une donnée chiffrée, 722, ce qui est simplificateur puisque ce calcul littéral produit un résultat chiffré (encore que ce résultat ne soit pas la réponse au problème !) contrairement aux équations dont les deux membres contiennent l'inconnue.

Comment gérer l'ensemble de ces obstacles et difficultés en tant qu'enseignant ? Duval propose, après une première approche laissée à l'initiative des élèves, l'usage de tableaux comme ci-dessous, où seules les têtes de colonnes sont établies et saisies. La dernière ligne grisée n'est pas fournie tout de suite. Il importe

qu'auparavant les élèves prennent conscience qu'ils calculent toujours la même chose en colonnes 2, 3 et 4 et de leur faire décrire chacun de ces calculs avec des mots. Ils ouvrent ainsi des listes en colonnes 1, 2 et 3 et assurent leur couplage en colonne 4. Lorsqu'on introduit l'inconnue  $x$ , il convient de faire remarquer qu'elle se substitue (condensation) à une liste ouverte et qu'elle se prête à des calculs (contrairement à un nom propre). Enfin, en écrivant l'égalité :  $30x + 25(x + 1,6) = 722$  (E3), il importe de remarquer que chacun des membres est une expression différente du coût total.

Reste à traiter la capacité de cette écriture à produire une solution. Le tableau ou le tableur en est un peu longue ; le traitement de l'égalité (E3) en est une autre. Le sens de lecture, gauche vers droite n'est pas pertinent. L'attention doit être orientée par les règles de priorité qui invitent à traiter  $25(x + 1,6)$  avant l'addition. Les règles de changement de membre seront décrites comme conservant l'invariance référentielle (les expressions de part et d'autre du signe « = » désignent-elle la même quantité ?). Le but est de trouver le nombre de la liste ouverte qui est solution, ce que permet le traitement final de  $ax = b$ .

Plus tard, Duval propose de s'affranchir du tableau et préconise quatre règles de mise en équation :

Prix d'un manuel CE2	Prix de 30 manuels CE2	Prix de 25 manuels CM1	Prix total
10	300	290	590
11	330	315	645
12	360	340	700
13	390	365	755
12,5	375	352,5	727,5
...	...	...	...
x	30x	25(x + 1,6)	722

Tableau 2 : des listes ouvertes condensables en formules

- Identifier dans l'énoncé les quantités inconnues, les quantités indirectement connues (qu'on peut exprimer par rapport aux autres), les quantités connues
- L'introduction d'une lettre ne se fait pas pour désigner une quantité mais au moins deux quantités (par le biais des expressions fonctionnelles)
- Passer de désignations linguistiques à des redésignations littérales (choisir une lettre pour l'inconnue et exprimer les quantités indirectement connues en fonction de l'inconnue)
- Identifier deux expressions désignant la même quantité et pouvant réunir toutes les redésignations littérales en une seule formule

Pour conclure cette partie, nous dirons que le registre des écritures algébriques ne fonctionne pas comme le registre de la langue naturelle, essentiellement parce que les désignations sont de nature et de fonction différentes et que le sens pertinent de lecture n'est pas le sens usuel. Le processus de résolution peut alors s'expliquer au moyen des concepts habituels de Duval (1995, pp. 36-44) :

- conversions entre trois registres : langue naturelle (LN), écritures algébriques (EA), tableaux (T) ; les deux conversions essentielles sont la condensation (LN ou T vers EA) et la désignation fonctionnelle (LN vers EA)
- traitements à l'intérieur de EA (les règles de priorité, qui déséquentialisent la lecture des phrases algébriques, la distributivité... et les règles de changements de membre que permet l'invariance référentielle)

## Conclusion

Notre projet était de donner toutes ses chances à la notion de compétence. Nous avons

examiné différentes acceptions de cette notion et analysé leur capacité à rendre compte de la complexité des acquisitions mathématiques et de la difficulté à les enseigner. Nous avons alors montré, à la lumière de nombreux exemples, qu'une acception de la compétence trop globalisante, ou une conception des compétences trop atomisante n'étaient pas satisfaisantes. Qu'on les analyse au niveau des problèmes, des concepts, des traitements ou de l'expression, il apparaît que les mathématiques ne sont pas homogènes mais stratifiées ; que dans une strate donnée, il existe un réseau de relations reliant problèmes, concepts et modes d'expression parfois spécifiques, qui permet à ceux qui maîtrisent ce réseau de comprendre les problèmes, de les traiter mais aussi de se comprendre entre eux ; qu'entre deux strates, il existe un cloisonnement fort, ce qui permet d'envisager qu'un individu puisse être compétent dans une strate donnée mais impotent au(x) niveau(x) supérieurs. Le passage de la maîtrise d'une strate à la suivante demande donc un long apprentissage qui passe par des renoncements, des déconstructions et reconstructions, tant en termes de mode de pensée qu'en termes d'expression et de traitements. Cette notion de strate de compétence, dont nous avons montré qu'elle rend bien compte d'un certain nombre de phénomènes liés à l'enseignement, l'apprentissage et l'évaluation est donc située à un niveau intermédiaire entre les conceptions globalisante et atomisante. Cette position entre les deux extrêmes permet de situer la compétence à des niveaux non triviaux de l'activité mathématique tout en évitant l'écueil d'une approche stérile car trop uniformisante. Enfin, tout en respectant un découpage somme toute assez usuel des mathématiques considérées, la notion de strate de compétence remet en question certaines de ses frontières.

