LA PRISE DE DECISION DE LA SECONDE A LA PREMIERE

Yves DUCEL
Bruno SAUSSEREAU

Irem de Besançon
Université de Franche-Comté

Résumé : *L'objectif de cet article est de montrer comment, grâce à la loi binomiale au programme 2011 de la classe de Première, la notion d'intervalle de fluctuation et la démarche de prise de décision, vues en Seconde sous des conditions de validité portant sur la taille de l'échantillon et la proportion étudiée, peuvent s'étendre au cas d'une proportion quelconque et d'un échantillon de taille quelconque. En arrière plan, on s'attachera à illustrer comment toute prise de décision statistique suppose, en préliminaire à sa mise en œuvre mathématique, une analyse approfondie des enjeux (économiques, sociaux, sanitaires, politiques, …) de la situation étudiée et de la signification réelle des risques encourus.*

La prise de décision apparaît pour la première fois dans le programme de Seconde. La démarche s'appuie sur la notion d'intervalle de fluctuation [1] dont une formulation [2] est proposée sous réserve de satisfaire aux conditions de validité, $n > 25$ et $0{,}2 < p < 0{,}8$ (n est la taille de l'échantillon prélevé et p est la proportion dans la population du caractère étudié). Cependant, les outils mathématiques introduits en Seconde sont limités car l'expression de l'intervalle de fluctuation, utilisée en pratique dans la classe, est obtenue par une approximation et seulement statistiquement [3] valable sous les conditions précisées dans le Programme. De plus, la connaissance de la loi binomiale n'est pas accessible à ce niveau d'enseignement.

Avec la notion de variable aléatoire et la découverte de la loi binomiale, le programme de Première fournit les premiers outils qui permettent, en prenant appui sur la réflexion initiée en Seconde autour de la prise de décision, de construire et d'utiliser un intervalle de fluctuation exact [4], et d'établir une démarche de

1 On ne parlera dans cet article que des intervalles de fluctuation, notion associée à la prise de décision sur la validité d'une hypothèse portant sur une proportion, à ne pas confondre avec les intervalles de confiance, notion associée à l'estimation d'une proportion.

2 Il s'agit de l'expression $\left[p-1/\sqrt{n}, p+1/\sqrt{n}\right]$.

3 Par exemple, pour $n = 30$ et $p = 0{,}55$, on obtient avec la formulation de Seconde, l'intervalle $[0{,}3674 ; 0{,}7326]$. Un calcul direct avec la loi binomiale conduit à $P(0{,}3674 \leq F \leq 0{,}7326) = P(11{,}02 \leq X \leq 21{,}98) 0{,}935 < 0{,}95$.

4 C'est-à-dire obtenu sans avoir recours à des approximations en lois ou des majorations.

prise de décision, valable en toute généralité pour une proportion *p* et une taille *n* d'échantillon quelconques.

Après avoir illustré sur un exemple concret les limites des outils de la Seconde, nous montrerons comment, grâce à la connaissance de la loi binomiale notamment, la réflexion initiée en Seconde sur la prise de décision peut servir de base à la construction de l'intervalle de fluctuation exact qui permettra d'étendre le domaine d'application de cette prise de décision, et de retrouver la formulation vue en Seconde.

Dans la suite de ce document, nous supposons connues la notion de variable aléatoire et celle de loi binomiale.

I – Les limites des outils de la Seconde

Commençons par étudier la situation suivante exploitable en classe de Seconde, extraite du document-ressources des programmes de LP : *Ressources pour la classe Baccalauréat professionnel*, (page 8) :

> Une petite ville des États-Unis, Woburn, a connu 9 cas de leucémie parmi les 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979. La fréquence des leucémies pour cette tranche d'âge aux États-Unis est égale à 0,00052.
>
> (Source : *Massachussetts Department of Public Health*).
>
> Les autorités concluent qu'il n'y a rien d'étrange dans cette ville. Qu'en pensez-vous ?

De façon plus précise, nous allons reformuler la question sous la forme suivante : le nombre de cas observés est-il **significatif** d'une situation anormale pour cette ville ou bien peut-on considérer qu'il est simplement le fruit du hasard ?

Pour mieux faire comprendre le contexte d'expérience aléatoire sous-jacent à cette situation, nous allons la transposer en termes de **schéma d'urne**. Dans la suite, la population des garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979 des États-Unis sera assimilée à une urne contenant 100 000 boules rouges ou vertes :

- les boules rouges, au nombre de 52, représentent les personnes atteintes de leucémie,
- les boules vertes représentent les personnes non atteintes.

Nous considèrerons, en première approximation, que la population des 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979 à Woburn est assimilable à l'observation d'un échantillon (au sens de la définition donnée en Seconde) de 5969 boules, prélevées de façon équiprobable et avec remise dans l'urne.

La question posée relève d'un problème de prise de décision. Nous ne pouvons pas utiliser la démarche préconisée dans le programme de Seconde car les conditions de sa validité ne sont pas satisfaites. En effet ici $n = 5969 > 25$, mais $p = 0{,}00052$ très inférieur à 0,2. En revanche, nous pouvons procéder par simulation sur un tableur.

Nous allons donc estimer par simulation [5] la probabilité P d'obtenir 9 boules rouges lorsqu'on effectue 5969 épreuves de l'expérience aléatoire *Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur*.

5 Dans [2] nous étudierons une progression sur la Troisième et la Seconde permettant d'introduire et justifier la simulation par ordinateur auprès des élèves.

Nombre observé de cas de leucémie	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Une observation = 5969 extractions	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Répétition des observations	47	146	213	216	166	123	50	24	10	4	1	0	0
Fréquences observées dans répétitions	0,047	0,146	0,213	0,216	0,166	0,123	0,05	0,024	0,01	0,004	0,001	0	0
Nombre d'observations effectuées	1000												

Fig. 1 : Simulation du nombre de cas de leucémie sur 1000 échantillons (n = 5969 et p = 0,00052)

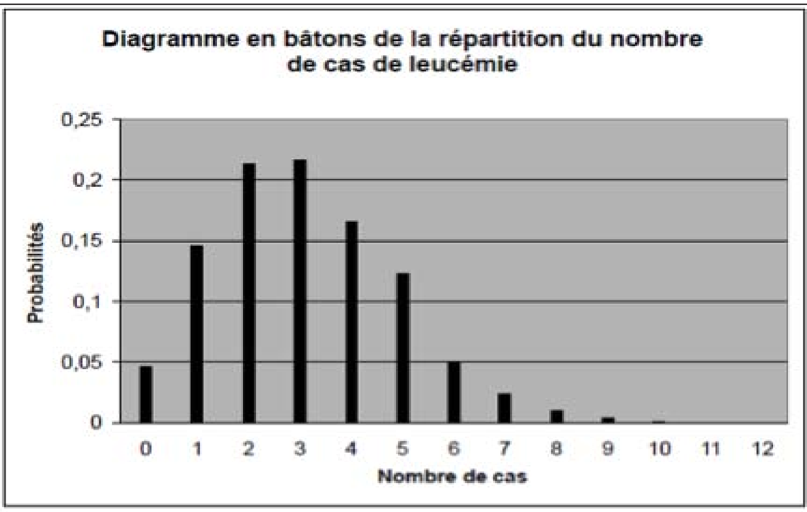


Fig. 2 : Diagramme en bâtons des 1000 observations simulées

Nous reproduisons ci-dessus (cf. Fig. 1 et Fig. 2) les résultats obtenus par simulation de 1000 observations d'un échantillon de taille 5969 d'extraction d'une boule dans l'urne. Sur les 1000 échantillons observés, nous avons obtenu lors de cette simulation : 47 échantillons avec 0 cas de leucémie (boule rouge), 146 avec 1 cas, 213 avec 2 cas, etc. notamment, 4 échantillons avec 9 cas. Ce qui donne une fréquence observée du 9 par simulation de 0,004 que nous pouvons prendre comme estimation de la probabilité *P* cherchée.

En résumé, si la probabilité d'avoir la leucémie dans la population des garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979 de Woburn étaient la même que dans la population analogue de tous les États-Unis, au vu de la simulation, la probabilité d'observer 9 cas à Woburn serait de l'ordre de 0,004, donc très faible. Ce qui laisse penser qu'il y a une **différence significative** entre la réalité observée et ce que l'on attendrait si la situation était "normale" i.e. comme dans tout le pays : on décide que la situation décrite à Woburn est «anormale».

