
LA CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE : D'UN DISPOSITIF DE RECUEIL DE DONNÉES A UN DISPOSITIF PÉDAGOGIQUE

Groupe
« CORRESPONDANCE
MATHÉMATIQUE ¹ »

Irem de Nantes

Résumé : Après avoir rappelé le contexte d'élaboration du dispositif de « correspondance mathématique », nous en précisons les principales caractéristiques. Nous présentons ensuite son intérêt du point de vue des apprentissages mathématiques qu'il permet d'initier dans le champ de la résolution de problème et du point de vue des attitudes relevées chez les élèves face à la recherche d'un problème ; des extraits de productions d'élèves étayent cette présentation. Enfin, nous proposons des situations support pour une correspondance entre des élèves de collège ou de lycée.

Dans le cadre d'un partenariat INRP - IREM des Pays de la Loire - IUFM des Pays de la Loire, le groupe a élaboré le dispositif « correspondance mathématique » pour recueillir des données sur ce que signifie chercher un problème de mathématiques pour les élèves à la fin du lycée ou au début de l'Université. Ce dispositif de recherche s'est avéré être pédagogiquement intéressant dans la mesure où les correspondances mathématiques des lycéens, ont, d'une part, « étonné » les enseignants de ces élèves et, d'autre part, permis aux élèves

d'avoir une activité mathématique problématisée et source d'apprentissage comme nous l'illustrerons brièvement ici.

Partant de ces constats, nous souhaitons montrer en quoi ce dispositif de recherche constitue aussi un dispositif pédagogique qui permet aux élèves de réaliser des apprentissages relatifs à la résolution de problème. Nous présentons donc ici la « correspondance mathématique » en tant que dispositif pédagogique. Quels sont ses différences et rapports avec d'autres dispositifs existants et visant à développer des apprentissages mathématiques dans le champ (large) de la résolution de problème (narration de recherche, démarche collaborative notamment) ? Quels intérêts présente ce

1 Sylvie AUBRY, Anne BOYER, Marie-Céline COMAIRAS, Mireille GENIN, Magali HERSANT, Simon MOULIN

dispositif ? Quels apprentissages mathématiques vise-t-il ?

1. — Contexte d'élaboration de la correspondance mathématique comme dispositif de recherche

Les enseignants de l'Université disent volontiers que leurs étudiants ne savent pas chercher un problème de mathématiques. Nous avons interrogé ce constat d'abord en réalisant une enquête (problèmes à résoudre et questionnaires sur la résolution du problème) auprès de 135 lycéens (six classes de terminale S) et 48 étudiants (trois groupes d'étudiants L1 sciences ou DUT1) de l'Académie de Nantes visant à comprendre ce qu'est chercher un problème de mathématiques à la fin du lycée ou au début de l'université. Les analyses des productions et questionnaires recueillis dans ce cadre nous ont permis en particulier d'établir les résultats suivants (pour plus de précisions, voir ECCEmaths, 2009).

Concernant l'organisation temporelle de la recherche, il s'avère que pour la majorité des élèves, chercher un problème reste une activité scolaire d'une durée courte mais raisonnable (entre 1h et 2h 30 pour la moitié d'entre eux). Par ailleurs, pour la moitié des élèves, la recherche s'effectue en deux ou trois reprises (deux reprises correspond à la fréquence la plus importante et à 50% des réponses, trois reprises à 25% des réponses) ; d'après les élèves, cela permet d'« avoir de nouvelles idées », de « laisser reposer » le problème, de « prendre du recul », cet intermède étant souvent l'occasion pour les élèves de discuter du problème avec leurs camarades. A propos de l'exploration mathématique à laquelle donne lieu la recherche du problème, l'étude montre que la moitié des élèves ne suivent qu'une seule piste lors de la recherche du problème et que les élèves

qui exploitent plusieurs pistes les abandonnent vite sans dire pourquoi. Pour ce qui est de la place des écrits dans la recherche de problèmes, l'enquête apporte des éléments déterminants pour la suite de notre travail. D'abord, si l'écriture est présente dès le début de la recherche pour la quasi-totalité des élèves, au brouillon puis au « propre », la proximité entre brouillon et « propre » est remarquable. En effet, plus de la moitié des élèves n'a pas écrit au brouillon de choses qu'ils n'ont pas réussies ensuite à mettre au propre. Ensuite, malgré un encouragement de la part des enseignants, les élèves ne rendent pas en général leur brouillon qui semble demeurer un écrit privé. Enfin, la moitié des élèves exprime qu'ils ont eu des difficultés à transcrire certaines idées. Ainsi, le passage par le brouillon semble donc plus lié à une volonté de rendre un écrit lisible par l'enseignant qu'à une pratique de la recherche.

Ces derniers résultats nous ont conduits à identifier une limite forte du dispositif « problème - questionnaire » : les élèves livrent des écrits scolaires adressés de façon convenue à leur enseignant. Les réponses à notre question initiale restent donc circonscrites au contexte scolaire et ne nous permettent pas d'envisager pleinement le « potentiel » des élèves dans ce domaine. En particulier, la question suivante se pose : dans quelle mesure l'activité des élèves lors de la recherche du problème s'émancipe-t-elle du contrat didactique (Brousseau, 1998) habituel de la classe ? Autrement dit, dans quelle mesure l'activité des élèves est une activité « authentique » ? Dans quelle mesure ce que nous livrent les élèves reflète leur activité réelle ?

Ce constat n'est pas nouveau. Des études comme celles de Lithner (Lithner, 2000) montrent que, dans le contexte scolaire, en résolution de problèmes, les élèves sont peu créatifs.

Par ailleurs, le dispositif de « narration de recherche » qui correspond à un « exposé écrit par l'élève de la suite des activités qu'il met en œuvre lors de la recherche d'un problème » (Chevallier, 1992, p. 72 ; Sauter, 2000) a pour origine un constat semblable : sous certaines conditions les élèves peuvent faire preuve d'une « surprenante capacité de recherche et d'une grande ingéniosité dans les stratégies mises en œuvre, capacité et ingéniosité qui ne sont pas toujours mises en évidence dans le déroulement habituel de la classe » (Chevallier, 1992, p. 71). Cela nous a conduit à imaginer un dispositif de recueil de données, la correspondance mathématique, répondant à une double contrainte : créer une situation qui dégage les élèves des contraintes scolaires habituelles et, en particulier, de la production d'écrits destinés à l'enseignant afin de leur permettre potentiellement de déployer une activité mathématique consistante ; permettre d'accéder à cette activité mathématique des élèves.

L'étude des productions recueillies dans le cadre d'une correspondance mathématique montre que ce dispositif de recueil de données peut constituer un dispositif pédagogique qui répond à un double enjeu : permettre des apprentissages des élèves à la fois dans le domaine de la résolution de problèmes et dans des domaines notionnels ; apporter des informations intéressantes aux enseignants sur ces élèves. Pour cela, il convient de respecter certaines conditions caractéristiques de la correspondance mathématique que nous formulons ci-après.

