LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS : EXPERIMENTATION EN CLASSE ET TRAVAIL DU CHERCHEUR

Marie-Line GARDES
LEPS-LIRDHIST

Michel MIZONY
Institut C. Jordan et Irem de Lyon

Introduction

L'objet de cet article est de présenter une recherche de résolution d'un même problème ouvert (au sens non résolu) en arithmétique par des élèves de terminale scientifique et par un mathématicien. Le but est de mettre en perspective les deux processus de recherche afin de répondre à une question didactique sous-jacente : existe-t-il des éléments dans la recherche d'un mathématicien qui pourraient aider et favoriser la recherche mathématique des élèves dans le cadre de la résolution de problème de recherche ?[1]

Ces travaux se sont effectués dans le cadre du groupe EXPRIME : EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématiques à l'École. Les documents[2] présentés par ce groupe sont issus d'une recherche en cours, menée conjointement par l'INRP, l'IREM, le LEPS-LIRDHIST (Université Claude Bernard Lyon 1) et l'IUFM de Lyon et dont le cœur est l'étude de la dimension expérimentale dans les problèmes de recherche. Elle s'appuie sur de nombreuses expériences qui ont eu lieu depuis près de vingt ans tant au collège qu'à l'école élémentaire et au lycée, concernant la mise en œuvre de problèmes de recherche en mathématiques dans différents contextes. Ces dernières montrent clairement les apports en termes d'apprentissage de la démarche scientifique : développement d'heuristique, élaboration de conjectures, mobilisation d'outils de contrôle et de validation etc., elles montrent aussi la possibilité d'insérer des situations de ce type en classe. Une des sept situations robustes présentées et analysées par le groupe concerne la décomposition de l'unité en

1 Ce travail fait l'objet de la thèse de Marie-Line GARDES, débutée en octobre 2009.

2 http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/exprime/

somme de fractions égyptiennes. Une des situations connexes à ce problème est la conjecture d'Erdös-Straus, expérimentée de nombreuses fois (du collège au supérieur), que Marie-Line Gardes a exposé au groupe en février 2009 dans le cadre d'un séminaire étudiant de master. Ce fut, pour Michel Mizony, le début d'une recherche active sur le problème.

Après avoir présenté le problème, nous analyserons une expérimentation menée en classe de terminale scientifique sur une situation construite autour de la conjecture d'Erdös-Straus puis dans une seconde partie, nous exposerons le travail de recherche mené par Michel Mizony sur cette conjecture. Enfin, nous donnerons des éléments de réponses à notre question didactique.

1. — Le problème

S'intéressant à la décomposition d'une fraction en une somme de *fractions unitaires*, Erdös et Straus énoncent la conjecture (Erdös, 1950) selon laquelle :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ *, on peut trouver des entiers non nuls x, y, z (non nécessairement distincts) tels que :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ .$$

2. — Une expérimentation en classe de TS

Dans un premier temps j'expose les conditions dans lesquelles s'est déroulée l'expérimentation en présentant notamment la classe. Puis, dans un second temps, je présenterai les recherches effectuées par les élèves en mettant en évidence la place de la dimension expérimentale dans leurs processus de recherche.

2.1 *Conditions de l'expérimentation*

Cette expérimentation en classe de terminale scientifique est une situation ponctuelle composée de deux séances : une première séance de 2h 30 de recherche collective puis une séance de synthèse d'une heure. Voici l'énoncé et les consignes proposés aux élèves :

Séance du 20 mars 2009

Un problème de fractions égyptiennes

Énoncé : Pour tout n entier naturel, peut-on trouver trois entiers naturels a, b, c tels que :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ ?$$

Consignes :

1. Réfléchir à ce problème *individuellement* pendant 10 min.
2. *Travail en groupe* pour résoudre ce problème.
3. A la fin de ce temps de recherche en groupe, il vous est demandé de rendre une *production unique* par groupe. Ce travail doit rendre compte de l'état de votre recherche. Vous préciserez ainsi les résultats démontrés, ceux restés à l'état de conjectures, les pistes qui seraient à développer…
4. Lors d'une *séance de synthèse*, ces différents résultats seront présentés à l'ensemble de la classe.

Remarque : Tous les documents sont autorisés ainsi que les calculatrices.

