BILAN DE PRATICIENS SUR LA TRANSITION LYCEE – UNIVERSITE

Exemple de l'algèbre linéaire

Marion DIEUDONNE
(Lycée Champollion, Lattes)
Jérôme DRONIOU
(Université Montpellier 2)
Viviane DURAND-GUERRIER
(Université Montpellier 2)
Benoît RAY
(Lycée Docteur Lacroix, Narbonne)
David THERET
(Université Montpellier 2)

Groupe de Liaison Lycée-Université
Irem de Montpellier

Introduction

En septembre 2009, l'Irem de Montpellier a créé un groupe de réflexion « Groupe de Liaison Lycée-Université » sur la transition lycée-université, composé d'enseignants du secondaire, d'enseignants-chercheurs de l'Université de Montpellier 2 (UM2) et d'inspecteurs pédagogiques régionaux.

Une partie du travail de ce groupe a consisté à observer cette transition du point de vue des contenus des programmes et des acquis effectifs des lycéens en fin de Terminale. Cet article présente les fruits de la réflexion préliminaire que nous avons menée au sein de ce groupe sur ces axes.

La transition lycée-université est nécessairement une rupture pour le lycéen qui devient étudiant. Nous avons tenté de dégager, de nos expériences singulières de praticiens, les difficultés principales auxquelles se heurtent les étudiants sortis du Lycée dans les enseignements de Mathématiques en première année de Licence (L1), et des éléments – préliminaires pour l'instant – pour lisser certaines de ces difficultés. La première étape était donc de faire un état des lieux général de l'enseignement des Mathématiques au lycée et de celui en L1 d'Université, état des lieux qui a été élaboré sous différents aspects.

Nous avons tout d'abord éclairci les attentes générales des enseignants en université concernant les étudiants entrants en première année de Licence (L1), à la fois sur les méthodes de travail et aussi plus spécifiquement celles concernant les aspects logiques et ensemblistes. Ceci fait l'objet des paragraphes 1. *Nos attentes générales concernant les étudiants de 1ère année de licence*, et 2. *A propos des aspects logiques et ensemblistes*.

Nous avons ensuite travaillé à l'étude comparée des programmes de lycée et de L1 sous l'aspect de l'Algèbre Linéaire (3. *Eléments pour un bilan*), ce qui nous a permis de mettre en évidence les premiers décalages entre lycée et université et d'envisager quelques pistes pour y remédier (4. *Difficultés repérées et pistes envisagées*).

1 Nos attentes concernant les méthodologies de travail des étudiants en première année d'université

Comme au lycée, le travail universitaire requiert une méthodologie de travail stricte qui, contrairement à ce qui se passe au lycée, est très peu encadrée. Ces attentes méthodologiques sont très rarement explicitées aux étudiants, et bien souvent restent implicites pour les enseignants universitaires eux-mêmes ; et quand bien même elles seraient explicitées, les moyens manquent bien souvent pour travailler correctement sur ces points avec ceux qui en ont besoin, c'est-à-dire la grande majorité des étudiants de première année de Licence.

Les enseignants universitaires s'attendent en particulier à ce que les étudiants soient autonomes sur les points suivants pour aborder dans de bonnes conditions leur première année d'université.

1.1 *Savoir et vouloir travailler par soi-même, cours et exercices.*

Chaque unité d'enseignement universitaire (UE) fonctionne de manière très suivie et il est essentiel de comprendre ce qui a été abordé (à la fois en cours et en travaux dirigés) une semaine pour suivre la semaine suivante ; il nous paraît nécessaire que, pour chaque UE qu'il/elle suit, un(e) étudiant(e) travaille au moins 1h30-2h par semaine par lui/elle-même.

Les discussions que l'on a avec les étudiants montrent malheureusement qu'ils en sont loin, et que soit, ils n'arrivent pas à trouver une méthode de travail personnel, soit ils se découragent quand la compréhension n'est pas immédiate (ils ne parviennent pas à rester très longtemps sur certains concepts/exercices plus délicats). On constate aussi une réticence de leur part à réfléchir par eux-mêmes à des choses nouvelles, préférant simplement attendre qu'elles soient décortiquées par l'enseignant.