2. — La correspondance mathématique comme dispositif pédagogique

En France, plusieurs dispositifs pédagogiques ont été développés pour permettre un engagement des élèves dans une activité mathématique

« plus authentique » (Artigue & Houdelement, 2007) en référence à un type de problème particulier, le « problème ouvert » (Arsac et Mante, 2007)². Dans ces dispositifs, il s'agit en effet de proposer aux élèves des activités qui ne s'inscrivent pas directement dans les programmes et qui visent à leur donner la possibilité de se confronter à des problèmes moins scolaires et dont la résolution n'est pas directement liée à l'utilisation du dernier théorème étudié en classe. La correspondance mathématique présente des spécificités par rapport à ces dispositifs. En particulier, c'est un échange épistolaire entre deux élèves presque pairs, mais non pairs (par exemple : terminale - étudiants de L1 ou L2, troisième - seconde, seconde - terminale) à propos d'un problème que l'un peut résoudre avec une solution « experte » et l'autre non. Précisons ces caractéristiques et leur motivation.

a) *Un échange entre élèves*³

La narration de recherche est un écrit individuel à propos de la résolution d'un problème-ouvert : l'élève ne livre pas sa solution au problème, mais retrace l'histoire de sa résolution, faisant part, entre autres, de ses impasses. La narration est réalisée le plus souvent en dehors de la classe et un travail collectif en classe est ensuite organisé par l'enseignant. Dans cette situation, deux éléments déterminants permettent à l'élève de s'engager dans l'activité mathématique : les caractéristiques du problème ouvert et la régularité de la pratique de narrations qui permet

2 Le problème ouvert vise l'apprentissage de savoirs sur la résolution de problème. L'énoncé d'un tel problème est court et n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire) et les élèves peuvent facilement prendre possession de la situation.

3 Par élèves nous entendons, à la fois écoliers, collégiens, lycéens, étudiants.

d'installer un contrat didactique particulier. La narration de recherche est adressée à l'enseignant et nous craignons que les élèves ne se livrent pas totalement. C'est pourquoi nous écartons l'enseignant de l'échange épistolaire en lui attribuant à ce moment-là le simple rôle de facteur c'est-à-dire qu'à ce moment là son rôle est restreint à la distribution du problème à ses élèves et à la transmission des lettres. Cependant, nous retenons l'idée de narration comme essentielle pour obtenir un écrit différent d'une solution.

La recherche collaborative (Sauter et *al.*, 2008) permet une résolution collective d'un problème. Les problèmes choisis sont de « véritables problèmes de recherche », « évolutifs, vivants » et nécessitent des échanges entre pairs. La collaboration est d'un certain point de vue une richesse mais ne permet pas d'accéder, comme nous le souhaitons, à l'activité individuelle de l'élève lors de la résolution de problèmes. Nous retenons cependant de ce dispositif l'idée d'échanges qui permet une évolution de la recherche.

Ainsi, le dispositif de correspondance mathématique s'apparente par certains aspects à la narration de recherche et à la recherche collaborative, mais il en diffère aussi fondamentalement par le choix du destinataire de l'écrit : le destinataire n'est pas le professeur nous pensons qu'ainsi l'élève livre sans censure son activité, cela permet une sincérité des correspondants dont témoignent les retours de certains élèves à la fin de la correspondance. Ainsi, un lycéen déclare : « Les rapports étaient plus proches que lorsqu'on fait un devoir pour notre prof, on était « entre collègues » et un autre : « On avait la possibilité de se tromper. ». Mais, comment alors motiver un échange épistolaire entre élèves si le but n'est pas la résolution collaborative d'un problème ?

b) Une dissymétrie de connaissances entre les correspondants

Notre dispositif repose sur une étude de l'activité du mathématicien et, en particulier, d'un mode de communication qui se traduit par des échanges épistolaires entre collègues à propos du travail individuel de chacun. L'histoire des mathématiques compte de nombreuses correspondances qui rapportent les avancées, doutes, questions des mathématiciens à propos de la résolution d'un ou plusieurs problèmes (Peiffer, 1998).

Dans la pratique épistolaire professionnelle, les deux correspondants ne travaillent pas forcément de concert à la résolution d'un même problème, il y a souvent une dissymétrie entre eux. De plus, le mathématicien raconte, de la manière qu'il a choisie, et de façon probablement très authentique, comment il travaille un problème puisqu'une correspondance n'a pas pour vocation première d'être publiée.

La lecture de ces correspondances met aussi bien en évidence l'importance du destinataire. Cela nous est apparu de façon frappante dans la correspondance de Sophie Germain, que nous avons choisie d'étudier. Nous avons retenu ses échanges épistolaires avec Legendre, Gauss, Poisson et Libri, qui ont tous des statuts différents vis à vis d'elle, tant du point de vue de l'âge, (Sophie Germain a 24 ans de moins que Legendre, 1 an de plus que Gauss, 5 ans de plus que Poisson et 26 ans de plus que Libri) que de la référence mathématique. Il y a en quelque sorte le professeur Legendre qui, le temps passant, devient presque un de ses pairs, le maître prestigieux Gauss, pour lequel elle marque son admiration, celle de l'élève devant le Maître, le ton changeant radicalement lorsque l'identité de Sophie Germain est révélée. C'est Gauss alors qui marque son admiration et accepte cette fois de parler vraiment mathématique. Il y a l'ami Libri, avec qui l'on correspond sur-

tout sur l'environnement mathématique, sur les difficultés à se faire reconnaître ; il y a enfin le juge Poisson qui, dans la seule correspondance que nous avons étudiée, corrige, d'une certaine façon, les erreurs de Sophie Germain, froidement et sans sentiment.

Il ressort de cette étude deux éléments importants concernant la variable destinataire de l'écrit. D'abord, si le destinataire de la lettre est un peu plus avancé en mathématiques, l'auteur livre plus facilement ses pistes de recherches, doutes, questions et impasses. Ensuite, lorsque le destinataire est plus avancé en mathématiques, il apporte un regard critique et constructif sur le travail de son collègue, sans toutefois lui livrer la solution. Ainsi, la dissymétrie entre les correspondants sur l'objet de l'étude apparaît, historiquement, comme un des moteurs d'une correspondance mathématique, un autre est bien entendu la publicité des recherches. Nous pensons que cette caractéristique peut aussi constituer une motivation pour une correspondance mathématique entre élèves, c'est pourquoi la correspondance est réalisée entre deux élèves qui ne se situent pas au même niveau scolaire.