La classe de terminale scientifique où s'est déroulée l'expérimentation avait une culture mathématique spécifique. Les élèves avaient l'habitude d'aborder l'activité mathématique par des recherches de problème : problème ouvert[3] ou à prise d'initiative dans chaque devoir à la maison et devoir surveillé ; nombreuses situations de recherches de problème, soit sous forme de débat scientifique, soit sous forme de travaux en groupe en classe. Ces derniers étaient également sensibilisés au vocabulaire relatif à une recherche : conjecture, preuve, contre-exemple. Enfin, pour les élèves suivant la spécialité mathématique, il est essentiel de savoir que le premier chapitre de la partie arithmétique portait sur les « différents types de raisonnement » en arithmétique. De plus, le contrat « de recherche » établi au sein de la classe et à long terme laissait penser qu'ils avaient acquis une représentation de l'activité de recherche mathématique favorisant une dévolution de ce problème. Les groupes dont nous analyserons la recherche disposaient de calculatrice du type TI-89 qui favorise davantage la dévolution. En effet, ces calculatrices disposent d'une fonction permettant le calcul fractionnaire. Or les calculs fractionnaires étant nombreux, le problème ne pourrait pas nécessairement vivre longtemps dans une classe de terminale scientifique. Elle permet ainsi la dévolution dans la mesure où elle permet aux élèves d'être dans l'action assez facilement. L'analyse de l'expérimentation porte sur deux groupes composés de très bons élèves : le groupe 1 est composé d'élèves suivant la spécialité mathématique et les élèves du groupe 2 suivent une autre spécialité.

2.2 *La dimension expérimentale dans les processus de recherche de preuves.*

Les procédures exploitées

Les procédures exploitées dans la recherche des élèves ont été nombreuses et variées. Les premières actions des élèves ont été de deux natures différentes : soit expérimentales, soit opératoires. Celles du groupe suivant la spécialité mathématique ont été de type opératoire, c'est-à-dire qu'ils ont essayé de transformer l'écriture initiale de l'équation.

Exemples :

— Réduction au même dénominateur :

$$\frac{4}{n} = \frac{ab + ac + bc}{abc}\ .$$

— Utilisation de la proportionnalité :

$$4abc = n(ab + ac + bc).$$

— Isolement de n :

$$\frac{4abc}{ab + ca + bc}\ .$$

Les élèves non spécialistes ont exploité, en premier lieu, le caractère expérimental du problème, à savoir, faire des essais pour différentes valeurs de n.

Exemples :

— n = 1 : impossible car 4 > 3.

— n = 2 donne : $\frac{4}{2} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

— n = 3 donne :

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}.$$

— n = 4 donne :

$$\frac{4}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}...$$

3 Au sens de problème ouvert de Lyon 1.

Ainsi, le groupe suivant la spécialité mathématique a davantage exploité des procédures de type opératoire alors que le groupe de non spécialistes a mené sa recherche avec des procédures à caractère expérimental. L'étude des procédures utilisées révèle donc que le processus de recherche des deux groupes est différent, l'un plus axé sur la recherche d'un raisonnement particulier à conduire, l'autre davantage centré sur le caractère expérimental du problème. Le groupe suivant la spécialité mathématique a ainsi mené une recherche en essayant en particulier d'exploiter de nombreux raisonnements (par l'absurde, par disjonction de cas) et diverses connaissances (théorème de Gauss, équation diophantienne) d'arithmétique institutionnalisés dans le cours de spécialité. Une déconnexion avec le caractère expérimental en jeu dans le problème est parfois présente dans leur recherche. Le groupe ne suivant que l'enseignement obligatoire de mathématiques a, au contraire, exploité rapidement cet aspect expérimental du problème. Je fais l'hypothèse que ces élèves, faute de posséder des outils théoriques d'arithmétique, ont eu recourt presque automatiquement au caractère expérimental en jeu. Il semblerait alors, que pour ce problème, l'influence de la culture d'enseignement spécifique à l'arithmétique ait freiné, dans un premier temps, la production de résultats des élèves suivant la spécialité mathématique.

La dimension expérimentale

A partir d'un résultat trouvé par les deux groupes, je voudrais montrer la place centrale de la dimension expérimentale dans la recherche de processus de preuves.

Résultat : si *n* est pair alors l'équation a des solutions.

