UN OUTIL POUR ORGANISER L'ANALYSE D'UN SUJET DE MATHEMATIQUES

Christian SILVY
Antoine DELCROIX

Irem des Antilles et de la Guyane
& IUFM de Guadeloupe

La difficulté proposée doit être directement parcourue, en y faisant abstraction de ce que certains de ses termes sont connus et les autres inconnus, et en examinant par intuition la mutuelle dépendance de chacun d'eux par rapport aux autres, grâce aux vrais raisonnements.

R. Descartes (1628), Règles pour la direction de l'esprit [1]

Résumé. Le site mathématique local d'un énoncé d'exercice ou d'un théorème de cours se compose d'un système d'êtres mathématiques (objets, techniques, technologies…) et de relations, enrichis par un substrat, formé d'éléments non mathématisables dans l'institution considérée, dévoilant l'organisation de la question. Ces caractéristiques font que le site local fonctionne comme un écosystème, permettant la compréhension d'activités mathématiques de classe, d'évaluation, ce que nous montrons par l'analyse d'un dossier d'oral 2 du CAPES externe de mathématiques. Ce faisant, il devient un outil du professeur pour guider les élèves dans l'étude d'une question. De plus, comme il révèle les organisations locales en mathématiques, le site peut être utilisé comme un outil de formation professionnelle d'enseignants. Par exemple, il permet de questionner les progressions scolaires ou universitaires reçues, ce que nous discutons sur le cas de la caractérisation d'une fonction constante sur un intervalle par sa dérivée.

I. — Introduction

Depuis l'ère Bourbaki et la « crise des fondements », c'est énoncer une banalité que de dire que tout énoncé mathématique, qu'il soit texte de savoir d'un côté (cours, article de recherche,…) ou bien énoncé d'exercice, de problème de l'autre, contient des implicites [2] de plusieurs types : habitudes de notations (usage des lettres, des symboles,…), conventions, emploi de la langue. (Par exemple « montrer que » ne veut pas dire qu'il y ait quelque chose à désigner, à montrer…) Dans le même temps, le passage sous silence de notions non disponibles à un niveau donné est un besoin vital pour faire des mathématiques : le travail sur les

1 Traduction et notes par J. Sirven (1966), Vrin, Paris, 4e édition.
2 Ces implicites relèvent, dans la théorie anthropologique du didactique, des champs paramathématiques ou protomathématiques, Chevallard (1985).

polyèdres dans l'espace à l'école ne nécessite aucune connaissance théorique sur l'espace ; de même l'étude des fonctions au lycée ne nécessite pas la connaissance de la définition mathématique d'un graphe fonctionnel.

Cependant, ces implicites, lorsqu'il s'agit d'un exercice ou d'un problème, dissimulent souvent des indications précieuses utiles à la résolution : une première lecture experte des énoncés d'exercice suffit parfois pour les révéler et dégager des stratégies à mettre en place pour résoudre le problème posé. Pour dépasser le stade de la lecture experte de ces textes et organiser leur étude, nous proposons d'effectuer leur analyse dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999, 2002) par la construction de leur *écosystème local* ou encore de leur *site mathématique local* (Silvy & Delcroix, 2009). Cet outil reprend l'idée de mise en relation et de hiérarchisation des différents éléments (objets, techniques, technologies,…) du site mathématique envisagé par Duchet et Erdogan (2005) en lui adjoignant un élément complémentaire le substrat composée des choses singulières de l'exercice.

Ce faisant, l'exercice, le problème concerné est replacé dans son écosystème mathématique, épistémologique et scolaire ou institutionnel, montrant les techniques de résolution et ouvrant les questionnements possibles autour de l'énoncé initial. Ainsi, le site local de la question fonctionne comme un outil d'aide à la résolution. Pour les mêmes raisons, le site local d'un texte du savoir (par exemple un énoncé d'un théorème classique) nous semble être un outil utilisable dans la formation des enseignants de mathématiques. En effet, la mise en relation des éléments liés à l'objet étudié crée des cohérences ou des ruptures pouvant expliquer (ou permettre de réfuter) des choix qu'ils soient didactiques, mathématiques ou institutionnels. La structuration de l'analyse par niveaux successifs permet aussi de prolonger la réflexion vers un horizon mathématique ultérieur et de replacer les notions concernées dans l'organisation mathématique.

Après avoir reprécisé quelques éléments sur la notion de site local de la question, nous montrerons une de ses utilisations possibles, l'aide à la préparation d'une épreuve d'oral de concours. Cette première partie de l'étude montrera non seulement un apport direct, en termes d'aide à la résolution du problème mathématique posé, mais également que le site local de la question permet au candidat (et au jury) de cerner les questionnements didactiques posés par ce problème mathématique. Ensuite, nous illustrerons l'intervention possible du site local de la question en formation (mathématique et professionnelle) des enseignants par l'analyse de la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par leur dérivée. Cette étude montrera en particulier que, malgré la relative (mais apparente) trivialité de l'énoncé initial, le site local permet la mise en place de plusieurs questions cruciales, d'une part relevant de l'analyse mathématique et d'autre part relevant de la cohérence des différents curricula proposés par l'institution.

II. — La notion de site local de la question

Les différents éléments estimés pertinents pour l'étude d'une question scientifique peuvent être modélisés comme un écosystème organisé d'êtres (objets, concepts et choses) et de relations nourris par un substrat, partie souvent invisible à première lecture. L'ensemble constitue le site local de la question. Nous allons le décrire plus précisément en nous basant sur l'exemple de la restitution organisée de connaissance de la session 2006 du Baccalauréat série S Antilles Guyane dont nous donnons l'énoncé (figure 1) et le site local (figure 2).

Pré-requis :

1. *La fonction logarithme népérien est dérivable sur]0 ; +∞[et sa fonction dérivée est la fonction inverse* $(x \mapsto 1/x)$
2. *ln(1)=0*

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x, ln(ax) = ln(a)+ln(x)

Figure 1 : restitution organisée de connaissances de la session 2006 du baccalauréat série S Antilles Guyane

Substrat : choses singulières	Objets particuliers	Techniques	Technologie	Concepts
Code : notation fonction Code : usage de l'alphabet en mathématiques Fonction Equivalence Quantificateur **Démonstration** Egalité Stratégie	Intervalle Nombres réels **Propriété de la fonction ln** **Relation fonctionnelle** Somme et composée de fonctions Dérivation	**Caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée.** 2 primitives d'une même fonction sur un intervalle I diffèrent d'une constante Somme et composée de fonctions dérivables	Connexité, propriété de la borne supérieure Dichotomie Axiome de Cantor **Th. des accroissements finis** **Th. de Rolle** Principe de Lagrange Inégalité des Accroissements finis	Homéomorphisme de groupe difféomorphisme de classe C^∞ ***Corps des réels*** Fonction continue de la variable réelle Espace vectoriel des fonctions dérivables

Figure 2 : site local de la restitution organisée de connaissances de la session 2006 du baccalauréat série S Antilles Guyane (D'après Silvy & Delcroix, 2009)

Le site se présente comme un tableau organisant plusieurs champs d'analyse que nous décrivons successivement.