*c) Une dissymétrie de buts
entre les correspondants :
une dynamique de recherche et d'aide*

Etant donnée la dissymétrie de connaissances entre les élèves et le projet de contribuer aux apprentissages mathématiques de chacun des élèves qui participe au dispositif, il convient de donner aux deux correspondants des consignes différentes. Pour l'élève moins avancé en mathématiques, il s'agit d'adresser en détails à son (sa) correspondant(e) les étapes de sa recherche, ses essais, réflexions, pistes de recherche, résultats, même s'ils sont intermédiaires ou partiels. Tandis que le rôle de l'élève plus avancé en mathématiques est d'aider son correspondant

à progresser dans sa recherche en n'hésitant pas à demander des précisions, mais toutefois sans fournir la réponse.

Cette dissymétrie inscrit l'échange dans une relation recherche – aide qui génère un processus dynamique de recherche. Cela incite en particulier l'élève qui cherche le problème à formuler ses doutes et questions ce qui, d'une part, participe certainement à sa construction du problème et, d'autre part, apporte des informations intéressantes à l'enseignant comme nous l'illustrons dans la partie suivante de l'article.

*d) Un problème qui ouvre des
perspectives nouvelles en mathématiques*

Cette relation d'aide est une occasion intéressante de faire des mathématiques autrement pour l'élève le plus avancé à condition que le problème choisi puisse se résoudre, d'une part, avec une procédure « experte » qu'il maîtrise ou qui est en cours d'apprentissage et, d'autre part, avec des connaissances plus anciennes pour lui et qu'il ne mobilise plus aussi instantanément car il dispose d'outils plus puissants. En quelque sorte, la correspondance mathématique est intéressante pour l'élève le plus avancé en mathématiques si elle l'amène à revisiter des savoirs anciens. Nous pensons en effet que dans ce cas, c'est une occasion pour lui de construire ou redécouvrir des relations entre des connaissances relativement anciennes et des connaissances plus nouvelles. Evidemment, il faut que l'élève le moins avancé ait à sa disposition des connaissances qui lui permettent d'aboutir. Pour cet élève, la procédure « experte », sans être disponible, se situera alors dans la filiation de ses connaissances au moment de la correspondance. Cette condition permet de proposer des problèmes qui résistent mais aussi, et nous y tenons particulièrement, elle place l'élève le moins avancé

dans un avenir mathématique qu'il est, le plus souvent, loin d'imaginer mais que son correspondant fréquente.

e) *Un dispositif en deux temps :
recherche et restitution*

Qui dit dispositif pédagogique dit objectif d'apprentissage. Au cours de la correspondance mathématique, les enseignants n'interviennent pas : ils proposent aux élèves de faire une correspondance mais ils restent en retrait du débat mathématique. Cependant, pour permettre aux élèves d'identifier les connaissances, parfois implicites, qu'ils construisent au cours de la résolution du problème et les stabiliser (en bref pour permettre des apprentissages) il est nécessaire d'organiser un moment de « restitution » à l'issue de la correspondance. Il s'agira alors de désigner, commenter et situer ces connaissances dans le champ des mathématiques. Ce moment mathématique où le professeur retrouve une place d'enseignant et qui réunit pour la première fois physiquement les correspondants, peut prendre différentes formes.

Il peut s'agir d'un travail sur des extraits de correspondances choisis par les enseignants. Les élèves analysent les différentes procédures de résolution proposées, commentent leur intérêt, leurs limites voire leur invalidité. Puis les enseignants pointent les savoirs notionnels nouveaux pour les élèves les moins avancés et connus pour les plus avancés mais aussi des savoirs relatifs à la résolution de problèmes en mathématiques. Par exemple, ils montrent l'intérêt au cours d'une recherche de s'arrêter pour un faire un point sur les résultats obtenus et organiser la suite du travail.

Il peut aussi s'agir d'un exposé plus magistral des enseignants avec les mêmes objectifs.

3. — Etude de deux correspondances

Pour compléter la présentation du dispositif, nous utilisons deux correspondances réalisées entre 2007 et 2009 à partir d'un même problème à l'articulation lycée – université.

a) *Organisation de ces correspondances*

Les élèves et étudiants qui ont participé à cette correspondance étaient tous volontaires. En 2007-2008, le planning a été le suivant :

- distribution du texte aux élèves de terminale le 15/02/2008 ;
- semaine du 03/03/2008 : l'élève rend sa première lettre sous enveloppe à son professeur qui se charge de la faire parvenir aux collègues de la faculté ;
- 10/03/2008, remise de l'enveloppe à chaque correspondant étudiant ;
- 26/03/2008, récupération des enveloppes contenant à la fois la première lettre du lycéen et la lettre de son correspondant ;
- 27/03/2008, remise des enveloppes aux lycéens ;
- 03/04/2008, les lycéens rendent dans l'enveloppe les documents précédents accompagnés de leur deuxième lettre ; leurs professeurs se chargent de la transmission aux étudiants ;
- semaine du 7 au 10 avril : les étudiants rendent le dossier complet accompagné de leur dernière lettre. Les professeurs redonnent le tout à leurs élèves pour consultation avant de récupérer les dossiers afin de les étudier.
- le 28 mai, une rencontre a lieu à la faculté entre les lycéens et les étudiants. Deux points forts ont marqué cette rencontre : la restitution au cours de laquelle on propose aux élèves/étudiants les différentes méthodes possibles pour résoudre le pro-

blème, les démarches observées, les erreurs rencontrées ; une conférence faite par un enseignant-chercheur.

Durant l'année scolaire 2008-2009 la correspondance a été renouvelée avec le même problème accompagné des mêmes consignes et selon le même protocole mais la date de distribution du texte a été avancée (fin du mois de septembre) de façon à permettre un troisième aller-retour des correspondances.

La première année de l'étude, 6 étudiants de 1^{ère} année (L1), 5 étudiants de 2^e année (L2), 2 étudiants de 3^e année (L3), 2 étudiants de 4^e année (M1) et un membre du groupe (Moulin Simon) ont répondu aux lycéens. La seconde année, la correspondance s'est inscrite dans un module de pré-professionnalisation (PPE) ouvert à des étudiants de L2. Sept étudiants ont participé au module. Quatre autres étudiants de L1 ont participé à la correspondance.

b) Le problème

Le problème choisi pour la correspondance a été le suivant :

L'expression $\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ admet-elle un maximum lorsque le point de coordonnées (x, y) décrit le premier quadrant ($x \geq 0$ et $y \geq 0$) ? Si oui, le déterminer.

Ce problème, dont le texte a été légèrement modifié, est extrait de la brochure APMEP n°154 (Gras et al., 2003). Aucune indication de méthode n'est proposée, néanmoins un élève de terminale ou de L1 doit pouvoir démarrer une réflexion, les termes de l'énoncé étant de ceux qu'il a l'habitude de rencontrer. Pour un élève de terminale la difficulté va venir de la présence

de deux variables mais la symétrie de l'expression peut donner des idées.