Le début de la recherche sur ce résultat commence, pour le groupe 1 des élèves spécialistes, après une heure et demi de travail collectif, davantage axé sur la recherche d'un raisonnement à conduire. Ils effectuent donc une rupture dans leur recherche pour se centrer sur le caractère expérimental du problème « faire des essais sur n ». Voici les différentes étapes de leur processus de recherche de ce résultat :

— *Première expérience :* décompositions pour $n = 3$ et $n = 6$.

$$\frac{4}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

— *Première hypothèse :* « Ben ça doit être facile, ça fait 2, 2, 3 ; 4, 4, 6 » ; « Bah oui, c'est multiplié par 2. 4, 4, 6 c'est multiplié par 2. Si n est multiplié par 2, les solutions aussi».

— *Contre-exemple :* pour $n = 12$, ils ont

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$$

ce qui est différent de $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$ solution obtenue avec cette hypothèse. Ils vérifient alors si (8, 8, 12) peut être une solution pour $n = 12$.

— *Retour à l'expérience :* essais pour $n = 16$ puis pour $n = 18$ à l'aide de l'hypothèse.

— *Conjecture :* pour les nombres pairs, ils obtiennent cette égalité :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

— *Preuve :* la première idée est de faire un raisonnement par récurrence puis ils utilisent l'égalité ci-dessus et la nature des nombres en jeu : « comme n est pair, on peut l'écrire $2n'$. En remplaçant dans l'égalité, on obtient alors

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n'} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \text{ ».}$$

Cette phase de recherche arrive très tôt pour le groupe 2 (élèves non spécialistes) au bout de 30 minutes. Elle est dans la continuité de leur travail collectif, centré sur la recherche d'exemples pour un n particulier. En voici les étapes :

— *Première expérience :* décomposition pour $n = 4$: $\frac{4}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

— *Première hypothèse :* « il y a peut être moyen de faire quelque chose puisque 1/6 c'est 1/2 fois 1/3, c'est peut être un hasard mais ».

— *Contre-exemple :* pour $n = 7$, ce lien n'existe pas puisqu'ils ont : $\frac{4}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{14}$.

— *Retour à l'expérience :* un élève cherche une méthode de décomposition d'une fraction en fractions unitaires sur $\frac{4}{5}$. Il effectue $\frac{4}{5} - \frac{1}{10}$ (car $2 \times 5 = 10$). Il obtient $\frac{7}{10}$. Il essaie alors d'enlever $\frac{1}{3}$, il obtient $\frac{11}{30}$ qui ne lui convient pas, donc il essaie $\frac{1}{4}$ puis $\frac{1}{5}$. Il trouve finalement la décomposition de $\frac{4}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$.

— *Seconde hypothèse :* « Donc ce qu'il y a de con c'est que pour 5, ça fait 1/10 + 1/5 + 1/2, à chaque fois il y a un truc des multiplications. $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, j'en sais rien moi mais… non c'est vrai, regarde »

— *Retour à l'expérience :* recherche d'une nouvelle décomposition. Essai de décomposer $\frac{4}{6}$: il enlève d'abord $\frac{1}{3}$; comme il obtient $\frac{1}{3}$ il commence par dire que $\frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ puis tout de suite il se reprend et modifie par 1/3 + 1/4 + 1/12.

— *Troisième hypothèse :* « Ça fait 1/3, 1/4, 1/12. C'est pas un petit peu bizarre ça pour vous ? non ?»

— *Conjecture :* « pour les nombres pairs ça marche ».

— *Retour à l'expérience :* essai de cette conjecture sur $n = 8$ et $n = 20$.

— *Preuve :* la première idée est de faire un raisonnement par récurrence puis ils utilisent une égalité $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ établie à partir de leurs expériences avec diverses valeurs de n où ils ont remarqué que $a = \frac{n}{2}$, $b = a + 1$ et $c = a \times b$.

Leur raisonnement est alors basé sur la nature des nombres en jeu : « *a est un entier naturel car n est pair, b est un entier naturel car la somme de deux entiers naturels est un entier naturel et c est un entier naturel car le produit de deux entiers naturels est un entier naturel* ».