1. Le *substrat* » est formé d'implicites, du « déjà-là », au sens d'éléments manipulés comme des objets plus ou moins familiers, sans questionnement sur leur statut mathématique au niveau considéré. Par exemple, le substrat contient les codages usuels en mathématiques, le vocabulaire de la logique et de la théorie des ensembles non explicité au niveau étudié.

   Ainsi, pour la restitution organisée de connaissances étudiée, l'égalité, les quantificateurs en font partie. Ce substrat peut également contenir des méthodes (au sens usuel) ou des stratégies de démonstration.

2. Le second champ est constitué des objets mathématiques présents dans l'énoncé. Ainsi, les nombres réels, la fonction logarithme constituent des objets dans la restitution organisée de connaissances qui nous sert d'exemple. Ces objets sont en général donnés par une lecture du sujet.

3. Les *techniques* sont les manières de faire permettant d'utiliser les objets comme des outils. Elles sont en général précisées lors de l'élaboration de la solution. Elles sont entendues ici au sens de propriété mathématique, théorème en général. Elles sont des méthodes routinières efficaces et peuvent varier dans les différentes solutions. Dans la restitution organisée de connaissances analysée, la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par leur dérivée est une des techniques possibles.

Nous distinguerons enfin, dans cette restitution, deux strates ultérieures d'analyse également appelées *concepts* par Erdogan (2006) dans la notion initiale de site mathématique.

4. Les *technologies* permettent de justifier les techniques. Il peut s'agir, dans notre exemple, du théorème des accroissements finis qui justifie la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par leur dérivée. Cette strate constitue le premier niveau de théorèmes justifiant les techniques.

5. Les *concepts* constituent un deuxième niveau de notions, ou de théorèmes formant l'armature théorique des *technologies*. Les notions d'homomorphisme de groupe, de difféomorphisme en sont des exemples ici. (En effet, la relation fondamentale du logarithme est un exemple type pour ces notions.)

Remarques

1. Au niveau d'analyse considéré, nous avons choisi de ne pas reprendre dans les concepts, certaines choses singulières du substrat, par souci de lisibilité. Mais, nous restons conscients que, par exemple, le vocabulaire de la logique présenté ici comme « substrat » pourrait devenir concept dans une analyse plus fine qui viserait les méthodes de démonstration en les situant dans la théorie formelle des propositions.

2. Comme on le verra plus loin, le nombre de niveaux d'analyse peut varier selon l'objet mathématique analysé et le degré d'analyse souhaité.

III. — Site local et évaluation des connaissances

Nous avons choisi de nous baser sur une évaluation particulière, celle d'une épreuve orale d'un concours de recrutement de professeurs de mathématiques.

III.1. *L'épreuve d'oral choisie*

Nous nous basons sur le dossier proposé le 3 juillet 2007 à la deuxième épreuve de l'oral du CAPES [3] externe de mathématiques (figure 3). Rappelons que l'objectif central attribué par l'institution aux épreuves orales de ce concours est d'*« évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné*[4] ». La première épreuve est la classique « leçon » tandis que la deuxième épreuve repose sur un bref dossier sur un thème donné comportant un exercice proposé par le jury et un texte indiquant le travail demandé au candidat. Ce travail comprend obligatoirement la recherche d'exercices sur le thème du dossier. Pour chaque épreuve le candidat dispose de 25 minutes d'exposé et de 20 minutes d'entretien avec le jury. Enfin, tous les candidats passant cette épreuve le même jour se voient proposer le même dossier.

Les éléments constitutifs de cette épreuve sont au moins au nombre de trois : la recherche de la solution de l'exercice proposé par le dossier, le choix des exercices et enfin les questions

Figure 3 : dossier du 3 juillet 2007

Thème : Calcul d'intégrales par des méthodes variées

*1. **L'exercice proposé au candidat***

L'objectif de cet exercice est de déterminer une primitive de la fonction ln à partir d'un calcul d'aire. On suppose connue la fonction exp et la fonction ln est définie comme réciproque de cette fonction.

1) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Démontrer que les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

2) Soit x un réel strictement supérieur à 1. En utilisant les courbes représentatives des fonctions ln et exp, calculer $\int_1^x \ln t \, dt$. En déduire une primitive de la fonction ln sur l'intervalle]0,+ ∞ [.

*2. **Le travail demandé au candidat***

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.

Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) énoncer les propriétés utilisées pour résoudre cet exercice ;

Q.2) rédiger pour des élèves de terminale S un corrigé de la question 2).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) sa réponse à la question Q.2) ;

b) d'autres exercices sur le thème « Calcul d'intégrales par des méthodes variées ».

---

3 Certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré.

4 B.O. spécial n°5 du 21 octobre 1993, loc. cité rapport du jury 2007.

Soit $M(x,y)$ un point de la courbe représentative de C_f. On rappelle que

$$M(x,y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I \\ y = f(x) \end{cases}$$

Soit S la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice et soit M' l'image de M par S. On sait que dans un repère orthonormal M' a pour coordonnées (y,x). Or

$$\begin{cases} x \in I \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in f(I) \\ x = f^{-1}(y) \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} y \in f(I) \\ x = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow M'(y,x) \in C_{f^{-1}}$$

Par transitivité de l'équivalence, il vient $M \in C_f \Leftrightarrow S(M) \in C_{f^{-1}}$.

Figure 4 : une correction possible de la première question

du jury. Ces trois difficultés sont renforcées par un temps de préparation limité à deux heures. Nous allons montrer que la construction du site local au travers de l'élaboration d'une solution peut constituer un canevas du travail du candidat attendu par le jury.

III.2. *La construction du site local de l'exercice proposé au candidat*

Comme indiqué dans la partie II, l'inventaire des objets du site se fait lors d'une lecture de l'énoncé. Ainsi, les objets de notre étude sont les suivants : réels, intervalle, fonction continue, fonction réciproque, fonction *exp*, fonction *ln*, primitive, intégrale, courbe, plan et repère orthonormal. Nous allons construire l'essentiel du site local (substrat, techniques et concepts) autour d'éléments de correction commentés de l'exercice. (Voir figure 4 pour la première question.)

On remarque que l'énoncé donne des conditions suffisantes (mais classiques) pour l'existence de la réciproque de *f*, valides pour l'application ultérieure à la fonction logarithme. Ne demandant pas explicitement de justifier l'existence de f^{-1}, l'énoncé laisse implicite la technique[5] justifiant cette existence.

Pour faciliter la lecture, notons D l'ensemble du plan limité par la courbe représentative de la fonction *ln,* l'axe des abscisses et la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(x,0)$ (voir figure 5).