Le texte du problème est identique pour l'élève de terminale et pour l'étudiant mais les consignes l'accompagnant sont différentes. Le lycéen initie la correspondance à partir de la consigne suivante : « écrire en détails vos essais, tentatives, pistes de recherche et résultats (partiels ou intermédiaires) ». L'étudiant a pour tâche d'aider le lycéen, pour lui la consigne est : « aider le lycéen à avancer dans sa recherche, le but n'est pas de lui fournir une réponse, ne pas hésiter à lui demander des précisions ».

c) Comment les lycéens pouvaient-ils résoudre le problème ?

Compte tenu de leurs connaissances et de leurs pratiques, les élèves de terminale avaient à leur disposition plusieurs outils mathématiques pour résoudre le problème, notamment le travail sur les inégalités avec retour à la définition (le plus petit des majorants), le passage aux coordonnées polaires ou encore l'utilisation des courbes de niveau dans l'espace pour les élèves qui ont choisi la spécialité mathématique.

— Le travail sur les inégalités (le plus petit des majorants)

C'est la méthode qui nous semblait la plus naturelle pour les élèves de terminale et la plus à leur portée. En effet, celle-ci est utilisée en classe de seconde pour résoudre des problèmes d'extrema. Peut-être plus élémentaire mais néanmoins performante, elle est détrônée à l'arrivée de la dérivée en classe de première (voir encadré 1 ci-après).

— Passage aux coordonnées polaires

Il s'agit d'un outil dont les élèves disposent depuis la classe de première. Cependant, même

s'ils ont réactivé cette connaissance lors de l'étude des nombres complexes, ils ne l'ont jamais utilisée à l'occasion d'études de fonctions sauf peut-être de façon anecdotique. C'est un outil auquel ils ne pensent pas spontanément, surtout lorsqu'il s'agit comme ici de résoudre un problème de maximum (encadré 2).

— *Raisonnement utilisant les courbes de niveau*

Ce raisonnement n'est disponible que pour les élèves de terminale S faisant « spécialité maths » lorsque le chapitre « surfaces de l'espace » a été traité. Il s'agit de déterminer l'intersection de la surface avec le plan d'équation $z = h$ (encadré 3).

— *Majoration directe avec des inégalités*

Cette méthode a été amorcée par un élève de terminale dans sa correspondance (encadré 4).

*d) Quels apprentissages
l'échange épistolaire initie-t-il ?*

Le contexte inhabituel permet à l'élève d'avoir une attitude différente devant la recherche d'un problème, susceptible d'enclencher des apprentissages spécifiques.

Structurer, faire le point

La nécessité de structuration constitue l'un d'eux. En effet, l'éloignement avec le correspondant oblige le lycéen à faire périodiquement un point organisé et par écrit sur l'état de sa recherche. Il se rend alors compte que cette façon de procéder est un passage très constructif lorsqu'on fait des mathématiques. Ainsi, il pose au correspondant, donc aussi à lui-même, la question du sens de ce qu'il vient de faire et de la validité des résultats trouvés. Par exemple un lycéen écrit :

« Je suis bloquée ici. Je pense que j'ai dû faire une erreur mais je ne sais pas où. C'était ce qu'il fallait faire ou il faut passer par d'autres calculs ?? »

De ce point de vue, le dispositif est en particulier intéressant pour les élèves qui se fient beaucoup à leur intuition et ne prennent pas la peine d'écrire. Ainsi l'un d'eux aime chercher, y passe du temps, mais n'aime pas rédiger. Il manque parfois de recul et d'esprit critique, le dispositif l'y contraint et lui permet de distinguer ce qui relève de la conjecture :

« Bonjour à toi, j'ai tout d'abord expérimenté sur Excel, ... Le cadrant étant le premier, je restais dans un cas particulier si je prenais les nombres de 0 à 100 pour x et y. J'ai donc choisi une valeur aléatoire comprise entre 0 et 10 ... »

puis, commentant il poursuit :

« Les plus grandes valeurs sont atteintes lorsque x et y sont compris entre 0 et 1 et plus les valeurs prises pour x et y sont grandes, plus $f(x,y)$ devient petit »

« J'ai fait quelques⁴ tests avec x et y compris entre certains nombres ... »

A ce stade de sa recherche il est convaincu de l'existence d'un maximum pour la fonction à deux variables, que ce maximum « se situe » pour x et y entre 0 et 1, et il sait que ce n'est qu'une conjecture.

*Etudier et s'approprier
le raisonnement d'un autre*

L'étude des écrits du correspondant est importante pour avancer dans la résolution du pro-

4 En fait, une centaine !

Encadré 1 : *Le travail sur les inégalités (le plus petit des majorants)*

La borne supérieure est le plus petit des majorants et c'est un maximum si elle est atteinte.

On remarque $f \geq 0$ dans le premier quadrant.

Soit $k \geq 0$. k est un majorant de f si on a les équivalences suivantes :

$$f(x, y) \leq k \Leftrightarrow 1 + x^2 + y^2 \geq \frac{x}{k} + \frac{y}{k} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 + 1 - \frac{1}{2k^2} \geq 0.$$

Ceci doit être vrai pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, en particulier pour $x = 1/2k$ et $y = 1/2k$. On doit donc avoir

$$1 - \frac{1}{2k^2} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On cherche le maximum de f , c'est-à-dire le plus petit des majorants. On trouve $k = 1/\sqrt{2}$. De plus, vue l'équivalence précédente, on a

$$f(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2).$$

On a donc bien trouvé le maximum de f .

Encadré 2 : *Passage aux coordonnées polaires*

Passage en coordonnées polaires ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, $\theta \in [0, \pi/2]$) :

$$f(x, y) = f(r, \theta) = \frac{r}{1 + r^2} (\cos \theta + \sin \theta) = f_r(r) f_\theta(\theta).$$

On étudie les variations de f_r et de f_θ :

$$f_r'(r) = \frac{1 - r^2}{(1 + r^2)^2} = 0 \Leftrightarrow r = 1.$$

$$f_\theta'(\theta) = -\sin \theta + \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/4 \quad (\theta \in [0, \pi/2]).$$

Donc on a

$$f_r(r) \leq f_r(1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f_\theta(\theta) \leq f_\theta(\pi/4) = \sqrt{2}.$$

Ce qui prouve

$$f(x, y) = f(r, \theta) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = f_r(1) f_\theta(\pi/4) = f(x = \sqrt{2}/2, y = \sqrt{2}/2).$$

On a ainsi $\max_{x \geq 0, y \geq 0} f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Encadré 3 : *Raisonnement utilisant les courbes de niveau*

Soit $h > 0$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x, y) = h \Leftrightarrow 1 + x^2 + y^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{h} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2h}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2h}\right)^2 = \frac{1}{2h^2} - 1.$$

Cette expression correspond à l'équation d'un cercle si

$$\frac{1}{2h^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow h \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi pour $0 < h \leq \sqrt{2}/2$, le plan $z = h$ coupe la surface représentative de f .