On peut remarquer que le caractère expérimental des deux recherches correspond tout à fait à la démarche expérimentale de Perrin (Perrin, 2007), avec des allers-retours entre les expériences, la formulation de conjectures et les tentatives de preuves. En effet, les élèves procèdent à une expérience (essais sur des valeurs de n), observent les résultats de cette expérience afin de formuler des hypothèses (si n est multiplié par 2 alors les solutions aussi, la première fraction multipliée par la seconde donne la troisième) puis ils retournent à l'expérience (essais sur de nouvelles valeurs de n) afin de formuler une conjecture (si n est pair alors l'équation a des solutions). L'étape de tentative de preuve vient ensuite, soit dans la continuité de leurs recherches (groupe 1), soit plus tard (groupe 2). Leurs preuves sont basées sur l'étude de l'égalité obtenue grâce à leurs expériences sur des valeurs de n. Le caractère expérimental des processus de recherche des deux groupes est donc de ce point de vue identique. Il apparaît également que ce soit l'expérimentation et plus précisément l'exploitation des exemples qui permette aux deux groupes d'établir la conjecture.

Cependant l'utilisation des exemples diffère selon les groupes. En effet, le groupe 1 obtient sa conjecture en observant deux décompositions particulières alors que le groupe 2 formule sa conjecture en essayant de déterminer un moyen de décomposer une fraction pour un n particulier. Les élèves du groupe 1 utilisent ainsi l'exemple comme un produit fini alors que les élèves du groupe 2 cherchent à construire l'exemple.

D'ailleurs le fait que le groupe 1 n'explique pas comment il trouve les décompositions de $\frac{4}{n}$ pour $n = 3$ et $n = 6$ alors que le groupe 2 essaie d'expliquer sa méthode de décomposition confirme cette différence.

On peut également constater que ces exploitations différentes des exemples les conduisent à formuler des conjectures différentes. Les rôles du contre-exemple et de la non unicité des décompositions peuvent également être mis en avant dans les deux groupes. Dans le groupe 1, la conscience de la non unicité des décompositions par un élève inhibe le rôle du contre-exemple. En effet lorsqu'un contre-exemple pour la conjecture établie est déterminé, les élèves ne remettent pas en cause cette dernière mais plutôt le contre-exemple en cherchant une nouvelle décomposition de la fraction. Le groupe 2 semble ne pas avoir une claire conscience, à ce moment précis de leur recherche, de la non unicité des décompositions. Le contre-exemple joue alors pleinement son rôle : les élèves remettent en cause leur conjecture et ne cherchent pas d'autre décomposition afin de changer éventuellement le statut du contre-exemple en exemple vérificateur.

2.3 *Conclusion*

Dans cette étude des processus de recherche d'élèves confrontés à la résolution d'un problème ouvert, je voulais surtout mettre en évidence deux points : les conditions favorisant une vie réelle du problème en classe de terminale scientifique et la place importante de la dimension expérimentale dans les processus de recherche.

La dévolution du problème, c'est-à-dire les conditions mises en place dans la classe pour que le problème ne soit plus le problème du professeur mais le problème des élèves est favorisée par le partage d'un « contrat de recherche » établi au sein de la classe dans lequel la recherche de problème a une place prépondérante. Mais aussi par l'introduction dans le milieu des élèves d'outils particuliers, et dans ce cas, de calculatrices de type TI-89. En facilitant les calculs fractionnaires, elles permettent aux élèves d'être dans l'action rapidement et facilement, sans être découragés par les calculs pour poursuivre leur recherche.

Le caractère expérimental du problème, à savoir « faire des essais sur n », a tout d'abord permis à tous les élèves d'agir. Cette dimension a « gommé » les inégalités dues aux difficultés scolaires ou à la spécialité suivie. En effet, l'absence de contenus théoriques en arithmétique chez certains élèves les a poussé rapidement à déterminer et exploiter des exemples pour certaines valeurs de n. La dimension expérimentale du problème, caractérisée par les allers-retours entre l'expérience et la théorie, a ensuite été la clé pour la plupart des groupes, pour formuler des conjectures, à partir des expériences et de leurs observations. Enfin, elle a constitué une aide à la démonstration de leur conjecture. En effet, c'est en exploitant l'égalité obtenue à partir de leurs expériences et la nature des nombres en jeu qu'ils ont démontré leur résultat sur les nombres pairs.

3. — Narration de recherche par Michel Mizony

3.1 *Quelques étapes vers la résolution …*

- 1948, énoncé de la conjecture par Erdös et Straus
- 1969, les résultats de Mordell.
- 1999, vérification de la conjecture pour $n < 10^{14}$ par Swett.
- 2000, le résultat négatif de Schinzel : pas de solution générale par une formule polynomiale.

3.2 *… détaillées*

Evidences : si n vérifie la conjecture, kn également. Si n est premier et $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, alors 1 ou 2 des trois nombres x, y et z sont divisibles par n.