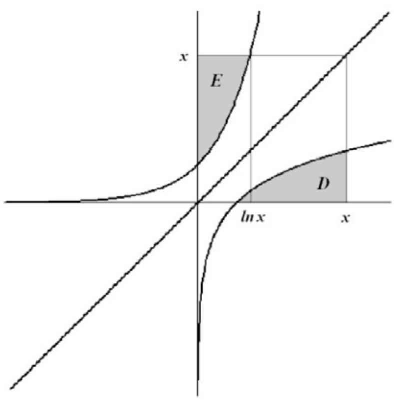

Figure 5 : graphe des fonctions *ln* et *exp*

5 Par exemple, le théorème de bijection suivant : toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur $f(I)$.

On attend du candidat qu'il remarque que

$$A(D) = \int_1^x \ln t \, dt$$

(note au lecteur[6]) et qu'il sache, selon un contrat didactique classique, contextualiser la première question de l'exercice pour calculer $A(D)$. De fait, l'image par S de D est l'ensemble E limité par la courbe représentative de la fonction *exp*, l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0,x)$. Toute réflexion[7] est une isométrie qui – à ce titre – conserve les aires. Ainsi, $A(D) = A(E)$. Or l'aire de l'ensemble E peut s'obtenir par différence entre l'aire du rectangle R de cotés de longueur respective *ln x* et x et celle de l'ensemble G limité par la courbe représentative de la fonction *exp,* l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la parallèle à ce dernier passant par le point (*ln x*,0).

La méthode s'appuie donc sur le concept d'aire vu sous deux entrées, celle de l'aire d'une figure géométrique élémentaire pratiquée par le candidat depuis le primaire et celle de l'aire sous la courbe. Cette notion reste naturelle, au sens de non mathématisée, au niveau étudié, comme la lecture des commentaires du programme le montre : *« Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions; tout développement théorique est exclu »*. La notion d'aire (en tant que telle) reste un des substrats majeurs[8], tandis que les deux entrées évoquées (calcul de d'aire de polygones usuels avec additivité, lien entre l'intégrale et l'aire sous la courbe) ressortent des techniques du site local mathématique de cet exercice.

Pour achever la résolution, la relation d'aires , donne

$$\int_1^x \ln t \, dt = \ln x - \int_1^{\ln x} e^t \, dt .$$

Or : $\displaystyle\int_1^{\ln x} e^t \, dt = \left(e^t\right)_0^{\ln x} = x - 1$, ce qui donne au théorème fondamental du calcul intégral le statut de technique du site local mathématique.

Au final, on obtient :

$$\int_1^x \ln t \, dt = \ln x - x - 1.$$

L'exercice proposé réserve une ultime difficulté. La formule ci-dessus, n'est *a priori* valide que pour x strictement supérieur à 1 compte tenu de la technique de résolution proposée. Mais une simple dérivation permet de montrer que la fonction $x \longmapsto \ln x - x - 1$ est bien une primitive de la fonction ln sur son domaine de définition.

Enfin, l'article indéfini « une » du nom primitive, qui s'oppose à « la primitive », permettant de souligner de façon implicite

6 Le lecteur remarquera l'implicite qui veut que $A(D)$ désigne l'aire de l'ensemble D.

7 La conservation d'aire par symétrie orthogonale est donc une des techniques essentielles du site.

8 Mais la notion d'aire ne reste-t-elle pas à ce niveau que l'on pourrait qualifier de protomathématique dans la plupart des cursus de formation d'enseignants de mathématiques ?

Substrat : choses singulières	Objets particuliers	Techniques	Technologie	Concepts
Transitivité de l'équivalence	Réel Intervalle Fonction continue Fonction réciproque Fonction *exp* Fonction *ln*	Th. de bijection Fonction exp	Th. des valeurs intermédiaires	Corps des réels
Aire d'une partie du plan Implicites langagiers (articles et nombres)	Primitive Intégrale	Th. fondamental du calcul intégral	Caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée Intégrale de Riemann Ensemble quarrable	Intégration
Stratégie	Courbe Plan Repère orthogonal Symétrie	Propriété de l'aire Conservation d'aire par réflexion Forme analytique de la réflexion d'axe la première bissectrice	Isométrie	Espace affine euclidien

Figure 6 : site local de la question élémentaire du sujet [10]

l'existence de plusieurs primitives. Nous classons ainsi articles et nombres [9], ou plus exactement leur usage dans un texte de mathématiques, dans le substrat.

Remarque : La partie b) du travail de rédaction demandé au candidat est un classique des trois dernières sessions du concours. Une réponse peut être obtenue par lecture des rapports du jury précédents ce concours. Cependant il est clair que l'intégration par parties est la technique usuelle pour obtenir une primitive du logarithme népérien.

III.3. *Discussion : l'utilisation du site local*

La cohérence du sujet : Point de vue institutionnel (évolution des programmes)

9 Pour un candidat l'article une de « une primitive » fait référence à la fois à une comme nombre 1 et à une parmi une infinité. Dans un texte de mathématiques, l'article indéfini « un » suivi d'un nom indique qu'on considère un exemple générateur de la catégorie auquel appartient le nom. Par exemple : « un carré dont la longueur du côté mesure trois centimètres », ou – dans le texte de l'exercice – « un intervalle ».

10 La lecture de la partie IV permet de comprendre le raccourci « implicité » par la flèche reliant la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par leur dérivée au corps des réels.

Du point de vue mathématique, la niche de la fonction logarithme se confond avec celle de la fonction exponentielle, comme le montre le site local de la restitution organisée de connaissances de la session 2006 du baccalauréat série S Antilles Guyane (figure 2). Ainsi un idéal (théorique) pourrait sembler être une découverte simultanée par l'élève des deux éléments de ce couple. Cependant l'organisation des connaissances prescrite par l'institution structure dans le temps l'introduction de ces fonctions.

Dans les programmes français précédents celui de 2002, la fonction logarithme est la première fonction nouvelle du programme de terminale. Elle devient donc une technique de l'objet « fonction exponentielle ». Par exemple, le programme de 1971 [11] précise que

« La fonction logarithme népérien est définie sur IR^{*+} *par* $Log\, x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ *; la fonction exponentielle sera obtenue comme réciproque de la fonction logarithme népérien. On justifiera les règles de calcul et l'isomorphisme ainsi établi entre le groupe additif* $(IR^{*+}, +)$ *et le groupe multiplicatif* $(IR^{*+}, \times)$ *».*

Cette organisation s'assouplit dans le programme des années 1990 : *« le mode d'introduction des fonctions ln et exp.* (…) *L'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être admises. En revanche, les propriétés des fonctions ln et exp feront l'objet de démonstrations* [12]*. »*

En revanche, les programmes de 2002 préconisent l'introduction le plus tôt possible de la fonction exponentielle, lui redonnant sa place première rappelée par W. Rudin (1974) : « *c'est sans aucun doute la fonction la plus importante en mathématiques* ». La fonction logarithme népérien n'est plus la première fonction transcendante étudiée en classe de terminale. Par ailleurs, dans les programmes la fonction logarithme peut être introduite de trois manières, présentées dans la figure 7.