Le maximum de f est donc la valeur maximale que peut prendre h : il s'agit de $\sqrt{2}/2$.

Pour cette valeur, l'intersection est un cercle réduit au point $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Encadré 4 : *Majoration directe avec des inégalités*

On remarque $(X - Y)^2 \geq 0$ donc $2XY \leq X^2 + Y^2$ donc en utilisant cette inégalité pour $X = x$ et $Y = y$, on obtient $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq 2(x^2 + y^2)$. Ce qui prouve

$$f(x, y) \leq \sqrt{2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2}.$$

En utilisant de nouveau l'inégalité pour $X = 1$ et $Y = \sqrt{x^2 + y^2}$, on trouve $2\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 + x^2 + y^2$. Ce qui prouve

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a égalité si, et seulement si toutes les inégalités précédentes sont des égalités soit

$$x = y \text{ et } 1 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On trouve ainsi le maximum

$$\max_{x \geq 0, y \geq 0} f(x, y) = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}.$$

blème. Elle n'est cependant pas toujours aisée :

« Je dois avouer que je n'ai pu comprendre sans un crayon et un papier pour refaire calculs et raisonnements. Certaines étapes, que tu sautes tellement ça te paraît logique, me sont indispensables pour intégrer le fil conduc-

teur. J'ai dû les retrouver, merci de m'avoir autant incitée à réfléchir et me « creuser la cervelle ». » (un lycéen)

On peut penser que ce travail développe l'autonomie par rapport à un texte mathématique.

Accepter de se tromper pour progresser

Le fait que l'étudiant soit à la fois un interlocuteur proche, un peu plus avancé en mathématiques mais dont le rôle n'est pas de sanctionner, permet au lycéen d'accepter que l'idée de se tromper est importante pour progresser.

« Merci beaucoup pour tes réponses et tes corrections. [...] Cette partie me paraissait valable puisqu'elle semble bien mener au maximum. Or, pour utiliser cette fonction, il fallait avant tout prouver rigoureusement que le maximum ne pouvait être atteint que pour $x = y$: Comme tu l'as démontré, mon argument à propos du plan de symétrie n'était en fait pas valable, à moins de prouver également l'unicité du maximum. »

Apprendre de façon autonome à mobiliser ses connaissances mathématiques

Par ailleurs, le dispositif oblige l'élève à mobiliser de leur propre initiative les connaissances adaptées et leur permet ainsi de mieux cerner l'utilisation de certains outils mathématiques.

« Il semble que nous ayons bien cerné le problème. Nous avons aussi les outils pour le résoudre. Je résume les différentes étapes. »
(un étudiant)

« Cela me donne l'idée de m'attarder aux complexes ... à ce niveau je ne sais comment faire pour faire le lien entre $x + iy$ et $f(x,y)$. Merci de m'éclairer. »

Se projeter dans un avenir mathématique

Le lycéen va pouvoir se projeter dans un « avenir mathématique » en réalisant grâce à cet échange que cet avenir est à sa portée, comme en témoignent les remarques de lycéens lors de la restitution :

« Les dérivées partielles, on commence à voir ce que c'est. »

« C'est rassurant de pouvoir se projeter, voir qu'on va « grandir » et acquérir des méthodes. »

« L'exercice de recherche avec la fac a permis de donner une autre dimension aux maths car cette fois, on n'a plus à suivre les idées des autres et à les réemployer, c'est nous qui construisons à partir de ce que l'on sait. »

L'étudiant de L1 utilise les dérivées partielles de façon très technique en physique, la correspondance est pour lui une occasion de voir une utilisation de cette notion pour les mathématiques.

e) Attitudes observées dans les correspondances

Les correspondances recueillies sont intéressantes pour les enseignants, dans la mesure où elles contrastent avec les productions habituelles de leurs élèves.

Tout d'abord, les connaissances antérieures des lycéens et des étudiants semblent beaucoup moins disponibles qu'on pourrait le penser. En effet, les procédures utilisant les coordonnées polaires et le plus petit des majorants ont été très peu mises en œuvre. En revanche, ils semblent plus à l'aise avec des raisonnements sur des cas particuliers qui leur permettent d'émettre des conjectures. On a souvent trouvé des tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, ce qui leur a permis d'avoir des idées sur le résultat, même s'ils n'ont pas réussi à aller au bout de la démonstration. Dans l'échange avec le correspondant, il était clair que les lycéens ne voulaient pas se contenter du tableau de valeurs et avaient compris la nécessité d'une démonstration, même si le cheminement conjecture-preuve reste souvent incertain. Il apparaît aussi que les lycéens sont

LA CORRESPONDANCE
MATHEMATIQUE ...

plus préoccupés par la validité de leur résultat que par la forme du raisonnement.

Ensuite, dans l'ensemble, la forme inhabituelle du travail proposé nous a permis de découvrir que des lycéens de niveaux différents en mathématiques étaient capables de prendre du recul, de se questionner sur la validité de leur démarche, et d'effectuer ainsi un vrai travail de recherche, avec une persévérance inhabituelle. L'analyse des lettres écrites par les étudiants apporte aussi quelques surprises (tout à fait normales à bien y réfléchir) : ils semblent avoir oublié les procédures les plus basiques et ne voir que la dérivée partielle ; les connaissances vues dans les deux dernières années du lycée sont finalement assez peu disponibles pour les étudiants. Voici quelques exemples qui illustrent ces idées.

*Des lycéens scolaires
qui révèlent leur capacité d'initiative*

Par exemple, Sabrina qui est une élève consciencieuse mais dont les travaux sont habituellement plutôt « scolaires », montre ici une capacité à tester des méthodes, se poser des questions et prendre du recul en se questionnant sur la validité ou non de ses démarches, attitude non observée dans ses travaux habituels. Elle écrit au cours de sa première lettre :

« 1^{ère} idée : J'ai pensé à la méthode de dérivation mais je ne sais pas le faire avec 2 inconnues, je ne sais pas si j'ai le droit mais je choisis de remplacer y par x ... d'après cette démarche $g(x)$ admet un maximum en $1/\sqrt{2}$... Peut-on conclure que $f(x,y)$ admet un maximum en $x = 1/\sqrt{2}$ et $y = 1/\sqrt{2}$ puisqu'on avait considéré $x = y$ au départ ? »
« Je suis bloquée à ce niveau, je ne sais pas si ma démarche est bonne »

Puis, en réponse à son correspondant, elle indique :

« ... Je dois avouer que je me suis un peu perdue dans tes explications ... J'ai continué mes démarches en fonction de ce que j'avais commencé ... ».