Il existe une formule polynomiale pour $n = 2$ modulo 3, une autre pour $n = 3$ modulo 4, etc.

Il reste à démontrer la conjecture pour n premier et égal à 1 modulo 24.

Un résultat de Mordell : pour n premier, si $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, alors il existe 4 entiers A, B, C et D, avec A, B, C premiers entre eux deux à deux tels que x = BCD, y = ABDn et z = ACDn.

En conséquence, il reste à démontrer la conjecture pour n premier et égal à 1, 121, 169, 289, 361 et 529 modulo 840.

3.3 *Une identité*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)mn} \quad (1)$$

Sans approfondir ici, il est clair que cette identité n'est pas tombée du ciel, mais est le fruit d'une grande quantité d'algorithmes mis en œuvre ayant deux buts :

1. être efficace : passer de 100 décompositions à la seconde à 20 000 n'est pas anodin.

2. être le plus proche possible d'une preuve avec papier et crayon, l'idée sous-jacente à ces algorithmes et formules ayant été d'éviter le plus possible le recours à la fonction partie entière qui intervient deux fois dans l'algorithme usuel.

Il n'en reste pas moins vrai qu'il m'est difficile de préciser le long cheminement suivi et de dire pourquoi je l'ai écrite ce 13 Août 2009, et généralisée, ce qui m'était évident, dans l'heure qui suivit :

Soient a et b deux entiers, alors pour tout couple d'entiers m et d on a l'identité :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{mb} + \frac{am-1}{mb+d} + \frac{(am-1)d}{(ma+d)mb} \quad (2)$$

3.3.1 *Sur l'identité* (1)

Proposition : Cette identité (1) est équivalente à celle de Mordell.

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{\mathrm{BCD}}+\frac{1}{\mathrm{ABD}n}+\frac{1}{\mathrm{ACD}n} \qquad (3)$$

Pour cela, en suivant une remarque d'un collègue, posons $m = \mathrm{ABD}$ et $d = \mathrm{B}^2\mathrm{D}$ qui divise m^2 dans cette équation. Exprimons A et D en fonction de m, d, B et C :

$$\frac{4}{n}=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}d}+\frac{1}{mn}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}mn},$$

qui se réduit à

$$\frac{\mathrm{C}d}{\mathrm{B}}=\frac{mm+d}{4m-1} \qquad (4)$$

Or B divise $d = \mathrm{B}^2\mathrm{D}$, donc $\dfrac{mn+d}{4m-1}$ est un entier, cqfd.

L'intérêt principal de cette identité (1) qu'il faut lire sous la forme :

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{mn}+\frac{1}{\frac{mn+d}{4m-1}}+\frac{1}{\frac{(mn+d)m}{(4m-1)d}n}$$

est d'obtenir une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions égyptiennes sous la seule condition que $mn + d$ soit divisible par $4m - 1$. D'où des algorithmes efficaces. Un deuxième intérêt est de reformuler la conjecture d'Erdös-Straus sous la forme :

Conjecture 2 : Pour tout nombre premier p il existe un entier m et un diviseur d de m^2 tels que $mp + d$ soit divisible par $4m - 1$.

La validité de cette conjecture (vérifiée en quelques minutes pour $p < 10^9$) entraîne celle d'Erdös-Straus. Cette formulation établit de plus un lien étroit entre décompositions en somme de fractions égyptiennes et une propriété des nombres premiers. A ma connaissance, je n'ai rien remarqué dans la littérature, à propos de cette conjecture; cependant un rapport existe avec les nombres pentagonaux, cf. Sloane A144065 par exemple.

Retour sur le résultat de Schinzel : cette identité (1) donne naissance à plusieurs formules polynomiales pour chaque m et pour chaque d diviseur de m^2, autrement dit à une infinité de formules polynomiales, ainsi, sans contredire ce résultat, on peut espérer prouver la conjecture. On peut exprimer les choses autrement en disant que cette infinité inévitable de formules donne une heuristique à ce résultat de Schinzel.

3.3.2 *L'identité* (1) *et les nombres pentagonaux*

En considérant $m \in \{1, 2, 4\}$ l'identité (1) permet de retrouver le résultat théorique donnant les 6 classes modulo 840 pour lesquelles la conjecture d'Erdös-Straus n'est pas démontrée ; si l'on considère $m \in \{1, 2, 3, 4, 14\}$, alors il ne reste plus que 36 classes modulo $9240 = 11 \times 840$, ce qui améliore beaucoup le résultat précédent (il faut comprendre 14 à travers le fait que $14 \times 4 - 1$ est multiple de 11) ; etc. mais cette piste, très efficace au niveau algorithmique, s'avère vaine pour la preuve de l'existence.