La démarche adoptée ici appelle plusieurs critiques :

- Nous avons utilisé une démarche intuitive dans la prise de décision, mais celle-ci n'est pas vraiment formalisée ni quantifiée.
- La probabilité P est estimée par simulation, mais on ne connaît pas son expression mathématique exacte.
- Nous prenons une décision, mais contrairement à la démarche utilisant l'intervalle de fluctuation, nous n'avons aucune information sur le risque de nous tromper en prenant cette décision.

La méthode vue en Seconde permettrait bien d'évaluer ce risque d'erreur, mais elle ne peut pas être utilisée ici.

Nous allons maintenant montrer comment la connaissance de la loi binomiale va permettre de répondre à ces critiques tout en réinvestissant le travail effectué en seconde. Mais auparavant, revenons à travers un exemple, sur la prise de décision initiée en classe de seconde

II – La prise de décision avec les outils de la Seconde

Rappelons que le programme de Seconde définit l'intervalle de fluctuation (IF) pour une fréquence au seuil 95%. De façon plus précise : Si la taille de l'échantillon n et la proportion p du caractère étudié dans la population vérifient $n > 25$ et $0{,}2 < p < 0{,}8$, la probabilité que la fréquence (empirique) F de ce caractère dans un échantillon de taille n soit dans l'intervalle $\left[p - 1/\sqrt{n}, p + 1/\sqrt{n}\right]$ est supérieure[6] à 0,95 (appelé le **seuil** de l'intervalle et souvent exprimé en pourcentage).

6 On a vu qu'en réalité, ce n'était pas toujours vrai (Cf. note 3 en bas de page 1).

Pour éviter les confusions dans la suite de ce document, l'intervalle $\left[p - 1/\sqrt{n}, p + 1/\sqrt{n}\right]$ sera désigné **IF-Seconde**. Cet intervalle de fluctuation est à la base de la méthode de prise de décision suivante :

On s'intéresse à la proportion p (inconnue) d'un certain caractère dans une population et on souhaite pouvoir décider si $p = p_0$, où p_0 est une valeur de référence donnée. Pour cela, on observe un échantillon de taille n et on détermine la fréquence observée f de ce caractère dans cet échantillon. On applique alors la règle de décision suivante :

- si $f \in \left[p_0 - 1/\sqrt{n}, p_0 + 1/\sqrt{n}\right]$, on décide que $p = p_0$;
- si $f \notin \left[p_0 - 1/\sqrt{n}, p_0 + 1/\sqrt{n}\right]$, on décide que $p \neq p_0$.

En outre, on sait que statistiquement on a (au plus) 5% de chances de se tromper quand on décide que $p \neq p_0$. On dira que la fréquence est la **variable de décision**.

Remarquons que la formulation de l'IF-Seconde est admise en Seconde, éventuellement elle peut être justifiée par des activités de simulation. Les conditions de validité, à vérifier pour l'utiliser, s'expliquent par le fait que cette formulation est obtenue après plusieurs approximations et majorations justifiées uniquement sous ces conditions et pour la seule valeur 95% du seuil. Le seuil 95% est donc figé car lié à cette formulation. On ne peut donc le modifier.

Illustrons cette démarche en l'appliquant à une expérience que Buffon relate dans son *Essai d'arithmétique morale* (1777) : Buffon fait lancer à un enfant 4040 fois une pièce de monnaie. Il obtient 2 048 fois «Pile». La question est de savoir si la pièce utilisée était équilibrée.

On peut considérer que cette expérience constitue une observation d'un échantillon de taille $n = 4040$ dans la population de tous les lancers possibles effectués avec la pièce de Buffon, pour laquelle la proportion p de «Pile» est *a priori* inconnue. Savoir si la pièce de Buffon est équilibrée revient, de façon plus formelle, à se demander si $p = p_0$ avec $p_0 = 0{,}5$. Notons que, cette fois, les conditions de validité de l'utilisation de l'IF-Seconde sont vérifiées : n = 5969 > 25 et $0{,}2 < p_0 = 0{,}5 < 0{,}8$.

L'application de la méthode vue en Seconde conduit à déterminer l'IF-Seconde $\left[p_0 - 1/\sqrt{n}, p_0 + 1/\sqrt{n}\right] = \left[0{,}5 - 1/\sqrt{4040}, 0{,}5 + 1/\sqrt{4040}\right]$ = [0,4843 ; 0,5157] et à vérifier si la fréquence observée, ici $f = 0{,}5069$, appartient à cet intervalle ; ce qui est le cas ici. On décide donc que $p = 0.5$, c'est-à-dire qu'on considèrera la pièce de Buffon équilibrée.

III – Réflexions sur la notion d'intervalle de fluctuation

Nous allons maintenant essayer de prendre du recul par rapport à la démarche de Seconde en considérant le lancer de la pièce de Buffon avec les connaissances et le vocabulaire d'un élève de Première sur les variables aléatoires et la loi binomiale.

Étant donné un entier naturel non nul n et une expérience aléatoire[7] $\mathcal{E}$, convenons de noter pour éviter toute ambiguïté, $\mathcal{E}(n)$ l'expérience aléatoire définie par le protocole suivant : *On effectue n épreuves successives de l'expérience $\mathcal{E}$ et on note, en respectant l'ordre, les issues de ces n épreuves successives*. On dira pour simplifier que $\mathcal{E}$ est l'expérience **de base** (ou **de départ**), et que l'expérience $\mathcal{E}(n)$ est obtenue par n «répétitions» à **l'identique** de l'expérience de départ $\mathcal{E}$.

Dans le cas de la pièce de Buffon, l'expérience aléatoire de départ $\mathcal{E}$: « *Lancer la pièce et noter le côté, 'Pile' ou 'Face', obtenu* », est une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}5$. L'expérience aléatoire attachée à la situation étudiée est l'expérience $\mathcal{E}(4040)$ obtenue par 4040 «répétitions» à l'identique de $\mathcal{E}$. On associe à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}(4040)$ un modèle probabiliste (Ω, P) et la variable aléatoire X qui, à toute issue ω de l'expérience $\mathcal{E}(4040)$, fait correspondre le nombre (entier), noté $X(\omega)$, de 'Pile' obtenus dans l'issue ω. Observer un échantillon de taille n = 4040, comme on vient de le faire, est assimilable à une réalisation de l'expérience $\mathcal{E}(4040)$.

Si la pièce est équilibrée, alors la variable aléatoire X (effectif des "Pile") suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ ($n = 4040$; $p = 0{,}5$). La fréquence aléatoire F des "Pile" dans l'échantillon est alors reliée à X par $X = nF$, ce qui a pour conséquence que le diagramme en bâtons de F a la même allure que celui de X. Traçons celui de X à l'aide d'un tableur (cf. Fig. 3 ci-après).

Ce diagramme est pratiquement symétrique et centré sur l'espérance de la variable X égale à $np = 2020$. Il permet maintenant de représenter graphiquement la règle de décision vue plus haut en partageant l'axe des valeurs possibles de la fréquence F (axes des abscisses) en trois intervalles ($[0, f_a]$, $[f_a, f_b]$ et $]f_b, 1]$) déterminées par les bornes de l'IF-Seconde illustrées dans la figure ci-dessous (cf. Fig. 4). La décision prise est celle indiquée sur la figure dans l'un des trois intervalles où se situe la fréquence observée f dans l'échantillon.