Dans le sujet d'oral étudié, le prérequis organise les connaissances du couple

Figure 7 [13] **:** étude des fonctions logarithmes et exponentielles

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN OEUVRE	COMMENTAIRES
Fonction logarithme népérien ; notation ln. Équation fonctionnelle caractéristique. Dérivée ; comportement asymptotique.	On mentionnera la fonction logarithme décimal, notée log, pour son utilité dans les autres disciplines et son rapport avec l'écriture décimale des nombres. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto \ln(1+h)$	Le mode d'introduction du logarithme n'est pas imposé. On peut, pour l'introduire : - soit partir des propriétés des fonctions exponentielles ; - soit poser le problème des fonctions dérivables sur IR+* telles que $f(x\,y) = f(x) + f(y)$ et admettre l'existence de primitives pour la fonction : $x \mapsto 1/x$; - soit traiter le logarithme après l'intégration.

11 Mathématiques, classes de second cycle, ministère de l'Education Nationale, horaires, programmes, instructions, INRDP, 4è trimestre 1971.
12 BO du 12 juin 1997, p18.

13 Extrait du Cédérom mathématiques 2002, accompagnement des programmes, mathématiques, classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale, ministère jeunesse éducation recherche, imprimerie nationale juillet 2002.

ln/exp, selon la première introduction proposée par les commentaires du programme de 2002, celle où l'objet fonction logarithme possède comme technique la fonction exponentielle. Cet exercice joue donc sur les équivalences entre les diverses organisations possibles du couple ln/exp.

La rédaction du prérequis n'est pas d'une rigueur académique, les ensembles de définition, les ensembles image ne sont pas indiqués. Cette indication est fournie habituellement dans les énoncés de terminale pour des raisons d'apprentissage du concept de bijection, complexe pour un élève de terminale. Cette absence, sans aucun doute volontaire, permet au passage d'évaluer une compétence parfois non acquise par les étudiants sortant de licence, comme le montrent les résultats d'un exercice posé pendant quatre ans aux étudiants préparant le CAPES de mathématiques à l'IUFM de Guadeloupe [14].

Construire des réponses au questionnement du jury

Les premières questions posées par le jury ont souvent pour objet de faire préciser aux candidats des éléments de sa prestation. Cette partie, propre à chaque prestation, n'est pas abordée ici. L'objet de ce paragraphe est plutôt une analyse des techniques présentes dans le site local dans le cadre du programme de terminale. Ceci montrera qu'en construisant puis en analysant le site local, le candidat peut effectivement se préparer aux questionnements du jury. Le site local est structuré en trois parties :

- les théorèmes classiques sur les fonctions monotones, continues et dérivables,
- le « chapitre » intégration et notamment le théorème fondamental du calcul intégral,
- La symétrie et ses propriétés.

La première partie occupe une partie importante du programme de terminale et trouve sa pleine expression dans le début du premier cycle universitaire. Elle est donc centrale dans le programme du concours. Sans être exhaustif, nous pouvons préciser quelques questions relatives à la technique présente (un ou l'autre des théorèmes de bijection classiques). Le candidat doit se préparer à discuter les différents objets de cette technique (fonction injective, surjective, ensemble de définition, ensemble image, etc.) De manière concrète, le candidat peut avoir à préciser l'hypothèse donnant l'injection, celle donnant la surjection dans ce théorème. Il aura à faire le lien entre les propriétés de monotonie et d'injection, à examiner certains cas particuliers (par exemple, à préciser l'image d'une application continue strictement monotone sur un intervalle ouvert, un segment). Il peut être confronté à d'autres exemples classiques d'application de ce théorème.

L'interrogation de la technique « théorème fondamental du calcul intégral » induit des questions portant, en premier lieu, sur l'introduction de l'intégrale (en classe de terminale) et, en deuxième lieu, sur la justification de ce théorème (par des concepts issus de la théorie de l'intégrale de Riemann, disponibles dans le cursus du candidat). Les premières questions ramènent à la notion d'aire, composante du substrat. Elles demandent une certaine maîtrise au candidat qui devra « faire la part des choses » en se montrant conscient que cette notion n'est pas mathématisée à ce stade (ni, souvent, dans son cursus). Ces questions ramènent également

14 Cet exercice a pour objectif de résoudre l'équation $\sin x=b$, d'inconnue x. Une première question, bien traitée à 50%, demande de résoudre $\sin x = \sin a$. Pour la résolution de l'équation initiale, l'oubli de l'ensemble image de la fonction sinus fait tomber le taux de succès à moins de 30%. La construction du site de l'équation permettrait de soulever cette question.

au lien entre intégrale et primitive, à l'objet du calcul intégral. (Est-ce de calculer des aires, ou des primitives ?) Le rapport du jury, en indiquant que *« Le lien entre aire, intégrale et primitive a souvent été confus »,* montre que ces questions ont bien été effectivement posées mais aussi qu'elles n'ont pas obtenu de réponses très satisfaisantes. Dans les technologies sous jacentes, la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par leur dérivée (caractérisation des fonctions constantes), permettant de déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction donnée, va être largement abordée du point de vue mathématique dans la partie IV à laquelle nous renvoyons donc.

Le dernier point est celui pouvant donner lieu au questionnement le plus large d'un point de vue curriculaire et mathématique. Pour le premier aspect, le candidat devra être capable de se rappeler que la symétrie est présente dans l'enseignement des mathématiques dès le primaire. Cette notion fait l'objet en terminale, d'un travail spécifique, dans le chapitre des nombres complexes pour le tronc commun, et des similitudes pour la spécialité. Nous ouvrons donc ici une possibilité d'interrogation du site local ouverte sur des questions d'enseignement. Pour le deuxième aspect, la technologie « isométrie » mène à s'interroger sur les propriétés de ces transformations. La technique « forme analytique de la réflexion » présuppose un repère orthonormé dont le commentaire du jury remarque qu'il n'a pas fait l'objet d'un questionnement préalable des candidats : *« L'intérêt du repère orthonormal n'a pas été évoqué de manière spontanée ».*

Certes, cette question ne fait pas l'objet d'étude dans les classes de terminale. Cependant, pendant sa préparation du concours, le candidat doit revenir sur les notions du cycle terminal en créant les liens entre des enseignements situés dans des temps et des systèmes différents. Le site local nous semble être un instrument pertinent par ce tissage et cette hiérarchisation qu'il opère entre des éléments encore isolés pour le candidat. Dans notre cas particulier, l'éclairage, répondant aux attentes insatisfaites du jury, pourra se faire lors du recensement des objets du site local dont le repère orthonormé[15] fait partie.