1.2 *Savoir travailler et apprendre un cours*

Travailler/apprendre un cours consiste à trouver une méthodologie, souvent personnelle, pour parvenir à comprendre et assimiler les notions (définitions, théorèmes...) qu'il introduit ou reprend. Notons qu'il n'est pas demandé aux étudiants de tout comprendre tout seul : la méthode de travail peut (doit !) aussi consister à savoir retourner vers l'enseignant pour des éclaircissements.

Sauf quelques exceptions notables (qui correspondent souvent – mais pas toujours – aux étudiants qui « réussissent »), les étudiants semblent rarement avoir assimilé le cours et ne font pas non plus cette démarche de retour vers l'enseignant d'une séance sur l'autre ; ceci va de fait avec une certaine passivité que l'on constate généralement dans l'apprentissage en premières années d'université.

1.3 *Savoir ce qu'est une définition, savoir l'utiliser*

Pour le mathématicien universitaire et en termes simples, une définition est une « introduction précise » d'un concept qui n'est pas autoréférencée – ce qui n'est pas toujours le cas dans les manuels de lycée, voir plus bas – et qui n'est pas contradictoire avec d'autres concepts (nous revenons plus bas sur la notion de définition, en la différentiant de celle de « théorème »). C'est un peu le bloc de base de construction des mathématiques, celui sur lequel repose tout ce que l'on fait ensuite : tout ce que l'on peut prouver découle nécessairement du bon emploi des définitions d'objets mathématiques qui ont été préalablement introduits.

Le concept de « définition » apparait cependant très flou pour les étudiants en début de L1 (et même après), qui ne semblent pas en comprendre l'intérêt essentiel pour le mathématicien ; pourtant, la résolution de nombreux exercices consiste bien souvent à juste traduire la définition des objets apparaissant dans les exercices, et à mettre deux ou trois de ces définitions côte-à-côte. Cette difficulté découle probablement du manque d'usage, en lycée, des définitions dans la résolution des exercices (sauf peut-être en Spécialité Maths), et de la rareté du travail explicite, par les lycéens, sur les objets qui vérifient une définition et ceux qui ne le vérifient pas [1].

1.4 *Savoir ce qu'est un théorème, savoir l'utiliser, reconnaître qu'on a établi un théorème*

Notons que l'on ne fait ici aucune distinction entre « théorème », « proposition » et « lemme » (cette distinction de vocabulaire n'est pas essentielle en L1). Comme indiqué plus bas, un théorème est une phrase close qui énonce une vérité mathématique, et doit être prouvé (dans la théorie mathématique sinon par les étudiants – certains théorèmes étant admis lors de l'apprentissage) avant de pouvoir être utilisé. Un théorème a des hypothèses, et des conclusions, et on attend des étudiants entrant en Licence qu'ils puissent repérer les unes et les autres. On attend aussi qu'ils sachent utiliser un tel résultat vu en cours, afin de résoudre des exercices associés.

Bien souvent, la distinction hypothèse/conclusion est très mal faite par les étudiants, et l'exercice qui consiste à savoir ne serait-ce que comprendre et énoncer un théorème est souvent laborieux ; par exemple, ils ne comprennent pas toujours que poser l'hypothèse de véracité de l'antécédent (« supposer les hypothèses du théorème vraies ») ne revient pas à dire que cet antécédent est vrai. L'invocation correcte d'un théorème lors de la résolution d'un exercice (vérification des hypothèses, énoncé de la conclusion, etc.), bien qu'étant une activité de base considérée comme acquise en sortie de lycée par l'enseignant universitaire, apparaît donc souvent bien problématique.

1.5 *Savoir faire un raisonnement, donner des justifications*

L'activité mathématique de base en université consiste à déduire des propriétés sur des objets à partir de leur définition et de théorèmes. Ces déductions se font ligne à ligne, soit par des calculs soit par l'invocation de résultats connus ; on attend des étudiants en L1 qu'ils sachent, au moins sur des cas très simples, donner la « bonne » justification qui permet de passer d'une ligne à l'autre d'un calcul/raisonnement, bref qu'ils puissent dire pourquoi le « donc » est valide.