Cela montre qu'elle s'efforce de comprendre les explications de son correspondant, explications non appropriées au niveau de connaissances d'un lycéen, tout en persévérant dans sa propre démarche.

*Des lycéens en difficulté qui
s'investissent dans la correspondance*

D'après son enseignant, Romain connaît une année de terminale très difficile, sa motivation est très irrégulière. Au début de la correspondance, il s'avoue médiocre en mathématiques et s'excuse de ne pas arriver à trouver la réponse au problème posé avant d'exposer ensuite ses idées. Mais le sujet de la correspondance visiblement lui plaît. Il évoque un grand nombre de pistes, sans toujours savoir où il va. A la lecture de son correspondant, il essaye de rebondir sur des idées proposées. Son enseignant trouve qu'il s'est davantage investi qu'à son habitude même si son manque de maîtrise des connaissances ne lui a pas permis d'approfondir les démarches entamées. Il écrit :

« Tout d'abord je pense qu'il faut étudier le sens de variation afin d'étudier s'il y a un maximum, car c'est la méthode que l'on applique pour étudier une fonction. Mais le problème qui se pose c'est la présence de deux inconnues, comment peut-on faire ? Remplacer une inconnue par exemple y par une autre valeur ? Car au début de mes recherches j'ai tout de suite pensé à factoriser le dénominateur en ne sachant pas où j'allais car pour moi nous pouvions simplifier et y voir plus clair. [...] Car j'ai tout de suite pensé à la dérivation pour connaître le sens de la fonction mais dériver deux inconnues m'est impossible. »

De la même façon, Isabelle est une élève littéraire qui n'est pas à l'aise en section S, notamment en mathématiques. Elle a su trouver dans la correspondance une opportunité de **faire des maths** sans pression, pour le plaisir de chercher. Pour elle ce fut une expérience très positive.

Des élèves intuitifs qui écrivent, contrairement à leur habitude, et prennent du recul sur leur recherche

Martin est un élève très intuitif et indépendant qui, en classe, cherche sans rien écrire ou écrit sur des brouillons illisibles. Il obtient d'assez bons résultats en mathématiques. Dès le début de sa correspondance, il pose ses idées :

« Si la fonction admet un maximum, alors l'expression admet un majorant.
Si la fonction n'admet pas de maximum, alors l'expression tend vers $+\infty$ lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$ »

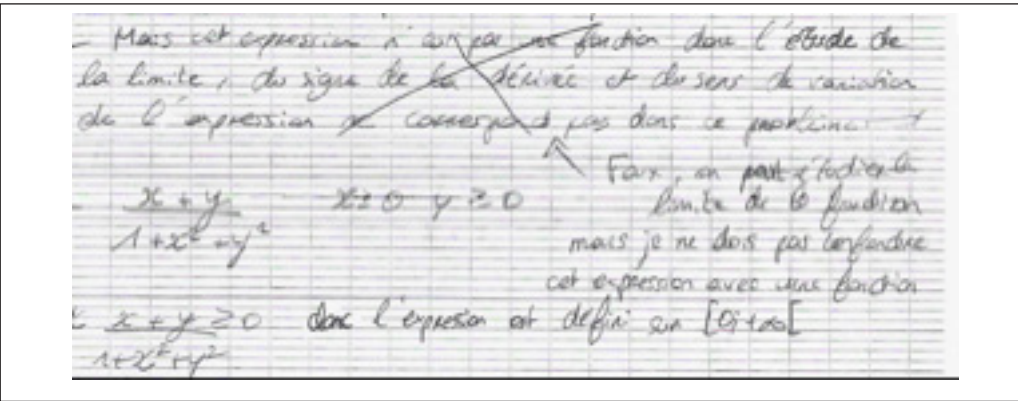
Il recourt à la notion de majorant et à la notion de limite. Il a visiblement cherché le sens des mots utilisés. Il prend du recul et n'hésite pas à critiquer ce qu'il a écrit (extrait ci-dessous).

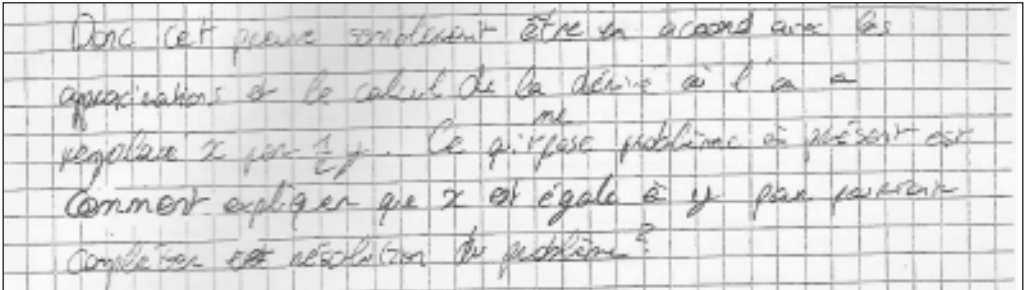
« Au lieu de continuer à faire des tableaux de valeurs, on peut observer que le maximum augmente. Pour quelle valeur de y , le maximum est-il le plus fort ? En tâtonnant je trouve : $y = 0,71$, $x = 0,7$.
Je décide alors d'augmenter le nombre de décimales de x et de y , mais ceci est peu concluant ... »

Sa recherche est organisée, il prend du recul et mesure l'intérêt ou non de poursuivre sur une méthode :

« Mais, maintenant, je me pose une question, l'expression a-t-elle plusieurs sommets ou un seul ?
Peut-on utiliser la dérivée pour étudier les variations de l'expression en fonction de x et y , est-ce possible, si oui ... »
« Mais je ne préfère pas aller plus loin avec cette méthode car je ne sais pas si ma dérivée est vraie ou si elle est possible tout simplement. »

Les conseils de l'étudiant sont plutôt des « recettes » pas tout à fait assimilées ; l'étudiant en L1 connaît un outil « expert » pour résoudre le problème mais il ne maîtrise pas encore cet





outil, ce qui l'empêche de donner des conseils éclairés au lycéen. Pour permettre l'avancée dans la résolution du problème, le lycéen récapitule en une synthèse les résultats « établis » précédemment (certains des résultats n'ont pas été démontrés, la dérivée calculée par le lycéen et validée par l'étudiant est fausse).

Puis, il calcule la dérivée dans le cas où $y = x$ et trouve que $f(x, x)$ admet un maximum pour $x = \sqrt{1/2}$. Cela le rassure (extrait ci-dessus).