IV. — Site et formation professionnelle des enseignants : l'exemple de la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par leur dérivée

IV.1. *Motivations*

Cette partie est constituée pour une plus large part de contenus mathématiques, liés à une technologie du début du cycle universitaire. Elle montre que le site peut constituer une base pour un « cours commenté de mathématique » à usage des professeurs-étudiants ou bien de séminaires de formation initiale ou continue. Dans le cadre de l'analyse de sujet d'oral présenté plus haut, une question incidente peut être posée concernant la caractérisation des fonctions constantes définies sur un intervalle par leur dérivée, propriété nommée dans la suite *caractérisation des fonctions constantes*. Nous en rappelons un énoncé.

> **Théorème 1** (caractérisation des fonctions constantes) : *une fonction définie sur un intervalle est constante si, et seulement si, elle est dérivable et de dérivée nulle.*

15 Dans un autre registre, l'énoncé ne mentionne pas explicitement que les courbes représentatives des fonctions f et f-1 sont tracés dans le plan rapporté à ce repère orthonormé. Il serait intéressant d'étudier si une rédaction de l'énoncé levant cet implicite, bien naturel pour alléger la rédaction de l'exercice, aurait amené les candidats à s'interroger sur l'importance de la nature du repère.

Admis en première S, ce théorème est un des piliers de l'analyse de la classe terminale. Utile dans différentes parties du programme (étude de fonctions, primitives, équations différentielles), il en est ainsi un *substrat*. Pour questionner ce substrat, on peut s'interroger sur la « démontrabilité » de cette caractérisation à ce niveau, ou plus précisément, s'interroger sur les techniques, technologies et concepts mis en œuvre dans sa démonstration. L'objectif, que nous situons plutôt dans le cadre de la formation professionnelle des enseignants, est donc double : d'une part compléter la construction de la branche *caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par leur dérivée* des sites locaux précédents (figures 2 et 6) ; d'autre part se questionner sur l'existence d'un système viable ou cohérent pour le programme d'analyse du cycle terminal.

La démonstration de la propriété « f constante entraîne f dérivable et f' nulle » étant considérée comme une conséquence immédiate de la définition de la dérivée, c'est donc essentiellement sur la propriété réciproque que l'analyse porte.

IV.2 *Une démonstration classique de la caractérisation des fonctions constantes*

Pour rendre plus autonome cette partie, nous rappelons la démonstration la plus souvent reprise (du moins à l'heure actuelle) dans les manuels français de première année de licence. Elle repose sur une propriété d'accroissements finis. Comme cette démonstration est aussi un des exemples classiques d'application de l'inégalité ou de l'égalité des accroissements finis dans les oraux 1 du CAPES de mathématiques, on peut y voir une explication de cette prégnance dans les ouvrages.

Dans l'ordre d'exposition d'un cours classique de première année de licence, on commence par les propriétés des fonctions continues dont celle-ci : toute fonction continue g sur un segment $[\alpha, \beta]$ a pour image un segment $[g(a), g(b)]$ (a et b appartenant à $[\alpha, \beta]$), conséquence à la fois du théorème des valeurs intermédiaires et des propriétés plus spécifiques liées à la compacité du segment. En supposant désormais g dérivable, un raisonnement simple montre que la limite du taux d'accroissement $P_M(x) = (g(b) - g(x))/(b - x)$ [16] est nulle en b, pourvu qu'une hypothèse supplémentaire soit faite, comme $g(\alpha) = g(\beta)$. Cette limite étant par définition le nombre dérivée en m, on a démontré le ***théorème de Rolle*** : *soit* $g : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathrm{IR}$ *continue sur* $[\alpha, \beta]$ *et dérivable sur* $]\alpha, \beta[$ *telle que* $g(\alpha) = g(\beta)$. *Il existe c appartenant à* $]\alpha, \beta[$ *tel que* $g'(c) = 0$.

Une transformation géométrique simple permet d'en déduire le ***théorème des accroissements finis*** : *soit* $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathrm{IR}$ *continue sur* $[\alpha, \beta]$ *et dérivable sur* $]\alpha, \beta[$. *Il existe c appartenant à* $]\alpha, \beta[$ *tel que* $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(c)$.

A ce point la démonstration de la caractérisation des fonctions constantes devient une quasi évidence. Pour une fonction f définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, l'application du théorème des accroissements finis à tout couple (α, β) de points de $[a, b]$ donne l'existence de c dans $]\alpha, \beta[$ tel que $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(c) = 0$. Ainsi $f(\beta) = f(\alpha)$ et f est constante sur $[a, b]$.

IV.3. *La place de cette démonstration dans les cursus*

Les éléments précédents montrent la place centrale que cette démonstration occupe dans un cursus mathématique, à l'articu-

16 ou bien de la même manière
$P_M(x) = (g(b) - g(x))/(b - x)$.

lation entre le cycle terminal des études secondaires et le début des études supérieures. Les principales propriétés ou arguments utilisés se situent en effet aux bordures mouvantes du programme des classes scientifiques du lycée, mais font en tout état de cause partie du cursus de l'enseignant de collège ou lycée. L'analyse en termes de site (figure 10) de la caractérisation des fonctions constantes en rend compte. La démarche exposée ci-dessus s'appuie sur le calcul différentiel élémentaire. En l'occurrence, on a utilisé l'égalité des accroissements finis, mais une des formes de l'inégalité des accroissements finis ou le principe de Lagrange auraient suffi. (La figure 8 recense les principales formes de ces propriétés.)

Ces derniers résultats (figure 8) deviennent alors des techniques dont la justification (technologie) est constituée du bloc formé par le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements

Nom du Théorème	Enoncé	Commentaires
Inégalité des accroissements finis (version 1)	***On suppose qu'il existe* k *un réel positif tels que :*** $\forall x \in [a,b] \quad \lvert f'(x) \rvert \leq k$. ***Alors*** $\lvert f(b) - f(a) \rvert \leq k(b-a)$.	Les deux versions figurent dans les programmes de terminale C et S de 1992 à 1999. Leurs démonstrations sont élaborées à partir du principe de Lagrange.
Inégalité des accroissements finis (version 2)	***On suppose qu'il existe* m *et* M *des réels tels que :*** $\forall x \in [a,b] \quad m \leq f'(x) \leq M$. Alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.	
Inégalité des accroissements finis généralisée	Soit $g : [a,b] \rightarrow IR$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $\forall x \in [a,b] \quad \lvert f'(x) \rvert \leq g'(x)$. Alors $\lvert f(b) - f(a) \rvert \leq g(b) - g(a)$.	Forme fréquente dans les ouvrages de classes préparatoires, surtout des années 70-80.
Majoration des accroissements	On suppose qu'il existe M un réel tel que : $\forall x \in [a,b] \quad f'(x) \leq M$ Alors $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.	Rare sous cette forme. La forme fréquente est celle faisant intervenir la valeur absolue.
Principe de Lagrange	*f* est croissante (*resp.* décroissante) si, et seulement si, *f'* est positive (*resp.* négative)	Lien entre le sens de variation et le signe de la dérivée [17].