7 Pour une réflexion sur la notion d'expérience aléatoire, on se reportera à [1].

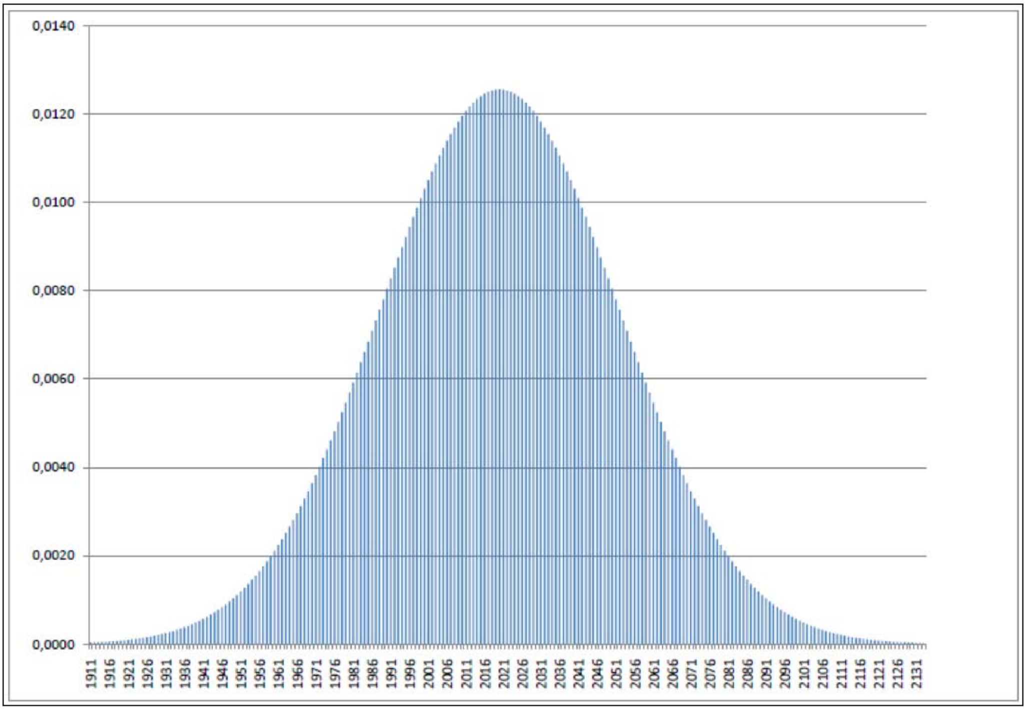


Fig. 3 : Diagramme en bâtons de la loi binomiale pour n = 4040 *et p =* 0,5.

Cette prise de décision repose sur le raisonnement suivant : Si $p = p_0$, on a, statistiquement, en gros au moins 95% de chances que le prélèvement d'un échantillon de taille n conduise à une fréquence F du caractère dans cet échantillon appartenant à l'IF-Seconde $\left[p_0 - 1/\sqrt{n}, p_0 + 1/\sqrt{n}\right]$.

On sait bien que dans ce cas, compte tenu du hasard, la fréquence réellement observée f n'est pas nécessairement égale à p_0 , mais qu'elle **fluctue** dans un voisinage de p_0 appelé justement **intervalle de fluctuation**. Un intervalle de fluctuation est donc un intervalle où on "s'attend" à trouver la fréquence observée f, si l'hypothèse de travail $p = p_0$ est la bonne.

En conséquence, si $p = p_0$, il y a très peu de chances (au plus 5%) que cette fréquence observée f soit hors de l'intervalle de fluctuation. Donc si elle est à l'extérieur de l'IF-Seconde, il est cohérent de penser que ce n'est plus le seul fait du hasard cette fois-ci, mais que c'est bien plutôt le signe que l'hypothèse de travail $p = p_0$ n'est pas la bonne.

Ceci nous amène naturellement à nous intéresser à la zone qui conduit à rejeter l'hypothèse $p = p_0$ On peut rejeter l'hypothèse $p = p_0$

- soit parce qu'on observe *trop* de "Pile" (auquel cas f se situe dans l'intervalle $]f_b, 1]$ à droite de l'intervalle de fluctuation) ce qui laissera penser qu'en réalité $p > p_0$,

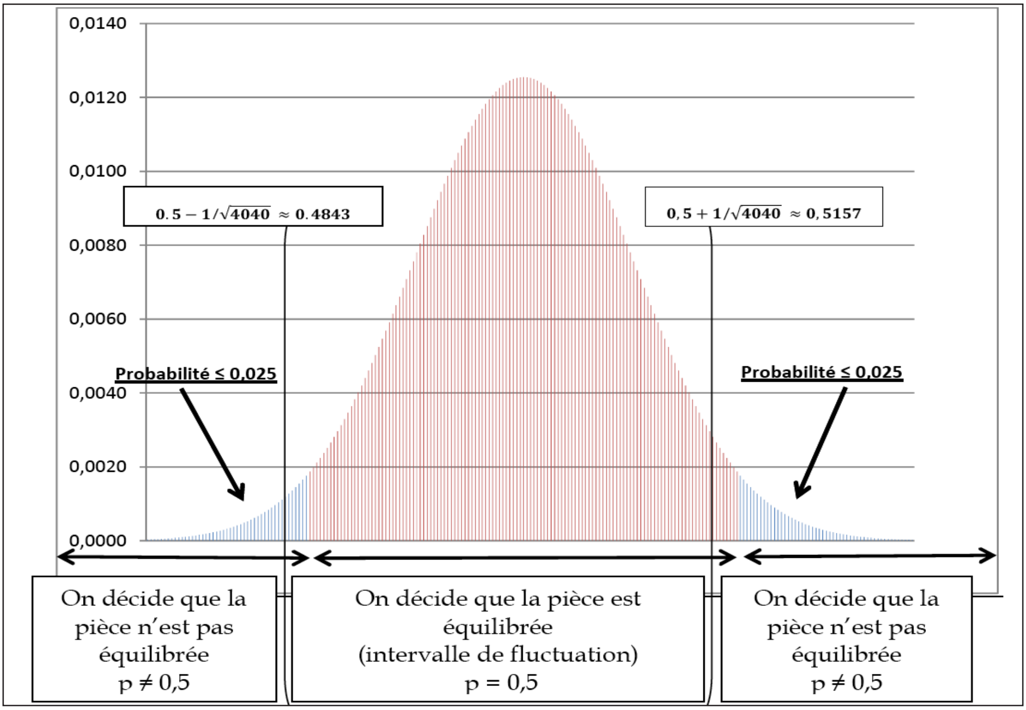


Fig. 4 : Règle de décision avec l'IF-Seconde au seuil de 95%

- soit parce qu'on observe *peu* de "Pile" (auquel cas f se situe dans l'intervalle $[0, f_a[$; à gauche de l'intervalle de fluctuation) ce qui laissera penser qu'en réalité $p < p_0$.

On résumera ces deux cas sous l'écriture $p \neq p_0$. Il est naturel dans la situation du lancer de la pièce de Buffon de prendre en considération une zone de rejet en deux morceaux situés de chaque côté de l'intervalle de fluctuation, ce qu'on traduira en disant que l'intervalle de fluctuation est **bilatéral**.

La question qui se pose est de savoir en-dessus de quelle valeur f_b pour f, on considèrera qu'il y a *trop* de "Pile" et en-dessous de quelle valeur f_a pour f, on considèrera qu'il y a *peu* de "Pile" dans l'échantillon. Une première réponse est donnée dans le programme de Seconde, seulement si $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$ et pour le seul seuil 95% : on prend $f_a = p - 1/\sqrt{n}$ et $f_b = p + 1/\sqrt{n}$.

Les diagrammes en bâtons des lois binomiales pour $n > 25$ et $0,2 < p < 0.8$ sont pratiquement symétriques et centrés sur leur espérance (comme on vient de le voir dans le cas particulier de la pièce de Buffon). Comme la probabilité (souvent dans ce cas appelée **risque**) que F se situe en dehors de l'IF-Seconde est d'au plus 5%, la probabilité que F se situe dans l'intervalle $]\, f_b\, ,\, 1]$ est au plus égale à 2,5%, i.e. $\mathbb{P}(F > f_b) \leq 0,025$. On peut faire la même remarque pour l'intervalle $[0, f_a[$, i.e. $\mathrm{P}(F < f_a) \leq 0{,}025$. On traduira ceci en disant que le risque 5% est **symétrisé**.

En résumé, on voit que l'IF-Seconde est un intervalle $[f_a, f_b]$, pour lequel $\mathrm{P}(F < f_a) \leq 0{,}025$ et $\mathrm{P}(F > f_b) \leq 0{,}025$, qui permet de partager l'axe des valeurs de la variable de décision F en trois intervalles ($[0, f_a[$, $[f_a, f_b]$ et $]f_b, 1]$) indiquant la décision à prendre lorsque la valeur observée de la variable de décision se situe dans l'un d'eux.