Par contre 24 est le plus grand nombre pour lequel il n'existe plus qu'une seule classe à étudier. Soit donc les nombres de la forme $n = 24k + 1$ et considérons les nombres k pour lesquels il existe m et d (divisant m^2) donnant une décomposition de $4/n$, via cette identité (1). L'expérimentation sur ordinateur montre que ce sont les nombres non pentagonaux, autrement dit les nombres k tels que n ne soit pas un carré. Une piste sérieuse qui conduit à la conjecture :

Conjecture 3 : Pour tout nombre k non pentagonal alors pour $n = 24k + 1$, il existe m et d divisant m^2 tels que $\frac{mn + d}{4m - 1}$ soit un entier.

La validité de cette conjecture entraîne celle d'Erdös-Straus.

3.3.3 *On généralise l'identité* (1)

Pour n admettant un facteur r, en particulier pour $n = 24k + 1$ où k est un nombre pentagonal, il est pratique d'utiliser l'identité suivante qui généralise l'identité de base (correspondant à $r = 1$) :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{\left(m\frac{n}{r} + d\right)r} + \frac{(4m-1)d}{\left(m\frac{n}{r} + d\right)mn}$$

Evidemment cette formule donne une décomposition si r divise n, $4m - 1$ divise $m\frac{n}{r} + d$ et d divise m^2 et donne lieu à un algorithme récursif qui décompose toute fraction $\frac{4}{n}$.

3.3.4 *Pour une fraction* $\frac{a}{b}$

Prenons deux nombres a et b, alors on a l'identité :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{\left(m\frac{n}{r} + d\right)r} + \frac{(4m-1)d}{\left(m\frac{n}{r} + d\right)mn}$$

Cette formule donne une décomposition si r divise b, $am - 1$ divise $m\frac{b}{r} + d$ et d divise m^2 et donne lieu à un algorithme récursif qui décompose toute fraction $\frac{a}{b}$, sauf pour un nombre fini d'entre elles à a fixé, (c'est la conjecture la plus générale).

3.4 *Algorithmes*

Le principe algorithmique est basé sur les identités (1) et (5) ; il nécessite une initialisation qui construit l'ensemble des diviseurs d de m^2. Nous donnons un programme général, écrit en «maple 9» qui fournit la décomposition des fractions $4/n$ en somme de trois fractions égyptiennes. On peut en déduire un algorithme encore plus rapide qui décompose les nombres de la forme $n = 24k + 1$. Ces algorithmes sont l'aboutissement d'une dizaine d'autres, toujours de plus en plus concis, théoriques et efficaces (et qui m'ont permis de mettre en évidence les identités).

Quelques tests laissent envisager que l'on peut battre rapidement le record d'Allan Swett.

3.4.1 *Un programme de décomposition*

```
> with(numtheory):Dm:=[seq(divisors(m2),m=1..10000)]:
                                  #initialisation
  > ErdosStraus:=proc(p)
  local m, d, c; global Dm;
  for m to 3000 do  #début du corps du programme
  for d in Dm[m] do
  if (m*p + d) mod (4*m - 1) = 0 then
  c := (m*p + d)/(4*m - 1);
  return([p, [m*p, c, c*m*p/d], [m, d]]) end if
  end do;
  end do;              #fin du corps du programme
  return(p = echec)
  end proc:
  ErdosStraus(3361); [3361, [84025, 850, 571370],
  [25, 125]]
  ErdosStraus(2031121);
```

[2031121, [1267419504, 507984, 1117758384236], [624, 576]]

3.4.2 *Pour les entiers de la forme* $24k + 1$

Soit p un nombre de la forme $24k + 1$ et m et d (diviseur de m^2) ; dire que $mp + d = 0$ modulo $(4m - 1)$ équivaut à dire que k appartient à un certain ensemble que l'on notera $\mathrm{R}[m]$ dans $\mathrm{Z}/(4m-1)\mathrm{Z}$. Voici une procédure permettant de construire facilement ces ensembles $\mathrm{R}[m]$.