1 Pour une étude épistémologique et didactique des définitions, voir Ouvrier-Buffet (2007)

Or il est très difficile d'obtenir de leur part des explications claires sur leurs développements ; au mieux les discours que l'on parvient à obtenir sont peu précis et très intuitifs, inacceptables comme argumentaires finaux, du genre « $2x + 3 = 1$, je fais passer 3 de l'autre côté » (sans que l'étudiant ne sache dire que, précisément, il retranche 3 à chaque terme de l'équation). Il est difficile, sur ce point, de savoir si ce défaut vient d'une impossibilité de trouver la bonne justification ou de la communiquer au autrui (voir plus bas le point 1.10 Savoir communiquer des mathématiques).

1.6 *Savoir aborder (pas forcément « résoudre pleinement ») un exercice*

Lorsqu'il est mis devant un exercice « de son niveau », un étudiant ne doit pas rester complètement sec, il devrait avoir certains automatismes lui permettant d'aborder les questions posées : traduire les énoncés à l'aide des définitions du cours, voir ou sentir que telle propriété vue dans le cours (ou un autre exercice) semble être – au moins formellement – en relation avec le propos de l'exercice, prendre des initiatives pour nommer les objets ou grandeurs pertinentes à la situation, etc.

Mais on constate trop souvent ce qui ressemble à de la passivité (probablement simple reflet d'absence d'automatismes de base) chez les étudiants mis devant un exercice, même très simple. Non seulement le retour à la définition, comme on l'a dit, n'est pas acquis, mais on peut aussi penser que les étudiants ne s'autorisent parfois tout simplement pas la prise d'initiative minimale que l'on attendrait pourtant d'eux (comme l'introduction de cas particuliers pour se faire une idée) ; on observe aussi qu'ils ont peur de se tromper et cachent donc ce qu'ils écrivent lorsqu'ils ne sont pas sûrs (les erreurs ne sont pas perçues comme productrices de connaissances).

1.7 *Savoir réinvestir des idées d'un cours/exercice à l'autre*

Il est assez fréquent que plusieurs exercices d'une feuille de TD aient pour objet des notions très voisines, et qu'une technique particulière soit utile à plusieurs endroits d'un cours donné. Quand cela arrive, on espère que les étudiants soient plus réactifs et rapides la deuxième ou troisième fois qu'une astuce/technique est mentionnée ou applicable, ou éventuellement qu'ils essaient certaines techniques déjà vues et tentent de les adapter si elles ne marchent pas directement.

C'est en fait assez rarement le cas : quand un exercice est fini, on a l'impression qu'il « passe à la trappe » dans la tête des étudiants, qui ne semblent pas percevoir que l'acquisition de techniques mathématiques requiert qu'elles soient mobilisées à de nombreuses reprises et dans des contextes différents.

1.8 *Savoir se replonger dans les acquis du lycée*

Bien que les enseignants du supérieur ne soient pas toujours bien au fait de ce que les étudiants ont vu ou non en lycée, il arrive sur certains points qu'un cours ou exercice d'université fasse explicitement appel à des notions déjà abordées avant le baccalauréat. Dans ce cas, lorsqu'un tel lien est mentionné, on peut s'attendre à ce que les étudiants se replongent dans leurs cours de lycée pour se rafraichir la mémoire, et éventuellement se poser des questions (ou les poser a posteriori à leur enseignant) sur les liens entre leurs acquis et les nouveautés introduites à l'université. Mais, comme le fait de travailler un cours d'une semaine sur l'autre, il n'est pas clair que les étudiants de L1 s'adonnent à cette activité de retour en arrière sur ce qu'ils ont déjà vu.

1.9 *Savoir prendre des notes*

En Licence (que ce soit en cours d'amphi ou en travaux dirigés), on n'écrit pas nécessairement tout ce qui est important au tableau : un enseignement devant les étudiants n'a pas vocation à être aussi formalisé qu'un livre, et les choses importantes passent autant par l'oral que par l'écrit. Les étudiants devraient donc savoir prendre des notes à la fois de ce qui est écrit, mais aussi de ce qui est dit.

Cependant, lorsqu'un enseignant d'université s'arrête un instant d'écrire au tableau et se retourne vers les étudiants pour discourir un instant, il voit bien souvent la majeure partie des têtes se relever et les stylos s'arrêter de noter, même s'il insiste sur l'importance de ce qu'il est en train de dire. Cette problématique de la prise de note à partir d'un support écrit et oral n'est pas l'apanage de l'université (cf. Robert & Vandebrouk 2003).