Remarquons que rien ne permet d'affirmer que l'IF-Seconde est *le plus petit* intervalle (au sens de l'inclusion) possédant cette propriété. De plus, si l'IF-Seconde est un intervalle centré sur p_0 c'est que, d'une part, les lois binomiales pour $n > 25$ et $0{,}2 < p < 0{,}8$ sont approximées via le théorème-limite central[8] par des lois normales (donc symétriques et centrées sur leur espérance) et que, d'autre part, il a été construit bilatéral avec le risque 5% symétrisé. Mais le fait qu'il soit centré ne joue pas de rôle dans la démarche de prise de décision et n'est pas une caractéristique d'un intervalle de fluctuation.

La relation $X = nF$ permet de se ramener à des écritures avec la variable de décision X : par exemple $\mathrm{P}(F < f) = \mathrm{P}(X < nf)$ et $\mathrm{P}(X < a) = \mathrm{P}(F < a/n)$, pour a et f donnés. On peut donc exprimer l'IF-Seconde également pour la variable de décision X : c'est l'intervalle $[a, b] = \left[n(p - 1/\sqrt{n}), n(p + 1/\sqrt{n})\right]$.

Pour cette variable de décision, l'IF-Seconde est un intervalle[9] $[a, b]$ pour lequel $\mathrm{P}(X < a) \leq 0{,}025$ et $\mathrm{P}(X > b) \leq 0{,}025$, qui permet de partager l'axe des valeurs de la variable de décision X en trois intervalles ($[0, a[$, $[a, b]$ et $]b, n]$) indiquant la décision à prendre lorsque la valeur observée de la variable de décision se situe dans l'un d'eux. C'est sous cette forme qu'il nous sera utile par la suite.

IV - La prise de décision avec la loi binomiale

Pour plus de commodité dans la suite de ce document, nous raisonnerons avec l'effectif aléatoire X plutôt qu'avec la fréquence aléatoire F. Notons que, si k est un entier naturel, $\mathrm{P}(X \leq k) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \ldots + \mathrm{P}(X = k)$. On appellera $\mathrm{P}(X \leq k)$ la **probabilité cumulée jusqu'à l'entier *k***.

Nous allons maintenant exploiter plus à fond la connaissance exacte de la loi binomiale pour transposer la réflexion précédente sur l'intervalle de fluctuation en raisonnant directement sur le diagramme en bâtons avec les valeurs des probabilités cumulées données par le tableur.

1- *Activité Buffon avec la loi binomiale*

La connaissance exacte de la loi binomiale $\mathcal{B}$ ($n = 4040$; $p = p_0$) où $p_0 = 0{,}5$, va nous être utile pour partager l'axe des abscisses du diagramme en bâtons en trois intervalles comme indiqué ci-dessus mais sans utiliser la formulation de l'IF-Seconde.

La variable aléatoire X utilisée est le nombre de "Pile" obtenu sur les 4040 lancers. Elle prend ses valeurs parmi les entiers naturels inférieurs ou égaux à 4040. Nous allons à partir des probabilités cumulées données par le tableur construire *le plus petit* intervalle $[a, b]$ (au sens de l'inclusion) pour lequel $\mathrm{P}(X < a) \leq 0{,}025$ et $\mathrm{P}(X > B) \leq 0{,}025$.

8 Pour une approche élémentaire du théorème-limite central et de la loi normale, on peut se reporter à [3].

9 Il n'est pas nécessairement le plus petit au sens de l'inclusion.

k	...	1911	...	1957	1958	1959	...	1967	1968	1969
P(X=k)	...	0,00003	...	0,00176	0,00187	0,00199	...	0,00313	0,00329	0,00346
P(X≤k)	...	0,03%	...	2,46%	2,65%	2,85%	...	4,93%	5,26%	5,60%

k	...	2071	2072	2073	...	2081	2082	2083	2084	...
P(X=k)	...	0,00346	0,00329	0,00313	...	0,00199	0,00187	0,00176	0,00165	...
P(X≤k)	...	94,74%	95,07%	95,39%	...	97,35%	97,54%	97,72%	97,88%	...

Fig. 5 : Valeurs des probabilités cumulées de la loi binomiale pour $n = 4040$ et $p = 0,5$

La lecture des valeurs données par le tableau ci-dessus (cf. Fig. 5) conduit, pour le seuil 95%, à prendre $a = 1958$ et $b = 2082$, ce qui correspond aux fréquences $f_a = 0,4847$ et $f_b = 0,5153$.

On peut remarquer qu'avec le tableur on peut calculer précisément ce seuil : en effet, on obtient facilement $P(1958 \leq X \leq 2082) = P(X \leq 2082) - P(X \leq 1957) \cong 0,9754 - 0,0246 = 0,9508$, soit plus précisément un seuil de 95,08%.

Par la suite, pour simplifier le propos et être cohérent avec l'usage du mot « seuil » utilisé dans les programmes, nous appellerons cet intervalle **l'IF-exact** [10] **bilatéral** [11] **au seuil 95%**. On peut également vérifier que les bornes a et b de l'IF-exact sont obtenues en prenant le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ (faire attention aux inégalités > et ≥).

En raisonnant avec l'IF-exact bilatéral au seuil 95% suivant la même démarche de prise de décision que celle utilisée en Seconde avec l'IF-Seconde, on peut définir la règle de décision suivante : *Pour décider si $p = p_0$, on prélève un échantillon de taille n et on détermine l'effectif x (nombre de "Pile" dans l'échantillon) observé :*

- *si $x \in [a, b]$, on décide que $p = p_0$;*
- *si $x \notin [a, b]$, on décide que $p \neq p_0$.*

Par construction de l'IF-exact, on peut affirmer qu'on a exactement (au plus) 5% de chances de se tromper quand on décide que $p \neq p_0$.

Dans le cas présent, comme la valeur observée de X est $x = 2048$ et que $x \in [1958, 2082]$, on décidera que la pièce est équilibrée. La règle de décision est illustrée par la figure ci-après (cf. Fig. 6).

Notons que, suivant le même principe, on peut maintenant facilement définir un intervalle de fluctuation bilatéral à risque symétrisé pour une valeur du seuil différente de 95%.

A titre d'exemple, traitons le cas d'un seuil à 90%. Il s'agit donc de construire *le plus petit* intervalle $[a, b]$ (au sens de l'inclusion) pour lequel $P(X < a) \leq 0,05$ et $P(X > b) \leq 0,05$. La lecture des valeurs données par le tableau conduit, pour ce nouveau seuil 90%, à prendre $a = 1968$ et $b = 2072$, ce qui correspond cette fois-ci aux fréquences $f_a = 0,4871$ et $f_b = 0,5129$. La décision prise avec le seuil 90%, serait la même : la pièce est équilibrée.

10 L'adjectif « exact » signifie que l'intervalle est calculé directement à partir de la loi binomiale sans avoir recours aux approximations, alors que l'IF-Seconde est le résultat d'un approximation de la loi binomiale par une loi normale, suivie d'un recours à la majoration $p(1 - p) \leq 0,25$, pour tout $0 < p < 1$.