Figure 8 : les principaux théorèmes en jeu dans la caractérisation des fonctions constantes
N.B. Dans tous les énoncés, f est une fonction définie et continue sur et dérivable sur .

17 Ce principe est un substrat pour l'analyse de terminale. Il est admis en première scientifique depuis 1971 : « *en s'appuyant sur le théorème énoncé sans démonstration, permettant de déduire, du signe de la dérivée, le sens de la variation de cette fonction sur cet intervalle* » (Mathématiques, classes du second cycle, ministère de l'éducation nationale 1971, p. 26). Notons l'exception de la période la décennie 80-90 où ce principe est accessible dans ces classes par le théorème des accroissements finis.

Nom de la propriété	*Enoncé*
Propriété de Bolzano-Weierstrass	De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.
Propriété des segments emboîtés	Une suite décroissante (pour l'inclusion) d'intervalles réels fermés bornés de longueurs tendant vers 0 possède une intersection non vide, réduite à un point.
Propriété de la borne supérieure	Toute partie de IR non vide majorée admet une borne supérieure.

Figure 9 : les propriétés équivalentes du corps des réels mises en jeu dans la caractérisation des fonctions constantes

finis. Un questionnement sur ce bloc montre que les démonstrations de ces propriétés plongent leurs racines dans les propriétés du corps de réels (figure 9), au travers des théorèmes classiques concernant l'image par une fonction continue des intervalles ou des segments.

Nous avons choisi dans le site local de la figure 10 de placer dans la même strate (technologie 1) les propriétés des fonctions de la variable réelle continues ou dérivables, tandis que nous plaçons à un niveau supérieur les propriétés du corps des réels (technologie 2). Ce choix rend bien compte d'une plus grande familiarité des étudiants avec les propriétés des fonctions de la variable réelle qu'avec les finesses topologiques du corps des réels (Rogaslski & alii, 2001). Le parcours au travers du site local a été mis en évidence en gras, tandis que la plupart des autres relations possibles ont été omises dans un souci de lisibilité [18].

IV.4. *Le site local et la (re)mise en évidence des démarches démonstratives*

Ainsi, le site local met bien en évidence le parcours de la démarche classique, centré sur les théorèmes élémentaires du calcul différentiel. Ces derniers (placés dans la strate « technologie 1 »), ont toujours été quasi absents des programmes du secondaire. Seules les techniques sont accessibles, ce qui revient à une des remarques introductives : la pratique des mathématiques à un niveau n oblige à passer sous silence des notions non disponibles à ce niveau, que cette non disponibilité vienne de choix institutionnels, de contraintes épistémologiques ou didactiques. (Comment, par exemple, dans l'espace d'une classe de terminale scientifique se livrer à une construction du corps des réels, qui permettrait la mise en évidence de la strate « technologie 2 » ?)

Mais l'intérêt du site local est également de remettre en valeur d'autres démarches de démonstration de la caractérisation des fonctions constantes [19]. A titre d'exemple, nous en aborderons brièvement une, celle qui consiste à partir de la contraposée de la propriété à démontrer : en supposant f dérivable que se passe-t-il pour si l'on suppose f non constante ? Un raisonnement par dichotomie (voir par exemple : Warufsel & *alii*, 2002), portant sur le taux d'accroissement (où la pente), permet de montrer l'existence d'un point où la dérivée ne s'annule pas. Le processus de dichotomie – équivalent à la propriété des segments emboîtés (voir figure 9) évoquée ci-dessus – devrait donc être considéré comme une technique de cette

18 Les flèches en pointillé et en tiret font l'objet d'une explicitation dans les paragraphes qui suivent.

19 On renvoie à Delcroix & Silvy (2010) pour une description plus exhaustive des démonstrations de la caractérisation FCD

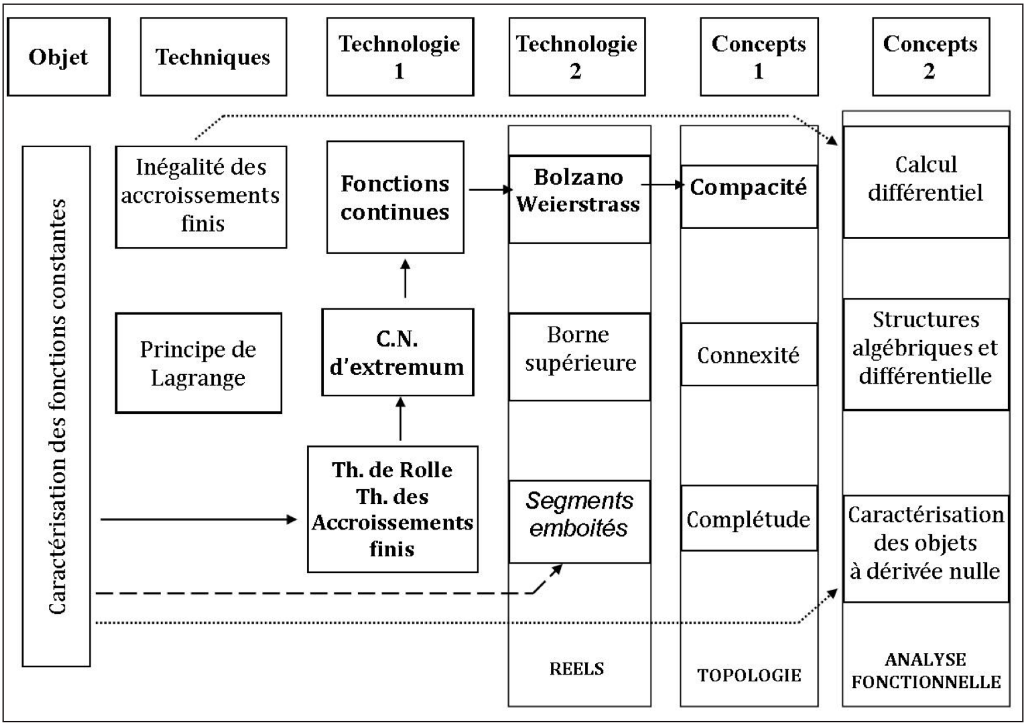

Figure 10 : un site local possible pour la caractérisation des fonctions constantes

démonstration (il n'y a pas d'intermédiaire : c'est le sens de la flèche en tirets de la figure 10). L'analyse du site local (et des cursus) montre que l'accessibilité de cette technique se fait (ou peut se faire) au niveau considéré, les accompagnements des programmes mettant même l'accent sur la technique de dichotomie. Voici donc une démarche démonstrative, que l'on pourrait qualifier de rudimentaire (dans le sens où elle ne fait appel à rien d'autre qu'un mode de raisonnement et à un processus) quasiment située dans l'écosystème du cycle terminal. Elle est, en tout cas, utilisée par des professeurs de classe préparatoire. En revanche, ce qui reste inaccessible à ce niveau c'est la justification de cette technique : l'équivalence des propriétés du corps des nombres réels (technologie 2), les propriétés topologiques (concept 1) sous jacentes.