On n'empêchera pas que la notion de compétence ait cours dans le discours de la

mathématique scolaire. Son emploi peut d'ailleurs s'accompagner de bénéfices, comme celui d'un centrage sur les acquisitions mathématiques des élèves. Mais son introduction comme une panacée pour l'enseignement mathématique, après d'autres comme ont pu l'être l'enseignement par la résolution de problèmes ou l'enseignement à base de projets,

ne peut conduire qu'à des résultats décevants si elle n'est pas accompagnée d'une certaine expérimentation. Et cette expérimentation doit nécessairement reposer sur certaines bases théoriques. Nous avons proposé dans le présent document une analyse qui puisse contribuer, avec d'autres articles de ce volume, à la mise en place de telles bases.

ANNEXE 1<sup>16</sup>

## TAUX DE CHANGE

Mademoiselle Mei-Ling, de Singapour, prépare un séjour de 3 mois en Afrique du Sud dans le cadre d'un échange d'étudiants. Elle doit changer des dollars de Singapour (SGD) en rands sud-africains (ZAR).

**Question 1 : TAUX DE CHANGE**

M413Q01 - 0 1 9

Mei-Ling a appris que le taux de change entre le dollar de Singapour et le rand sud-africain est de :

1 SGD = 4,2 ZAR.

Mei-Ling a changé 3 000 dollars de Singapour en rands sud-africains à ce taux de change.

Combien Mei-Ling a-t-elle reçu de rands sud-africains ?

**Question 2 : TAUX DE CHANGE**

M413Q02 - 0 1 9

Lorsque Mei-Ling rentre à Singapour après 3 mois, il lui reste 3 900 ZAR. Elle les reconvertit en dollars de Singapour, constatant que le taux de change a évolué et est à présent de :

1 SGD = 4,0 ZAR.

Combien Mei-Ling reçoit-elle de dollars de Singapour ?

16 Ces énoncés ont été téléchargés depuis : [educ-eval.education.fr/pdf/pisaexos3.pdf](http://educ-eval.education.fr/pdf/pisaexos3.pdf)

## LA MEILLEURE VOITURE

Une revue automobile utilise un système de notation pour évaluer les nouvelles voitures et décerner le label de « Voiture de l'année » à la voiture dont la note totale est la plus élevée. Cinq nouvelles voitures viennent d'être évaluées, et les notes qu'elles ont obtenues figurent dans le tableau ci-dessous.

Voiture	Dispositifs de sécurité (S)	Consommation de carburant (C)	Esthétique de la carrosserie (E)	Équipements intérieurs (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Les notes s'interprètent comme suit :

3 points = Excellent.

2 points = Bon.

1 point = Moyen.

### Question 1 : LA MEILLEURE VOITURE

M704Q01

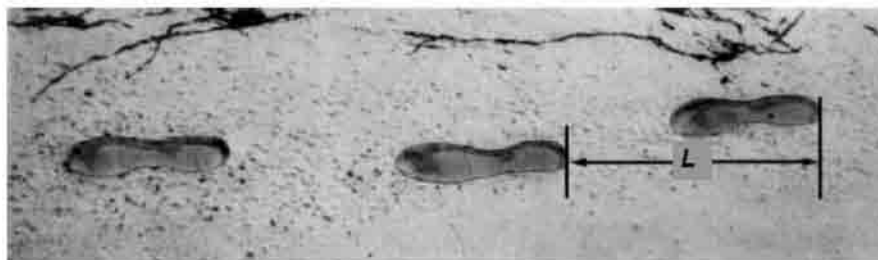
Pour calculer la note totale de chaque voiture, la revue automobile utilise la règle suivante, qui est une somme pondérée des diverses notes obtenues :

$$\text{Note totale} = (3 \times S) + C + E + T$$

Calculez la note totale obtenue par la voiture « Ca ». Écrivez votre réponse dans l'espace ci-dessous.



## MARCHE A PIED



L'image montre les traces de pas d'un homme en train de marcher. La longueur de pas  $L$  est la distance entre l'arrière de deux traces de pas consécutives.