11 Pour un intervalle bilatéral, le risque sera toujours supposé symétrisé.

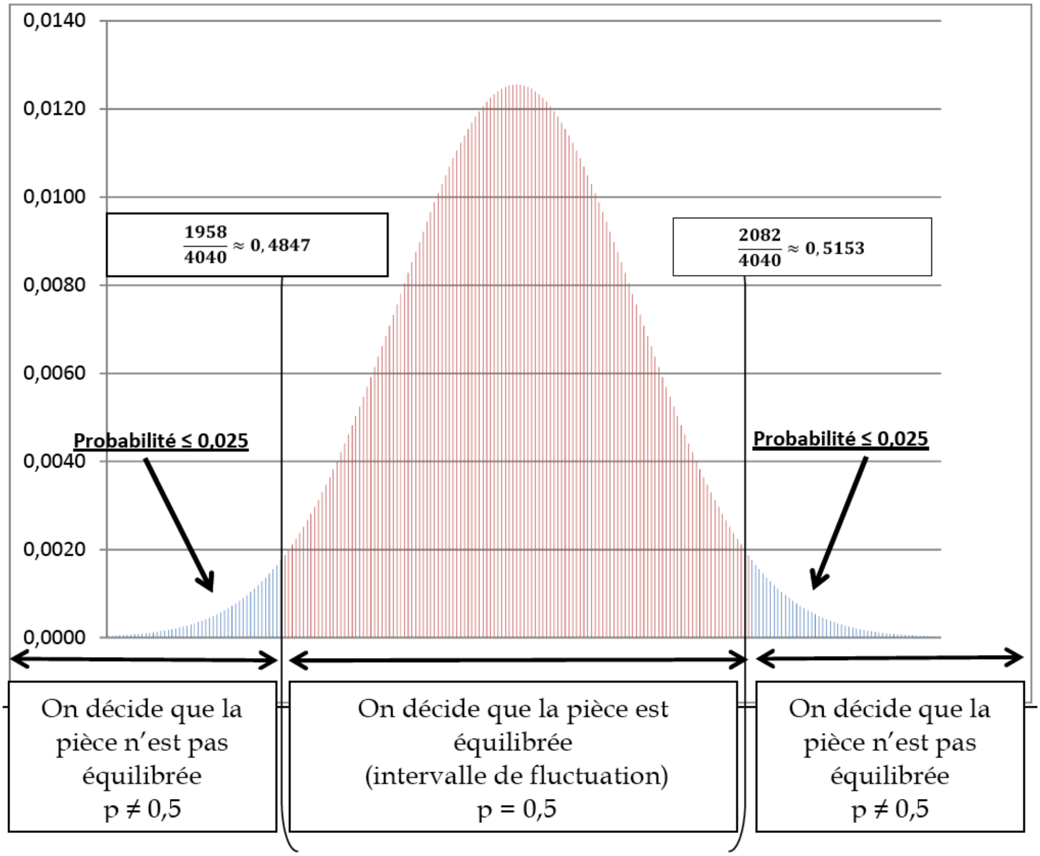


Fig. 6 : Règle de décision avec l'IF-exact bilatéral au seuil de 95%

IF bilatéral	Effectif	Fréquence	Seuil 95%
Borne inf	1958	0,4847	IF exact
Borne sup	2082	0,5153	
p-1/racine n	1956,44	0,4843	IF Seconde
p+1/racine n	2083,56	0,5157	

F observé	0,5069
X observé	2048

IF bilatéral	Effectif	Fréquence	Seuil 90%
Borne inf	1968	0,4871	IF exact
Borne sup	2072	0,5129	

Fig. 7 : IF-exact bilatéral et IF-Seconde au seuil 95% ; IF-exact bilatéral au seuil 90%

Nous avons rassemblé dans les tableaux ci-dessus (cf. Fig. 7) les valeurs des bornes des différents intervalles de fluctuation trouvés ; il est intéressant de comparer les IF-Seconde et IF-exact, et les règles de décision correspondantes :

- L'IF-exact bilatéral pour X, [1958 ; 2082] (resp. pour F, [0,4847 ; 0,5153]) est obtenu par un calcul exact à partir de la loi binomiale [12]. Il est centré sur la valeur $np_0 = 2020$ (resp. $p_0 = 0{,}5$).

- L'IF-exact [0,4847 ; 0,5153] obtenu ici est strictement inclus dans l'IF-Seconde [0,4843 ; 0,5157]. Mais il est très proche de l'IF-Seconde.

- Les deux méthodes de prise de décision (avec IF-exact et IF-Seconde) conduisent ici pratiquement à la même décision.

- Si la valeur observée de la variable de décision est très près des bornes (par exemple si x = 1957), c'est l'IF-exact (et non l'IF-Seconde) qu'il faut utiliser pour décider.

Construit par des calculs exacts (i.e. ne faisant pas appel à des approximations) et avec les outils de la classe de Première, l'IF-exact généralise la notion d'intervalle de fluctuation définie en classe de Seconde. En même temps, sa construction valide mathématiquement *a posteriori* la formulation de l'IF-Seconde lorsque $n > 25$ et $0{,}2 < p < 0{,}8$.

2- *Activité Woburn avec la loi binomiale*

Nous allons réinvestir le raisonnement élaboré dans le sous-paragraphe précédent pour répondre de façon plus rigoureuse et structurée à la prise de décision sur le nombre de cas de leucémie présentée dans le premier paragraphe de ce document.

D'après le schéma d'urne adopté, l'expérience aléatoire de départ $\mathcal{E}$: « *Extraire une boule de l'urne et noter sa couleur* », est une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}00052$. L'expérience aléatoire attachée à la situation est l'expérience $\mathcal{E}(5969)$ obtenue par 5969 «répétitions» à l'identique de $\mathcal{E}$. On associe à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}(5969)$ un modèle probabiliste $(\Omega, \mathbb{P})$ et la variable aléatoire X qui, à toute issue ω de l'expérience $\mathcal{E}(5969)$ fait correspondre le nombre (entier), noté $X(\omega)$, de boules rouges obtenues dans l'issue ω. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5969 ; p)$ où p est inconnu.

a) La situation est-elle normale à Woburn ?

Se poser la question de savoir si la situation est normale à Woburn, revient à se demander si l'échantillon observé peut être considéré comme issu d'une population pour laquelle la proportion de cas de leucémie est $p = 0{,}00052$ comme dans tout le pays. Dans le cas contraire on sera amené à considéré que $p \neq 0{,}00052$.

Nous sommes dans une situation tout à fait analogue, sur le plan mathématique, à celle de la pièce de Buffon. Mais, contrairement à la pièce de Buffon où nous pouvions utiliser l'IF-Seconde et l'IF-exact pour décider, nous ne sommes plus, dans la situation Woburn, dans les conditions de validité de l'IF-Seconde. En revanche la construction de l'IF-exact mise en place pour la pièce de Buffon, elle, est possible pour toute loi binomiale de paramètres n et p quelconques.

La figure ci-après (cf. Fig. 8) représente le diagramme [13] en bâtons de la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5969 ; p = 0{,}00052)$, car on raisonne sous l'hypothèse de travail que la situation est normale à Woburn, c'est-à-dire que $p = 0{,}00052$.

12 Rappelons que l'IF-Seconde est obtenu par diverses approximations et majorations (Cf. note 1 du bas de la page 7).

13 Ce diagramme (Fig. 8) n'est pas obtenu par simulation mais par calcul en utilisant la fonctionnalité LOI.BINOMIALE du tableur. En revanche le diagramme de la figure 2 peut être considéré comme une simulation du diagramme en bâtons de la figure 8.

k	P(X=k)	P(X≤k)
0	0,0448	0,0448
1	0,1392	0,1841
2	0,2162	0,4003
3	0,2237	0,6240
4	0,1736	0,7976
5	0,1077	0,9053
6	0,0557	0,9610
7	0,0247	0,9857
8	0,0096	0,9953
9	0,0033	0,9986
10	0,0010	0,9996
11	0,0003	0,9999
12	0,0001	1,0000
13	0,0000	1,0000
14	0,0000	1,0000
15	0,0000	1,0000
16	0,0000	1,0000
17	0,0000	1,0000
18	0,0000	1,0000
19	0,0000	1,0000
20	0,0000	1,0000
21	0,0000	1,0000
22	0,0000	1,0000
23	0,0000	1,0000
24	0,0000	1,0000
25	0,0000	1,0000
⋮	⋮	⋮

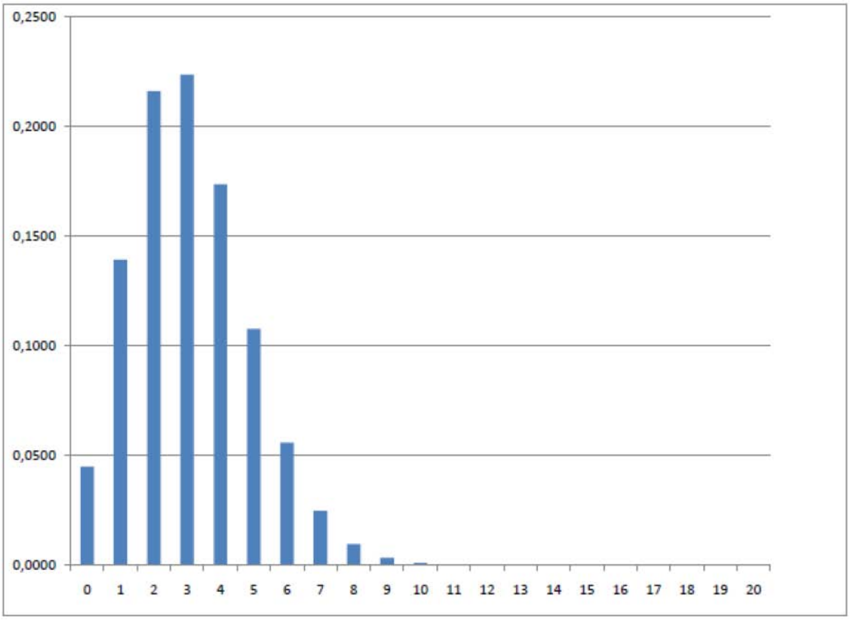


Fig. 8 : Diagramme en bâtons et probabilités cumulées de la loi binomiale pour n = 5969 *et p =* 0,00052