IV.5. *La mise en relation de la caractérisation des fonctions constantes, du principe de Lagrange et de leurs généralisations*

Le lien immédiat entre le théorème des accroissements finis et le principe de Lagrange (caractérisation du sens de variation d'une fonction par le signe de sa dérivée) que le site local montre mérite d'être souligné. (On démontre facilement que le second est une conséquence du premier.) En effet ces propriétés partagent une technique démonstrative, au point qu'on puis-se se poser la question d'une sorte d'équivalence entre ces deux théorèmes [20]. On rappelle ici également que les conclusions de la caractérisation des fonctions constantes et du principe de Lagrange restent valables sous des hypothèses plus faibles, dans des généralisations exactement parallèles, que nous rappelons ci-dessous. Pour des raisons d'homogénéité de l'exposé, on suppose donnée $f : [a, b] \longrightarrow \mathrm{IR}$ continue. On dispose alors du résultat suivant.

Théorème. *Si le nombre dérivé f'(x) existe sauf, éventuellement, pour les points d'un ensemble dénombrable et s'il est nul (resp. positif) lorsqu'il existe, alors f est constante (resp. croissante).*

Pour la démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur intéressé à Dieudonné (1979). Le théorème est, dans un certain sens, optimal, comme le montre de célèbres exemples comme *l'escalier du diable* (Rudin, 1974)[21]. Si l'ensemble sur lequel *f* n'est pas dérivable n'est pas dénombrable, la conclusion du théorème est mise en défaut.

Notons cependant la proximité de l'étude des généralisations de la caractérisation des fonctions constantes et des conditions sous lesquelles la relation fondamentale du calcul intégral :

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

est vraie. (On peut renvoyer pour cela à Rudin, 1974.) Nous ne poursuivrons pas ici plus loin ces considérations. Ceci nous entraînerait vers la théorie de la mesure qui dépasse le cadre de la présente étude. De la même façon nous n'aborderons pas les cas de constance pour une fonction de la variable complexe holomorphe.

IV.6. *La différence de nature entre la caractérisation des fonctions constantes et le théorème de Lagrange.*

Nous voudrions insister également sur un élément que le site local met en lumière qui est la différence de nature conceptuelle entre l'égalité des accroissements finis et l'inégalité correspondante d'une part et entre le principe de Lagrange et la caractérisation des fonctions constantes d'autre part. L'égalité des accroissements finis et le principe de Lagrange sont des résultats concernant essentiellement les fonctions de la variable réelle. Les deux autres propriétés, quant à elles, vivent dans des horizons plus vastes, que nous avons situées comme strates ultimes du site local. (C'est le sens des flèches en pointillé figurant dans le site local). Nous allons préciser cela pour la caractérisation des fonctions constantes, en renvoyant le lecteur intéressé aux traités de calcul différentiel pour l'inégalité des accroissements finis.

La caractérisation des fonctions constantes s'inscrit dans une question mathématique plus vaste, celle du noyau de l'opérateur linéaire *D* qui à un objet mathématique associe sa dérivée[22]. Cette application *D* est un des premiers exemples d'application linéaire issue d'un cadre non géométrique que rencontre l'élève ou l'étudiant. Elle fournit, de plus, un exemple naturel d'application linéaire pouvant être considérée sur un

20 Cette question est approfondie dans Delcroix et Silvy (2010) et fait notamment intervenir un théorème de Darboux, qui stipule que les dérivées possèdent la propriété des valeurs intermédiaires.

21 Voir également : http://www.mathcurve.com/fractals/escalierdudiable/escalierdudiable.shtml, site consulté le 30 novembre 2009.

22 D'autres objets mathématiques que les fonctions usuelles admettent des dérivées, citons ici les séries formelles, les distributions dont il est question dans le corps de l'article.

espace vectoriel de dimension infinie. Elle est également l'élément premier de la théorie des équations différentielles, puisque la caractérisation des fonctions constantes est la plus simple d'entre elles, en résolvant l'équation. De ce point de vue, cette caractérisation est un peu le *juge de paix*, le test de cohérence des extensions de la notion de dérivée : on attend d'une dérivée D, étendant la dérivée usuelle à un espace E contenant celui des fonctions usuellement dérivables, qu'elle vérifie : $D(f) = 0 \Rightarrow f =$ « constante ».

Rendons cela plus concret en nous appuyant sur quelques exemples. Soit E un espace vectoriel muni d'une dérivée D interne ($D(E) \subset E$) c'est-à-dire d'une opération linéaire ayant les propriétés de la dérivée usuelle des fonctions. Comme déjà indiqué, la caractérisation des fonctions constantes revient à chercher $ker(D)$. On peut introduire le problème de l'existence de primitives pour l'opérateur D c'est-à-dire, étant donné g appartenant à E déterminer s'il existe f dans E telle que $D(f) = g$. C'est donc chercher l'image $Im(D)$ de l'application D.

Exemple : Soit $E = \mathrm{IR}_n[x]$, l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. L'ensemble E est muni de la dérivée usuelle des fonctions que l'on notera D. On sait que $kerD$ est constituée des fonctions polynomiales constantes. C'est la caractérisation des fonctions constantes pour les fonctions polynômes : en admettant qu'on sache dériver une fonction polynôme, le lecteur pourra vérifier que cette caractérisation possède alors une démonstration purement algébrique. De la relation :

$$\dim(kerD) + \dim(ImD) = n + 1 ,$$

on sait que $\dim(ImD) = n$. L'opérateur D n'est donc pas surjectif. Il est trivial, en effet, de vérifier que la fonction polynôme $p_n : x \longmapsto x^n$ n'a pas de primitive (au sens usuel) dans $\mathrm{IR}_n[x]$.

En revanche, si l'on remplace $\mathrm{IR}_n[x]$ par $\mathrm{IR}[x]$, l'ensemble des fonctions polynômes, l'opérateur D est surjectif. C'est aussi le cas en prenant pour E l'ensemble $C^{\infty}(\mathrm{IR})$ des fonctions définies et de classe C^{∞} sur IR[23]. L'analyse moderne a multiplié les exemples où le rôle de test de la caractérisation des objets constants par leur dérivée a été important dans la mesure où pour résoudre le plus de problèmes différentiels possibles il fallait étendre le « réservoir » d'objets dérivables.