Pour les hommes, la formule  $\frac{n}{L} = 140$  donne un rapport approximatif entre  $n$  et  $L$ ,

où :

$n$  = nombre de pas par minute,

$L$  = longueur de pas en mètres.

### Question 1 : MARCHE À PIED

M124Q01 - 0.1.2.9

Si la formule s'applique à la façon de marcher d'Henri et qu'Henri fait 70 pas par minute, quelle est la longueur de pas d'Henri ? Montrez vos calculs.

Extraits de la grille accompagnant le livret  
personnel de compétences (palier 3)**ANNEXE 2****SAVOIR UTILISER DES CONNAISSANCES ET DES  
COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES**

Items	Explicitation des items	Indications pour l'évaluation
<b>Nombres et calculs :</b> Connaître et utiliser les nombres entiers, décimaux et fractionnaires. Mener à bien un calcul mental, à la main, à la calculatrice, avec un ordinateur.	<p><i>En situation, l'élève est capable de :</i></p> <p>(...)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• mobiliser des écritures différentes d'un même nombre.</li> </ul> <p>(...)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• choisir l'opération qui convient.</li> <li>• maîtriser de manière automatisée les tables de multiplication « dans un sens ou dans l'autre » pour effectuer (...) un calcul posé portant sur des nombres de taille raisonnable.</li> </ul> <p>(...)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• conduire un calcul littéral simple.</li> </ul> <p>(...)</p>	<p>(...)</p> <p>Les opérations mobilisées sont :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• les quatre opérations sur les nombres relatifs entiers, décimaux ;</li> </ul> <p>(...)</p> <p>Pour la division décimale posée les nombres décimaux comportent au maximum deux chiffres après la virgule et le diviseur est un entier inférieur à 10(...)</p> <p>Le calcul littéral porte sur :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• le calcul de la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques</li> </ul> <p>(...)</p>

Extraits du programme du collège

Connaissance	Capacités	Commentaires
6 <sup>ème</sup> , année 6 <b>1.2. Organisation et représentation de données. Représentations usuelles : tableaux.</b> 5 <sup>ème</sup> <b>2.2. Nombres positifs en écriture fractionnaire : sens et calculs (p. 22)</b> Sens de l'écriture fractionnaire.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lire, utiliser et interpréter des données à partir d'un tableau.</li> <li>- Utiliser l'écriture fractionnaire comme expression d'une proportion, d'une fréquence.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- le quotient : <math>\frac{3}{5}</math> désigne le cinquième de 3 (<i>le nombre dont le produit par 5 est égal à 3</i>). L'utilisation d'une écriture fractionnaire pour exprimer une proportion, une fréquence est à relier à la notion de quotient. Dans le traitement mathématique des problèmes de la vie courante, les fractions interviennent rarement en tant que nombre. L'utilisation des décimaux... doit être privilégiée dans le cadre du socle commun.</li> </ul>

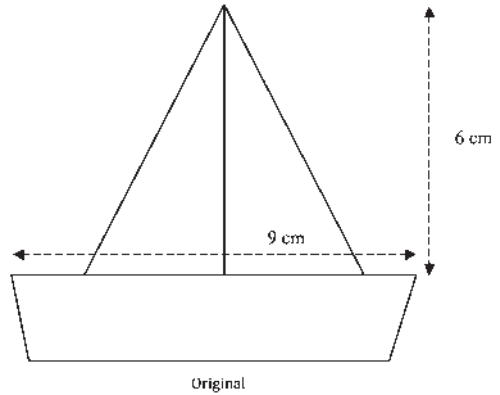


**ANNEXE 3****Voilier**

Voici le dessin d'un voilier.  
La hauteur du mât est de 6 cm  
et la longueur du pont est de 9 cm.

J'ai agrandi ce dessin à la  
photocopieuse. La hauteur du mât  
sur la photocopie est maintenant  
de 15 cm.

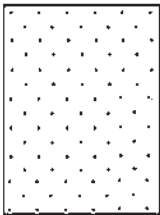
Quelle est la longueur du pont  
du voilier sur la photocopie ?

**Miel**

2 litres de miel pèsent 3 kg. Combien pèsent 5 litres de miel ?

**ANNEXE 4****Un sujet pour détecter les difficultés dans la strate numérique**

- 1) calculer  $102 - 17$  ;
- 2) calculer  $4 \times 16$  ;
- 3) comparer 4,75 et 6,1 ;
- 4) dire combien de points il y a dans le cadre ci-dessous ;
- 5) répondre à la question posée ci-dessous.



Deux objets identiques coûtent 22 euros.  
Combien coûtent trois de ces objets ?

Réponses : 1) 85 ; 2) 64 ; 3) le plus petit est 4,75 ; 4) le cadre contient 83 points ;  
5) trois objets coûtent 33 euros.