Un raisonnement analogue à celui fait pour la pièce de Buffon conduit à un IF-exact bilatéral au seuil 95% égal à [0 ; 7], et un IF-exact bilatéral au seuil 90% égal à [1 ; 6], pour la variable de décision *X*. Les fréquences correspondantes sont données dans le tableau (cf. Fig. 9) ci-dessous.

On remarquera que l'IF exact bilatéral [0 ; 0,0012] au seuil 95% trouvé ici est extrêmement différent de l'IF-Seconde :

$$\left[p_0 - 1/\sqrt{n}, p_0 + 1/\sqrt{n}\right] = \left[0{,}00052 - 1/\sqrt{5969} ; 0{,}00052 + 1/\sqrt{5969}\right]$$
$$= [-\,0{,}0124 ; 0{,}0135]$$

Il est clair que l'IF-Seconde n'est pas du tout adapté au contexte de cette situation, ni aux conditions de l'observation, pour prendre la décision.

Les règles de décision correspondant à chacun des intervalles de fluctuation de seuils respectifs 95% et 90% sont représentées dans les deux figures ci-après (cf. Fig. 10 et Fig. 11).

IF bilatéral	Effectif	Fréquence	Seuil 95%
Borne inf	0	0,0000	*IF exact*
Borne sup	7	0,0012	
p-1/racine n	-74,16	-0,0124	*IF Seconde*
p+1/racine n	80,36	0,0135	

IF bilatéral	Effectif	Fréquence	Seuil 90%
Borne inf	1	0,0002	*IF exact*
Borne sup	6	0,0010	

Fig. 9 : IF-exacts bilatéraux aux seuils 95% et 90%

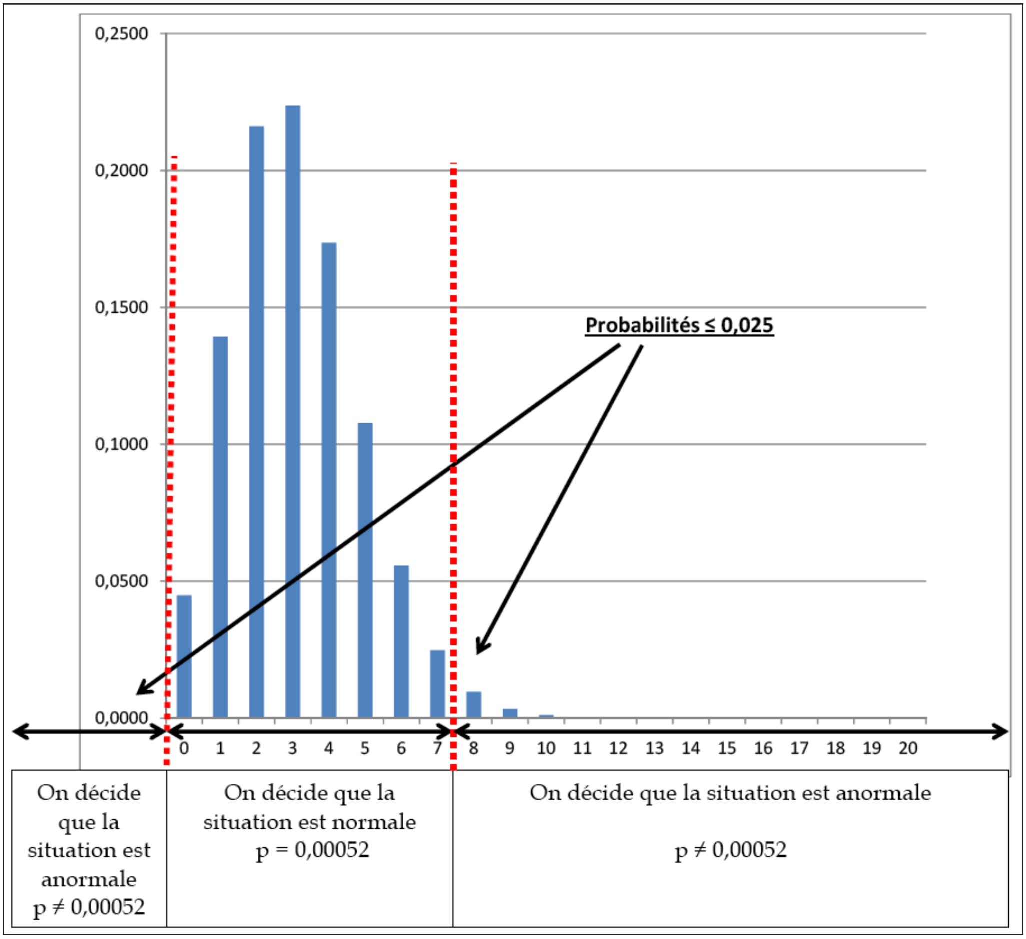
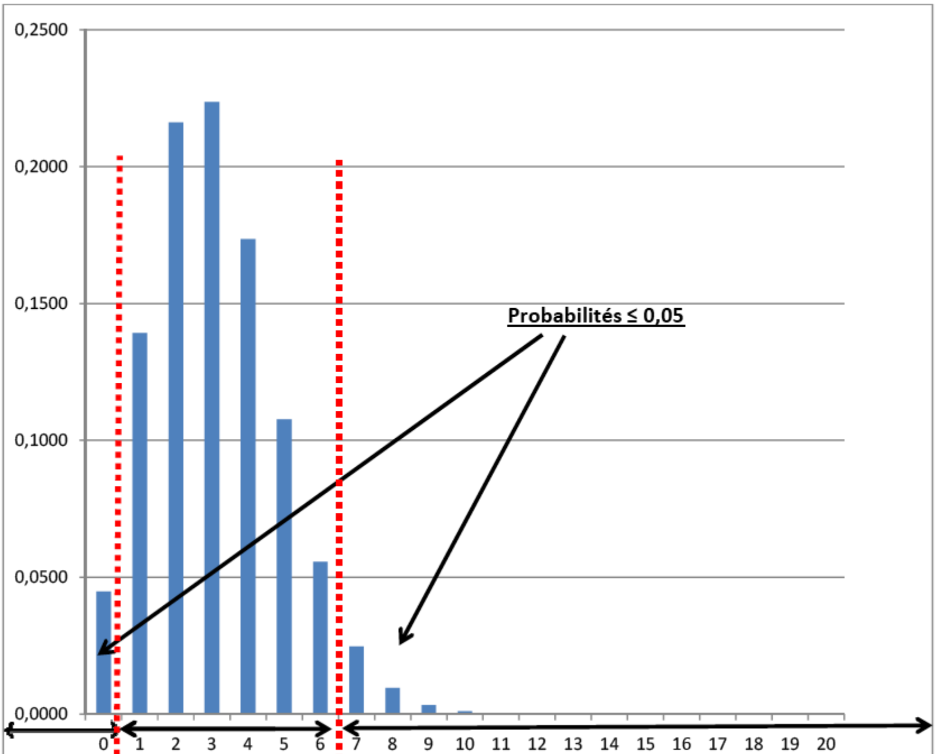


Fig. 10 : Règle de décision avec l'IF-exact bilatéral au seuil de 95%

Dans les deux cas, comme l'effectif observé est $x = 9$, on est conduit à décider que le nombre de cas de leucémie observé est anormal pour une proportion de référence $p = 0{,}00052$ valable pour tout le pays.