Exemple : L'espace vectoriel D'(IR) des distributions de Schwartz constitue un autre exemple d'espace dans lequel tous les objets sont dérivables. Cet espace contient l'espace vectoriel C(IR) des fonctions continues. (En ce sens on rend dérivable les fonctions continues.) La dérivée sur D'(IR) (notée ici d/dx) prolonge la dérivée usuelle, dans le sens suivant : si une fonction f de C(IR) est dérivable, on a $(d/dx)f = f'$. La démonstration de la caractérisation des fonctions constantes est un exercice classique, mais nullement immédiat. (Voir par exemple : Schwartz, 1966 ; Khoan, 1972.)

V. — Conclusion

En prolongement de travaux antérieurs (Silvy & Delcroix, 2009), l'étude conduite ici montre que le site local de la question est un outil précieux pour la résolution, en mettant au jour les « ruses », volontaires ou non, du concepteur du sujet qui cachent (dans un implicite nécessaire) soit des méthodes de résolution, soit des « pièges », ou plutôt des sources de questionnement.

C'est particulièrement le cas dans l'étude du sujet de deuxième épreuve orale de

23 Voici, d'ailleurs, de bons exemples pour illustrer une des différences entre espaces vectoriels de dimension finie ou infinie.

CAPES externe proposée ici où le site local permet de cerner les attentes du jury. Plus précisément, en dégageant certains implicites, éléments du substrat, et en montrant la place du sujet dans l'architecture mathématique, le site local répond à un double objectif : prévoir certaines questions probables sur le sujet, dégager les thèmes sur lesquels doivent porter les exercices que le candidat est invité à proposer. Ainsi, la construction du site local permet une préparation plus fine de l'épreuve et une meilleure gestion du temps imparti à cette préparation. Mais, par un jeu dialectique clair, cette analyse permet aussi au concepteur d'un sujet d'en vérifier la cohérence (mathématique et didactique) par rapport aux objectifs d'évaluation qu'il se fixe.

De plus, dans le cadre de diplômes menant aux métiers de l'éducation et à la formation, la construction de sites locaux peut être un outil précieux de formation mathématique et professionnelle. L'élaboration d'un site local par un « étudiant-professeur » lui donne, comme le montre l'exemple de la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle, l'architecture mathématique du concept étudié. Le site local permet alors de questionner la progression scolaire ou universitaire reçue. En brisant les chaînes entre les savoirs, en établissant des liens neufs, cette étude autodidactique remet aussi en cause la topogenèse du savoir : « *une remise en ordre peut produire des savoirs (comme le montrent par exemple le Séminaire de Bourbaki, ou une nouvelle démonstration d'un théorème connu)* » (Mercier, 2001). Ainsi, le site local est un moteur de formation de l'apprenti-professeur. Par ailleurs, le site local est un outil adapté au travail constituant *« à reprendre, officiellement, au niveau scolaire n+p, les savoirs étudiés au niveau n, pour tenter d'apprendre encore quelque chose de nouveau en utilisant les outils mathématiques formés entre temps. C'était il n'y a guère une pratique courante, qui était même systématique à l'entrée dans un nouveau cycle d'études (Brevet Elémentaire, Troisième, Maths Sup). C'est aujourd'hui une pratique perdue*[24] *(…) »* (Mercier, 2001).

Le site local aide donc à (re)fonder la culture scientifique du futur « professeur-mathématicien ». La caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par leur dérivée

---

[24] A. Mercier poursuit en note : *« De ce fait, je peux quotidiennement constater que le jeune certifié a encore tout à apprendre, sur les mathématiques qui lui ont été enseignées et qu'il devra bientôt transmettre, parce que jamais ses études ne lui ont donné l'occasion de revenir sur ce qu'il savait pour le reconstruire, l'occasion de l'examiner selon la méthode : car souvent il ne sait, des mathématiques de l'école, que ce qu'il savait en " passant de classe ". En particulier, il ne sait pas toujours " faire les exercices " qu'il voudrait poser : il arrive même assez souvent qu'il n'ait jamais su, concernant la trigonométrie, ou la combinatoire, la géométrie dans l'espace ou les statistiques, le calcul barycentrique, la rectitude des droites ou la résolution des équations polynomiales, que ce qu'il faut pour être un élève moyen de la classe où de telles questions sont abordées. »*

montre particulièrement bien ces premiers aspects par l'étendue du champ mathématique embrassé et les implications épistémologiques sous jacentes.

Dans le cadre de la préparation ou de l'analyse d'une activité de classe, le site local rend plus explicite le contrat didactique de l'activité concernée. Ainsi le futur « professeur-concepteur » peut mener une réflexion sur les connaissances et les habiletés nécessaires à la conduite de l'activité. Lorsqu'il s'agit d'une préparation (d'une leçon, d'une activité), le site local devient ainsi un élément d'aide aux choix pédagogiques, par exemple par rapport aux libertés qu'offrent les programmes et l'institution aux enseignants. Lorsqu'il s'agit d'une analyse de pratiques, le site local permet l'explicitation des choix présents dans la séance analysée. Dans un autre ordre d'idées, l'explicitation par le site local des connaissances et habiletés convoquées par une question procure également des éléments au futur « professeur-évaluateur » pour construire des évaluations conformes aux objectifs qu'il se fixe (ou que l'institution lui fixe). Au total, nous pensons que le site local peut donc accompagner l'ensemble des étapes de la formation de l'enseignant, puis de son activité professionnelle.

Bibliographie

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble (2ème édition augmentée : 1991).

Chevallard Y. (1999) *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recherches en didactique des mathématiques. Vol 19, n°2, p. 221-226.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques,* Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Delcroix A. & Silvy C. (2010). Fonction constante et dérivée nulle : un résultat si trivial. *Recherches et Ressources en Education et Formation,* n°3, sous presse.

http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00318449/fr/

Dieudonne J. (1979). *Eléments d'analyse*, Tome 1. Gauthiers-Villars, Paris (3ème édition).

Duchet P. & Erdogan A. (2005). Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis. *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4), Bosch (Ed). Publication électronique 2006.

Erdogan A. (2006). Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques : analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en seconde. Thèse, université de Paris VII.

Khoan V. K. (1972). *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*. Vol. 2. Vuibert, Paris.

Mercier A. (2001). Descartes : le temps de la construction des savoirs. *L'Ouvert* n°104, p28-38. IREM de Strasbourg. http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/104_Mercier.pdf

Rogaslski M., Robert A. & Pouyanne N. (2001). *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie*. Ellipses, Paris.

Rudin W. (1974). *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris.

Schwartz L. (1966). *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris.

Silvy C. & Delcroix A. (2009). Site mathématiques d'une ROC, une nouvelle façon d'interroger un exercice. Annales de Didactique et Sciences Cognitives, vol 14, p.103-122.

Warufsel A., Attali P., Collet M., Gautier C. & Nicolas S. (2002). *Mathématiques cours et analyse : analyse*. Vuibert, Paris.