### Bibliographie

- Adjiaje, R. & Heideier, A. (1996). *Didacticiels de la série ORATIO*.  
[http://www.alsace.iufm.fr/web.iufm/web/ressourc/serveur\\_cd\\_et\\_video/tout\\_scd\\_cdrom\\_video\\_anonyme.php](http://www.alsace.iufm.fr/web.iufm/web/ressourc/serveur_cd_et_video/tout_scd_cdrom_video_anonyme.php)
- Adjiaje, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*. Strasbourg : IREM
- Adjiaje, R. (2001). Maturations du fonctionnement rationnel. Fractions et décimaux : acquisitions d'une classe, projets de programme 2000 pour l'école élémentaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives volume 7*, IREM de Strasbourg France, pp. 7-48
- Adjiaje, R. (2003). Registres, grandeurs, proportions et fractions. *Actes du colloque Argentoratum 2002, Annales de didactique et de sciences cognitives, Vol 8*, IREM de Strasbourg, pp 127-150.
- Adjiaje, R. (2005). Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg, Vol. 10*, pp. 95-129.
- Adjiaje, R. (2007). Rationnels et Proportionnalité : complexité et enseignement au début du collège, *Petit x, IREM de Grenoble, Vol. 74*, pp.5-33
- Adjiaje, R. & Pluvinage, F. (2007). An Experiment in Teaching Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 65. 149-175
- Adjiaje, R. & Pluvinage, F. (2008). A numerical landscape (chapter). In Calvin L. Petroselli (Eds), R. *Science Education Issues and Developments* (pp. 5-57). New-York : Nova publishers
- Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005) cK $\phi$ , modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. <http://ckc.imag.fr/images/d/df/Balacheff-Margolinas2005.pdf>
- Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.  
[http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/Glossaire\\_Brousseau.pdf](http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf)
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude.3. Ecologie et régulation. In Dorier J.L. et al. (Eds), *Actes de la 11<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.  
[http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser\\_1\\_etude\\_3.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_1_etude_3.pdf)
- Chomsky, N. (1965). *Aspects of the Theory of Syntax*. Cambridge: The MIT Press.
- Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Université de Bordeaux 1.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Bern : Peter Lang.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 10, IREM de Strasbourg
- Glaeser, G. (1999). *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage
- Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115–141

- Kahane, J.-P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques, Rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques*, Paris : Odile Jacob
- MEN (2008a). Livret personnel de compétences (palier 3) ; grilles de références pour l'évaluation et la validation des compétences du socle commun.  
[http://media.eduscol.education.fr/file/socle\\_commun/18/2/socle-Grilles-de-reference-palier3\\_169182.pdf](http://media.eduscol.education.fr/file/socle_commun/18/2/socle-Grilles-de-reference-palier3_169182.pdf)
- MEN (2008b). Programmes du collège. BO n°6, 28 août 2008.  
[http://media.education.gouv.fr/file/special\\_6/52/5/Programme\\_math\\_33525.pdf](http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf)
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. [http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa\\_niss.pdf](http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf)
- Noelting, G.(1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept, *Educational Studies in mathematics, Vol. 11*, Cambridge, pp. 217-253
- OECD (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills – A new Framework for Assessment*, OECD, Programme for International Student Assessment (PISA), 1-104, Paris, France, 1999.  
<http://www.oecd.org/dataoecd/45/32/33693997.pdf>
- Publié en français sous le titre : *MESURER LES CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES DES ÉLÈVES Un nouveau cadre d'évaluation*  
<http://www.oecd.org/dataoecd/45/33/33694005.pdf>
- OECD (2000). La littératie à l'ère de l'information, rapport final de l'EILA.  
<http://www.oecd.org/dataoecd/24/62/39438013.pdf>
- OECD (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*. OECD Publishing.  
<http://www.oecd.org/dataoecd/63/35/37464175.pdf>
- OECD(2009). *PISA 2006 Technical Report*. OECD Publishing  
<http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/0/47/42025182.pdf>
- Phillips, J. & Tan, C. (2005). Competence, Linguistic. *The Literary Encyclopedia*.  
<http://www.litencyc.com/php/stopics.php?rec=true&UID=208#>
- Polya, G. (1957). *Comment poser et résoudre un problème*. Dunod, Paris
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics, Vol. 22*, 1-36
- Touma, G. (2009). Une étude sémiotique sur l'activité cognitive d'interprétation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 14, IREM de Strasbourg, 79-101
- Vandebrouck, F. (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 16, IREM de Strasbourg, 149-185.
- Wagenschein, M. (1968). *Verstehen lehren: genetisch, sokratisch, exemplarisch*. Beltz Verlag, Weinheim & Basel
- Winslow, C. (2005). Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : la dialectique matières – compétences. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 10, IREM de Strasbourg, 131-155