Le traitement mathématique est analogue à celui de la pièce de Buffon comme nous l'avons remarqué. Cependant si on prend en compte la signification réelle de la situation nous sommes amenés à modifier le regard que nous avons sur ces deux situations. La pièce de Buffon est une situation purement intellectuelle où la logique conduit à mettre sur le même plan, en cas de rejet de l'hypothèse $p = 0{,}5$, le cas $p > 0{,}5$ et celui $p < 0{,}5$.



On décide que la situation est anormale p ≠ 0,00052	On décide que la situation est normale p = 0,00052	On décide que la situation est anormale p ≠ 0,00052

Fig. 11 : Règle de décision avec l'IF-exact bilatéral au seuil 90%

Il en est tout autrement dans la situation de Woburn où il s'agit d'un problème réel qui touche à la santé publique. En cas de rejet de l'hypothèse $p = 0{,}00052$, le cas $p < 0{,}00052$ signifie, certes que la situation est anormale, mais concrètement qu'il y a, toute proportion gardée, moins de cas de leucémie que dans le reste du pays. Ce qui est une bonne chose en soi et peut rendre la ville de Woburn agréable à vivre et attractive. En revanche le cas $p > 0{,}00052$ signifie également que la situation est anormale, mais concrètement qu'il y a, toute proportion gardée, plus de cas de leucémie que dans le reste du pays. Ce qui rend la ville de Woburn plus dangereuse à habiter qu'ailleurs.

On voit ainsi que les enjeux ne sont pas les mêmes des deux côtés de l'intervalle de fluctuation. Aussi, plutôt que de se demander si la situation est normale, ce qui formellement revient à trancher entre les hypothèses $p = p_0$ et $p \neq p_0$, il vaut mieux se demander si la situation à Woburn ne serait pas, au vu du nombre de cas observé, plutôt dangereuse pour la santé publique.

b) La situation est-elle dangereuse pour la santé à Woburn ?

Compte tenu des enjeux, c'est plutôt la question sur la dangerosité de la situation qui est pertinente dans le cas de Woburn. Il s'agit de trancher entre l'hypothèse « *La situation n'est pas dangereuse* » ce qui formellement s'écrira $p \leq p_0$, et l'hypothèse « *La situation est dangereuse* » ce qui formellement s'écrira $p > p_0$, avec $p_0 = 0{,}00052$.

Pour statuer, traçons le diagramme en bâtons la variable X de loi binomiale pour $n = 5969$ et $p = 0{,}00052$. Si le nombre de cas observé x est faible, il n'y aura pas lieu de penser à un danger. En revanche, si le nombre de cas observé x est très élevé, il y aura lieu de penser à un danger. Mais on sait que si $p = 0{,}00052$, on peut quand même avoir des échantillons pour lesquels la valeur observée x de X est relativement élevée. La question est de déterminer une valeur b au-delà de laquelle on estimera que la valeur élevée de x n'est plus le fruit de la fluctuation due au hasard, mais est plutôt révélatrice d'une situation dangereuse.

L'idée est de partager l'axe de valeurs de la variable de décision X seulement en deux intervalles, $[0\ , b]$ et $]b\ , n]$, au lieu de trois comme dans les prises de décision précédentes. Tant que la valeur x observée sera proche de 0 (i.e. dans $[0\ , b]$), il n'y aura pas lieu de déclarer la situation dangereuse. Au-delà de b, c'est-à-dire si x est dans $]b\ , n]$, on déclarera la situation dangereuse. Dans cette approche, $[0\ , b]$ sera l'intervalle de fluctuation. On parlera alors d'intervalle de fluctuation **unilatéral**. Si on fixe le seuil à 95%, b sera choisi pour que $[0\ , b]$ soit le plus petit intervalle tel que $\mathrm{P}(X > b) \leq 0.05$.

La lecture des probabilités cumulées de la loi binomiale pour $n = 5969$ et $p = 0{,}00052$ (cf. Fig. 8) donne $b = 6$. Ce qui conduit, comme $x = 9$, à décider que la situation est dangereuse pour la santé à Woburn.

De plus par construction de l'intervalle de fluctuation $[0\ , 6]$, on peut affirmer qu'en prenant cette décision on a moins de 5% de chances de se tromper. Plus précisément, la probabilité de décider que la situation est dangereuse, alors qu'elle ne l'est pas, est égale à $\mathrm{P}(X > 6) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 6) = 1 - 0{,}9610 = 0{,}0490$, soit 4.9%.

La règle de décision est représentée graphiquement par la figure de la page suivante (cf. Fig. 12). Les bornes des IF-exacts bilatéral et unilatéral au seuil 95% sont rassemblées dans le tableau de la figure 13.

c) Commentaires

Alors que les autorités locales et les experts gouvernementaux ont conclu, dans un premier temps, qu'il n'y avait rien d'étrange dans le nombre de cas de leucémie observé, à la suite d'actions et d'études entreprises par les familles avec leurs propres experts, le Département de Santé Publique du Massachusetts a officiellement confirmé en avril 1980 que le taux de leucémie constaté était anormalement élevé. La recherche des causes a conduit à soupçonner l'eau de la ville polluée par le trichloréthylène. Cette petite histoire illustre bien les enjeux de la démarche statistique.

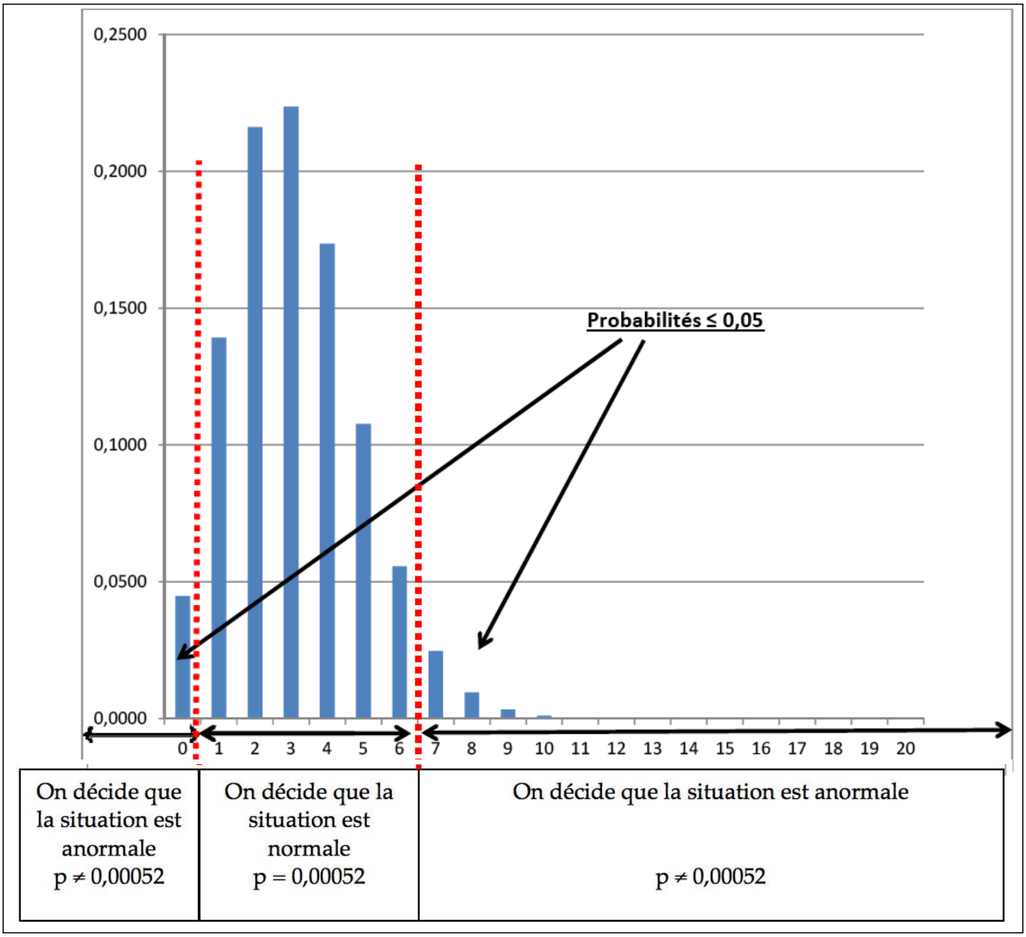


Fig. 12 : Règle de décision avec l'IF-exact unilatéral au seuil 95%

IF unilatéral	Effectif	Fréquence	Seuil 95%
Borne inf	0	0,0000	*IF exact*
Borne sup	6	0,0010	