Le statut des « résultats » reste très flou, aussi bien pour l'étudiant que pour le lycéen (conjecture ? preuve ?). La partie expérimentale fait apparaître une conjecture et le fait de retrouver, par un calcul, un nombre irrationnel dont une valeur approchée est proche de la conjecture suffit pour eux à valider cette conjecture. L'étudiant n'a pas assez de recul pour clarifier la situation. Il fait des remarques plutôt « de détails » sur les tableaux de variations mais n'a pas vu les questions de rigueur qui se posent...

Des étudiants « experts », d'autres pas : des différences selon le niveau d'étude

Les L1 ne se placent pas en position d'expert. Ils acceptent de ne pas savoir et font part de leur doute dans leur correspondance. A partir de la L2, les étudiants qui connaissent la solution

experte (les dérivées partielles), se placent en position d'experts et sont plus tentés d'expliquer leur solution. Cependant, certains étudiants, notamment les deux étudiants de M1 mais aussi un étudiant de L2 (qui a un très bon niveau de mathématiques) prennent une position d'expert mais prennent aussi le recul nécessaire pour ne pas imposer leur solution au lycéen. Nous pensons que la plus grande disponibilité de leurs connaissances mathématiques permet cette attitude.

Nous avons observé une progression dans les aides apportées par l'étudiant. La seconde lettre est souvent plus directive que la première, les étudiants se sentant probablement dans l'obligation de terminer par la solution du problème. Les étudiants de L2 et L3 sont plus directifs que ceux de L1 et de M1.

Différences selon les deux correspondances

Les étudiants au sein du module « pré-professionalisation (PPE) » sont plus directifs que les étudiants volontaires de la 1^{ère} année. Par ailleurs, certains étudiants de ce module avaient participé à la correspondance la 1^{ère} année et connaissaient donc d'autres solutions que la méthode des dérivées partielles.

Nous avons également analysé les correspondances selon plusieurs axes :

- *Le problème de la validation* : les étudiants sont plus préoccupés par la forme de la rédaction de la solution. Ils sont attachés à la démonstration des résultats, point sur lequel on insiste à l'université.
« Je pense que l'on peut se passer de la résolution complète du système ».
« Cela semble tout de même un peu long pour expliquer quelque chose d'évident ».
- *La forme de la correspondance* : certains étudiants utilisent un métalangage inhabituel dans les textes scolaires.
« C'est plus légal » (L2),
« Fie toi plus à ton intuition et à tes calculs qu'à ta calculatrice » (L3),
« Par chance, tu arrives à la bonne dérivée parce que la fonction est symétrique mais c'est bien un coup de chance » (L2).
- *Les types d'aide* : les étudiants fournissent des aides manipulatoires pour certains outils (principalement les dérivées partielles) ainsi que des aides procédurales mais ils fournissent peu d'aides constructives. Cela rejoint l'observation de la directivité de certains étudiants.

Dans l'analyse des correspondances ainsi que des rapports du module PPE, il ressort que les étudiants ont du mal à savoir ce que maîtrise exactement le lycéen. De plus, les étudiants sont souvent démunis face à un lycéen qui propose peu de choses dans sa première lettre, ils ne savent pas trop quelle aide fournir dans ce cas.

Nous avons regroupé les étudiants en deux catégories :

- *Etudiant qui cherche à mettre en avant ses compétences ou ses capacités* : principalement les étudiants de L2 et de L3 qui sont sans recul sur les outils ainsi que les L2 au sein du module PPE. L'évaluation

au sein d'un module semble renforcer la mise en avant de ses capacités. Les échanges sont centrés sur les techniques et les échanges sont directifs. Parfois, les aides sont inadaptées (surtout observé la 2^{nde} année).

- *Etudiant qui montre le désir de développer ses connaissances* : les L1 non expert, les bons étudiants de L2 ainsi que les L3 et M1 qui arrivent à prendre du recul. Ce profil semble bénéfique à l'apprentissage pour le lycéen. Les aides sont adaptées et il est laissé une possibilité d'évolution au lycéen. De plus, plus le lycéen propose de pistes, plus l'étudiant propose des aides et des analyses des différentes pistes.

4. — Des suggestions pour mettre en place une correspondance mathématique

Choisir des problèmes qui répondent à certains critères

- Ces problèmes sont abordables aux deux niveaux d'étude des correspondants avec des outils différents.
- Ces problèmes ouvrent des perspectives de nouveaux apprentissages en mathématiques, au-delà du niveau scolaire des élèves.
- Il peut y avoir plusieurs façons de résoudre le problème choisi.
- La solution ne va pas de soi et doit passer par la réappropriation du problème par les élèves à l'aide de questions du style : « quand est-ce que ça marche ? », « quand est-ce que ça ne marche pas ? »
- La recherche du problème doit conduire les élèves à produire des preuves.

En résumé, nous voulons que les élèves cherchent, émettent des conjectures, prouvent et

échantent. Certaines formulations d'énoncés peuvent favoriser la recherche de conjectures, d'autres, la preuve, mais nous sommes d'accord pour garder l'importance de l'échange en sélectionnant des problèmes où les outils entre les différents niveaux ne sont pas trop éloignés. Nous voulons aussi que les élèves se rendent compte que les outils mathématiques évoluent ainsi que leur domaine de validité, même si nos objectifs principaux restent qu'ils cherchent et échangent.

*Mettre en place une organisation
tenant compte de la période
de l'année et des élèves concernés*

Au cours de l'année scolaire 2007-2008, seize élèves de terminale S ont correspondu avec six étudiants de L1, 5 étudiants de L2, 2 étudiants de L3 et 2 étudiants de M1 : en effet il y avait davantage de volontaires chez les lycéens que chez les étudiants de première année, ce qui nous a conduits à solliciter des étudiants des niveaux supérieurs. L'année suivante le déséquilibre était encore plus grand (36 lycéens pour 11 étudiants) si bien que chaque étudiant s'est vu attribuer 3 voire 4 correspondants lycéens. Ce genre de situation est à éviter autant que possible mais il nous semble important de garder l'aspect « volontariat » du travail, ce qui complique inévitablement la formation des « couples » de correspondants.

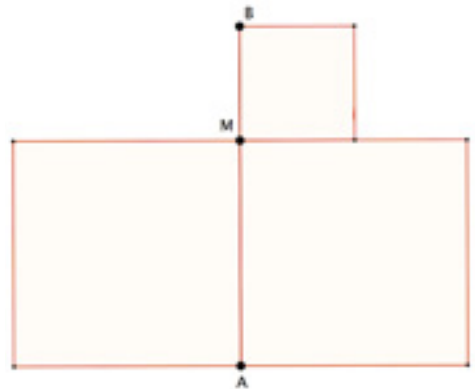
La première année, la correspondance n'a commencé qu'au deuxième trimestre et, de ce fait, il n'y a eu que deux allers et retours de courrier, ce qui a été insuffisant pour mener la résolution du problème à son terme. Un échange supplémentaire aurait permis à certains de finaliser la solution. Afin de remédier à cela nous avons commencé la correspondance nettement plus tôt l'année suivante (début du premier trimestre) ; mais nous n'avons pas pensé que, au début de la terminale, les connaissances des élèves ne sont

pas tout à fait suffisantes pour démarrer le problème et leurs premières lettres ne comportaient souvent que quelques lignes et ne permettaient pas vraiment d'initier un échange avec l'étudiant. Le moment de l'année pour mettre en place une correspondance doit être choisi avec soin.