La conjecture d'Erdös-Straus est vraie si les ensembles $\mathrm{K}[m] = \{k \,/\, k \bmod(4m-1) \in \mathrm{R}[m]\}$ recouvrent le complémentaire des nombres pentagonaux.

```
> construitRm24:=proc(m)
  local v,d;global Dm;
  map(v->op(2,op(v)),{seq(msolve((24*k+1)*m+d=0,4*m-1),d=Dm[m])});
  end:
  > R:=[seq(construitRm24(m),m=1..1000)]:
  > R[1..6];
  [{}, {3, 4, 6}, {3, 9, 10}, {3, 4, 8, 9, 13, 14}, {11, 14, 18}, {6, 9, 10, 14, 16, 18, 19, 20, 21}]
```

A partir de là on construit un algorithme encore plus efficace pour donner une décomposition en somme en trois fractions égyptiennes de la fraction $\dfrac{4}{24k+1}$. En particulier pour tout nombre premier inférieur à 10^{11}, on obtient un m inférieur à 1000.

3.4.3 *Le record : la conjecture est vérifiée jusqu'à* 10^{17}

Nous (un collègue de l'université Marc Deléglise et moi-même) ne donnerons pas le détail des environ 200 formules polynomiales, obtenues à partir de l'identité (1) pour éliminer des classes dans $\mathrm{Z}/M\mathrm{Z}$, avec :

$$\begin{aligned} M &= 8 \times 9 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \\ &= 116396280, \end{aligned}$$

qui nous a permis de vérifier la conjecture cet été 2010 pour tout les nombres premiers inférieurs à 10^{17}. (Il a fallu une dizaine de jours d'un puissant ordinateur pour effectuer cette vérification). Il restait 42500 classes environ à examiner dans $\mathrm{Z}/M\mathrm{Z}$, (*i.e.* environ 4 classes sur 10000) ; seuls 76 nombres premiers ont un $m > 3000$ et parmi ceux-ci le plus grand m correspond à $p = 37993089846752881$, avec $m = 5418$ et $d = 2107$.

Pour la conjecture de Sierpinski ($\dfrac{5}{n} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$), la même méthode mais à partir de l'identité (5) et avec $M = 8 \times 9 \times 25 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 29 = 16877460600$ permet de vérifier la conjecture jusqu'à 10^{14} en 40 minutes sur un ordinateur portable !

3.5 *Conclusion de cette narration*

C'est en recherchant des algorithmes de plus en plus efficaces et en cherchant à se passer de la fonction partie entière que petit à petit a émergé l'identité. Mais celle-ci ne semble pas permettre de pouvoir montrer facilement l'existence et donc la conjecture. Il est important de signaler que j'ai volontairement mené cette recherche sans essayer d'avoir recours à la littérature existante que je n'ai examinée qu'une fois l'identité établie.

Par ailleurs, à l'instar des babyloniens (cf. la photo de tablettes datant de 4300 ans environ), j'ai plus été intéressé par la construction d'algorithmes mathématiques que par l'élaboration de preuves.

Puisse cette narration de recherche éclairer un peu des liens qui existent entre l'algorithmie, discipline à part entière avec ses multiples facettes, et les mathématiques ; on peut en particulier penser à un aspect expérimental qui se développe sur des bases algorithmiques.

4. — Conclusion générale

S'il est difficile de comparer les deux processus de recherche, celui des élèves et celui du mathématicien, étant donné que leurs conditions de recherche sont différentes, nous pouvons néanmoins les mettre en perspective. Ainsi, nous exposons quelques éléments de réponse à notre question : *existe-t-il des éléments dans la recherche d'un mathématicien qui pourraient aider et favoriser la recherche mathématique des élèves dans le cadre de la résolution de problème de recherche ?*

Tout d'abord, nous nous penchons sur la place prépondérante de la dimension expérimentale dans les deux processus de recherche. En effet, nous pouvons remarquer que, pour les élèves, c'est ce va-et-vient entre théorie (recherche de preuve) et expérience (essai pour différentes valeurs de n, conjectures...) qui leur a permis d'établir et de démontrer des résultats intermédiaires (par exemple : si n est pair alors la conjecture est vraie). Pour le chercheur, ce sont les allers et retours entre de nombreux algorithmes et la tentative d'une preuve avec papier-crayon qui l'ont conduit à établir la formule (1), résultat phare de ses travaux. Ainsi, nous pouvons conclure que la dimension expérimentale dans la recherche de ce problème, utilisée, certes, avec des outils différents (calculatrice pour les élèves et ordinateur pour le mathématicien), a eu des effets similaires : avancer dans la recherche et établir des résultats intermédiaires sur la conjecture.