IF bilatéral	Effectif	Fréquence	Seuil 95%
Borne inf	0	0,0000	*IF exact*
Borne sup	7	0,0012	
p-1/racine n	-74,16	-0,0124	*IF Seconde*
p+1/racine n	80,36	0,0135	

Fig. 13 : Comparaison des IF-exacts bilatéral et unilatéral au seuil 95%

On a vu dans cet exemple qu'une même situation peut donner lieu à plusieurs questionnements possibles et, en conséquence, à des traitements mathématiques différents :

- Soit on souhaite décider entre *La situation est normale* (i.e. $p = 0.00052$) et *La situation n'est pas normale* (i.e. $p \neq 0.00052$) : le risque est à prendre en compte des deux côtés de l'IF, ce qui conduit à un IF bilatéral.
- Soit on souhaite décider entre *La situation présente un danger pour la santé* (i.e. $p > 0{,}00052$) et *La situation ne présente pas un danger pour la santé* (i.e. $p \leq 0{,}00052$) : le risque est à prendre en compte d'un seul côté de l'IF, ce qui conduit à un IF unilatéral.

Dans les deux cas les calculs sont effectués avec $p = 0{,}00052$ et la variable de décision utilisée, $X = nF$, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5969 ; p = 0{,}00052)$.

Concernant par exemple la situation à Woburn, comme l'observation donne $x = 9$, on décidera que la situation est, avec le même seuil 95%, anormale en utilisant l'IF bilatéral, et dangereuse en utilisant l'IF unilatéral. Mais si l'observation avait donné $x = 0$ ou $x = 7$, on aurait été amené à déclarer la situation anormale avec l'IF bilatéral au seuil 90%, mais normale avec l'IF bilatéral au seuil 95%. De même, avec le même seuil 95%, si l'observation avait donné $x = 7$, on aurait été amené à déclarer la situation normale en utilisant l'IF bilatéral, mais dangereuse en utilisant l'IF unilatéral.

On voit bien que le choix de la question à poser (*La situation est-elle normale ? La situation présente-t-elle un danger pour la santé* ?), le choix du seuil (90% ou 95% par exemple), la forme de l'intervalle de fluctuation (bilatéral ou unilatéral) vont influer sur la règle de décision à adopter, et par conséquent sur la décision elle-même.

Dans une démarche de prise de décision, il est donc nécessaire de clarifier en premier lieu le choix des hypothèses pour formaliser un questionnement qui, lui-même, dépend des préoccupations du décideur liées aux enjeux (économiques, sociaux, sanitaires, politiques, …) de la situation. Le seuil devra également être défini en amont de la mise en forme mathématique. Ce choix des hypothèses déterminera ensuite la forme de l'intervalle de fluctuation à utiliser. Il est donc nécessaire de veiller à ce que la forme de l'intervalle de fluctuation utilisé soit toujours en cohérence avec le questionnement naturellement induit par la situation concrète.

Dans la réalité, toute prise de décision statistique suppose, en préliminaire à la mise en œuvre mathématique, une analyse approfondie de la signification concrète des risques encourus qui ne peut être que le fruit d'une concertation interdisciplinaire entre les divers acteurs professionnels (dont le statisticien n'est qu'un des éléments) concernés par cette prise de décision.

3- IF-exact bilatéral et prise de décision

Nous terminons en rassemblant ici les résultats mathématiques nécessaires à la prise de décision avec la loi binomiale dans le cas de l'IF-exact bilatéral au seuil 95% et pour la variable de décision $X = nF$ de loi $\mathcal{B}(n ; p_0)$ où $p_0$est une valeur donnée.

En conclusion de ce que nous venons de voir, on peut donc adopter la définition suivante :

L'intervalle de fluctuation exact bilatéral pour le nombre de succès *X* au seuil 95% est *le plus petit intervalle* (au sens de l'inclusion) $[a\ ,\ b]$ où a et b sont des entiers vérifiant les conditions $\mathrm{P}(X < a) \leq 0{,}025$ et $\mathrm{P}(X > b) \leq 0{,}025$.

On remarquera que cette dernière définition peut être prise comme définition *générale* dans le cas d'une variable aléatoire X quelconque [14] *de loi continue ou discrète*, ce qui n'est pas possible avec la définition donnée dans les programmes de Seconde [15] qui caractérise l'intervalle de fluctuation par le fait d'être centré sur la proportion p.

Bien entendu, cette définition coïncide avec la définition donnée en Seconde dans le cas particulier où la variable X est implicitement supposée de loi continue et symétrique [16] par une approximation en loi compte tenu des conditions de validité $n > 25$ et $0{,}2 < p < 0{,}8$ imposées par le Programme de façon rendre possible l'utilisation de l'expression $\left[p-1/\sqrt{n}, p+1/\sqrt{n}\right]$.

On peut alors proposer un procédé de construction faisant appel seulement aux probabilités cumulées croissantes, facilement obtenues par tableur :

L'intervalle de fluctuation exact bilatéral pour le nombre de succès X au seuil 95% est l'intervalle déterministe $[a\ ,b]$ où a est le plus petit entier tel que $\mathrm{P}(X \leq a) > 0{,}025$; et b est le plus petit entier tel que $\mathrm{P}(X \leq b) \geq 0{,}975$.

L'intervalle de fluctuation bilatéral exact pour la fréquence F au seuil 95% est alors donné par $[a/n\ ,\ b/n]$.

On prendra garde à la place des inégalités $>$ et $\geq$ et on remarquera que les entiers a et b dépendent de la taille n de l'échantillon.

Suivant la même démarche qu'en Seconde, si $[a\ ,\ b]$ est l'intervalle de fluctuation exact bilatéral pour l'effectif $X = nF$ au seuil 95%, on lui associera la méthode de prise de décision :

Pour décider si $p = p_0$, on prélève un échantillon de taille n et on calcule la fréquence observée $f = x/n$, où x désigne l'effectif (nombre de succès) observé :

- *si* $f \notin [a/n, b/n]$. *i.e.* $x \notin [a\ ,b]$, *on décide que* $p \neq p_0$;
- *si* $f \in [a/n, b/n]$. *i.e.* $x \in [a\ ,b]$, *on décide que* $p = p_0$.

14 Et plus seulement dans le cas de la loi binomiale.
15 *L'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille n* (Cf. Programmes de Seconde).
16 Sous ces conditions, la variable X est approximée par une variable aléatoire normale, donc de loi continue et symétrique (centrée sur l'espérance np). Ce qui a pour conséquence que la variable F est approximée par une variable aléatoire normale (donc de loi continue et symétrique, centrée sur la proportion p).

Bibliographie

[1] Ducel Y., Saussereau B. : « Quelle problématique pour un enseignement des probabilités en Troisième ? », *Repères IREM*, 77, octobre 2009, pages 55-65, Topiques éditions, Nancy, 2009.

[2] Ducel Y., Larnaudie F., Saussereau B. : « Activités de probabilités de la Troisième à la Seconde », en préparation, à soumettre à *Repères IREM*, 2011.

[3] Groupe-IREM « Statistique & probabilités » : *Lois continues, test d'adéquation. Une approche pour non spécialiste*, Collection « Les Publications de l'IREM de Besançon », Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon, 2005.

[4] Ministère Éducation nationale-DGESCO : *Ressources pour la classe en baccalauréat professionnel - extrait : Probabilités et statistiques*, Document de travail, avril 2009.

[5] Ministère Éducation nationale-DGESCO : *Ressources pour la classe de Seconde – extrait : Probabilités et statistiques*, 2009.

Yves Ducel, Bruno Saussereau
Université de Franche-Comté
Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques
IREM - Département de mathématiques, UFR Sciences et Techniques
16, route de Gray, F-25030 Besançon cedex
Téléphone : +33(0)3 81 66 62 32 - Courriel : yves.ducel@univ-fcomte.fr
Adresse Web de l'IREM : http://www-irem.univ-fcomte.fr/