*Des exemples de problèmes
répondant ou pas aux critères ci-dessus.*

— *Premier problème qui pourrait faire l'objet
d'une correspondance troisième - seconde*

Soit $[AB]$ un segment tel que $AB = 10$ cm. On place un point M sur le segment $[AB]$. On construit trois carrés comme indiqués sur la figure ci-dessous :



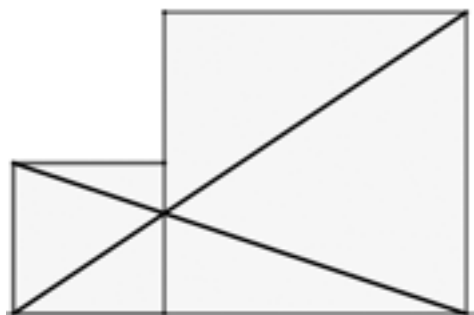
Où faut-il placer le point M sur $[AB]$ de sorte que l'aire de la figure formée par les trois carrés soit minimale ?

En troisième, les élèves peuvent faire appel à un tableur ou à un logiciel de géométrie dynamique pour approcher la solution. En seconde, les élèves peuvent utiliser une écriture sous

forme de fonction et conjecturer le résultat. D'une façon générale, ils s'entraînent aux constructions géométriques et au calcul algébrique. En troisième, ils sont souvent au seuil de la solution ; les élèves de seconde peuvent les aider avec des outils accessibles aux collégiens, sans que les lycéens les maîtrisent totalement eux mêmes. Cela offre une occasion de découverte ou d'approfondissement de part et d'autre.

— *Deuxième problème qui pourrait faire l'objet d'une correspondance troisième - seconde ou seconde - première (S ou ES) selon la période de l'année :*

Des élèves ont dessiné comme ci-dessous : un carré de côté 1, un autre carré de côté quelconque accolé, deux segments joignant deux sommets « extrêmes ».



Ils affirment que ces deux segments se coupent sur le côté commun des carrés. Ont-ils raison ?

Et s'ils avaient remplacé un carré par un rectangle non carré ? Et s'ils avaient accolé, de la même façon, deux rectangles non carrés ?

L'énoncé de ce problème classique a été modifié de façon à produire un énoncé qui

soit clair, permette une « vraie » recherche, sans pour autant décourager les élèves. Il fallait qu'ils puissent accéder sans trop de difficultés à un raisonnement général, sans rester bloqués sur un cas de figure particulier. Les élèves, quel que soit leur niveau, seront probablement conduits à faire plusieurs figures, pour émettre des conjectures. Ils seront amenés aussi à problématiser la question, en faisant appel par exemple à des alignements ou à des intersections de droites, selon leur niveau. La solution peut être de pure géométrie, algébrique ou analytique selon le niveau.

— *Un troisième problème que nous n'avons pas retenu*

On donne un cercle de rayon 4cm. Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets sont situés sur ce cercle ?

Ce problème peut s'envisager aux niveaux troisième - première ou seconde - première S. Dans l'un comme l'autre cas, la « nouveauté » de première, à savoir l'étude d'une fonction racine carrée, ou d'une fonction trigonométrique, reste peu accessible au niveau inférieur. Elle n'apporte par ailleurs aucune simplification de résolution par rapport à la solution « non experte », par comparaison de la médiane et de la hauteur d'un triangle rectangle.

5. — Conclusion

Nous avons présenté les caractéristiques du dispositif de correspondance mathématique de façon à permettre aux enseignants qui le souhaitent de faire vivre de tels échanges dans leur classe. Comme nous l'avons illustré ici, une telle activité de recherche présente de nombreux intérêts pour les élèves et l'enseignant ;

en particulier cela permet aux élèves de « vivre » une expérience mathématique riche. Dans un autre article complémentaire de celui-ci (Hersant, 2011) nous montrons que les raisonnements utilisés par les élèves de terminale dans la « correspondance mathématique » étudiée ici sont plus créatifs et plus problématisés qu'à l'habitude et

travaillons plus spécifiquement les conditions écologiques qui permettent cela. La stabilité de ces conditions, avec d'autres élèves et à d'autres niveaux d'enseignement, reste à étudier. Par ailleurs, un autre enjeu de notre travail à venir consiste à étoffer le corpus de problèmes bien adaptés pour une correspondance.

Références bibliographiques

- Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert* (Scéren.). Lyon: CRDP Lyon.
- Artigue, M., & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM*, 39(5), 365-382. doi:10.1007/s11858-007-0048-x
- Brousseau, G. *La théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage
- Chevalier, A. (1992). Narration de recherche : un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x*, 33, 71-79.
- Del Centina A., *Letters of Sophie Germain preserved in Florence*, Dipartimento di Matematica, Ferrara, 2007.
- ECCEmaths. (2009). *Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour les élèves à la fin du lycée et au début du supérieur ?* Nantes: IREM de Nantes.
- Germain S., *Œuvres philosophiques, suivies de pensées et de lettres inédites*, Paris, Librairie de Firmin Didot et Cie, 1896.
- Gras R., Bardy P., Parzys B., Pécal M., Richeton J. P. (2003). *Pour un enseignement problématisé au lycée. Brochure APMEP 154*. Paris : APMEP
- Hersant, M. (2009). Etude de l'activité mathématique de lycéens dans une correspondance mathématique à propos d'un problème de maximum. Dans *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 351-374). Paris: IREM Paris 7.
- Hersant, M. (2011). Correspondance entre élèves: conditions d'une activité mathématique « créative » et problématisée à la fin du lycée. *Educational studies in mathematics*, DOI 10.1007/s10649-011-9327-0
- Perrin D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. In *Actes du 33^e colloque de la Copirelem*, pages 37_72, Dourdan
- Lithner, J. (2000). Mathematical Reasoning in School Tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165-190. doi:10.1023/A:1003956417456
- Peiffer, J. (1998). Faire des mathématiques par lettres. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 4, 143-157.
- Sauter, M. (2000). Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège. *Repères IREM*, 39, 7-20.
- Sauter, M., Combes, C., De Crozals, A., Droniou, J., Lacage, M., Saumade, H., & Theret, D. (2008). Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes. *Repères IREM*, 72, 25-45.