Nous pouvons ensuite analyser le rôle des exemples dans les deux processus de recherche. Nous avons pu constater que l'observation et l'exploitation des exemples, dans la recherche des élèves, ont été déterminantes pour la formulation puis la preuve des conjectures. Dans la recherche de Michel Mizony, c'est également l'observation et l'exploitation des nombreux algorithmes qui lui ont permis de trouver la formule (1). Si l'analyse des deux groupes de terminale révèle que ces élèves ont exploité les exemples dans leur recherche, il n'en est pas de même pour tous les groupes de cette classe. En effet, certains élèves n'ont pas réussi à utiliser leurs exemples pour avancer dans leur recherche. Parfois, ces derniers se sont même révélés être des obstacles : « *avec 2 ?* » […] « *ouais mais après il faut le prouver dans le cas général, tu ne vas pas le faire pour chaque* ». Ainsi une première hypothèse en guise réponse à notre question : le questionnement des exemples serait un geste mathématique décisif favorisant la recherche effective d'un problème. Cet « invariant » de la recherche mathématique pourrait ainsi être fondamental à travailler avec des élèves dans le cadre de la résolution de problème.

Enfin, nous pouvons remarquer que Michel Mizony a établi de nombreux liens entre la conjecture d'Erdös-Straus et certaines notions mathématiques, telles que les nombres premiers et les nombres pentagonaux. Cela lui a notamment permis de reformuler la conjecture. Dans sa narration de recherche, il est clair que la restriction de la conjecture aux nombres premiers a été une évidence. D'ailleurs, nous avons observé que cette réduction du problème est établie rapidement par toute personne ayant un certain bagage mathématique. En effet, nous avons mené d'autres expérimentations sur cette situation : avec des élèves (collégiens et lycéens) suivant un club de mathématiques, avec des professeurs de mathématiques en formation continue et avec des jeunes en séjour de vacances « Université d'été mathématique et physique » et nous avons pu remarquer que cette réduction du problème a été établie très rapidement pour la majorité d'entre eux. Concernant les élèves de terminale, l'expérimentation montre que ce lien, lorsqu'il a été établi, a été fait assez tardivement dans leur recherche, après de nombreuses réflexions donc sans être évident, même pour ceux suivant la spécialité mathématique. Grâce aux autres expérimentations, nous avons relevé que les nombres premiers pouvaient intervenir rapidement chez des élèves (de collège et lycée) qui avaient l'habitude de pratiquer une activité mathématique de recherche régulière. Cette observation nous conduit ainsi à une seconde hypothèse : faire des liens entre différentes notions mathématiques, parfois en sortant du domaine de départ serait un geste mathématique favorisant la recherche effective d'un problème.

La mise en perspective des processus de recherche des élèves et du mathématicien nous permet de mettre en évidence *trois éléments qui favoriseraient la recherche effective d'un problème : l'exploitation de la dimension expérimentale, le questionnement des exemples et la création de liens entre différentes notions mathématiques*. Des analyses complémentaires et de nouvelles expérimentations, en classe et hors classe, sur la conjecture d'Erdös-Straus sont en cours dans le cadre de la thèse de Marie-Line Gardes, de même que la poursuite des recherches de Michel Mizony.

Bibliographie

- Aldon, G. Cahuet, P.-Y., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M. et Tardy, C. Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école. INRP, Mars 2010.
- Gardes ML. Étude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème en cours en arithmétique. Mémoire de Master 2 HPDS, Université Lyon 1, 2009.
- Guy R. Unsolved Problems in Number Theory, 3ème édition, Springer, 2003, problème D11, pp 252-262.
- Mordell L.J. Diophantine equations, London, New York : Academic press, 1969, chapter 30.
- Perrin D. L'expérimentation en mathématiques, Revue Petit x n°73, Ed. IREM de Grenoble, France, pp.6-34.
- Schinzel A. On sums of three unit fractions with polynomial denominators. Funct. Approx. Comment. Math. 28 : 187-194, 2000.
- page Internet d'Allan Swett : http://math.uindy.edu/swett/esc.htm.
- page Internet Sloane : http://www.research.att.com/ njas/sequences/A144065.