1.10 *Savoir communiquer des mathématiques*

Savoir communiquer, vers l'enseignant ou ses camarades, ce que l'on a appris lors d'une résolution d'exercice fait partie intégrante de l'apprentissage des mathématiques. Cette communication est certes travaillée explicitement à l'université, mais il est attendu des étudiants entrant en L1 qu'ils sachent déjà un peu expliquer leurs raisonnements et productions mathématiques (au moins dans les cas où les justifications sont assez simples).

Cette question de la communication des mathématiques, tant à l'oral qu'à l'écrit, reste cependant difficile, tout au long de la licence (et parfois au-delà) ; si l'oral permet parfois d'établir un (long) dialogue aboutissant finalement à des justifications assez bien exprimées, le passage à l'écrit est extrêmement décevant en général (on retrouve des phrases qui ne veulent pas dire grand-chose – même d'un point de vue purement grammatical, sans parler d'une orthographe souvent défaillante – et qui sont écrites comme on récite un mantra, sans chercher à le comprendre).

2 A propos des aspects logiques et ensemblistes

Parmi les difficultés rencontrées par les étudiants arrivant à l'université, celles renvoyant aux aspects logiques et ensemblistes sont particulièrement importantes. On pourrait pourtant faire l'hypothèse que les compétences dans ce domaine se construisent d'elles-mêmes dans le cadre de l'activité mathématique, mais de nombreuses études conduites soient à la transition, soit dans le cadre de la formation initiale des enseignants montrent que ce n'est pas le cas. Dans les programmes de seconde mis en place à la rentrée 2009, les notions ensemblistes et logiques apparaissent de manière explicite. Nous apporterons sur ces questions nos regards croisés : nous présentons tout d'abord une brève lecture des programmes de lycée, suivie d'un commentaire sur ce que savent les élèves de lycée, et nous terminons ce paragraphe en présentant divers aspects logiques engagés dans l'activité mathématique, en appui sur les travaux de recherche conduits en didactique.

2.1 *Ce que disent les programmes de lycée*

Dans les programmes de seconde mis en place à la rentrée 2009, une rubrique explicite sur la logique et le vocabulaire ensembliste a été introduite. Le programme officiel (*Bulletin*

Officiel n°30 du 23 juillet 2009) précise :

> *Le développement de l'argumentation et l'**entraînement à la logique** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant et, par exemple, à distinguer implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne doivent pas être fixés d'emblée ni faire l'objet de séquences spécifiques mais doivent être introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité. Comme les éléments de logique mathématique, les notations et le vocabulaire mathématiques sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ.*

Le programme officiel (*ibid.*) indique ensuite, sous la rubrique « Notations mathématiques », que « *les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondants : □,□,□,□ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles* ». Observons qu'il n'est probablement pas anodin que ces points ensemblistes soient traités comme de simples « notations » : cette dénomination laisse supposer qu'aucune difficulté propre ne se présente lors de leur apprentissage, et que celui-ci ne mérite donc, aucun véritable traitement spécifique.

En ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves doivent être « *entraînés, sur des exemples* » (*ibid.*) à : utiliser les connecteurs logiques « et » et « ou » ; utiliser les quantificateurs universel et existentiel (symboles □et □ non exigibles) et repérer les quantifications implicites (notamment dans les propositions conditionnelles) ; distinguer une proposition conditionnelles directe, sa réciproque, sa contraposée, et sa négation ; utiliser « *à bon escient* » les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante » ; utiliser des contre-exemples ; reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques (par disjonction des cas, par contraposée, par l'absurde).

Ceci est une évolution des programmes par rapport aux programmes en cours actuellement en classe de Première et de Terminale, qui mettent l'accent sur le développement des compétences liées à la démonstration par la pratique mathématique, sans référence explicite à la logique. Les compétences logiques sous-jacentes à l'activité mathématique sont cependant bien présentes, comme le montre cet extrait du programme de Première (*Bulletin Officiel hors série n° 7 du 31 août 2000*) :

> *La démonstration est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience. Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité, puis en détailler les différentes étapes, a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France.*
>
> *Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations. (…) On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théo-*

rème admis,...). La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en seconde ; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas ; le raisonnement par récurrence relève de la classe de terminale.

Cependant, il n'y a pas dans le programme de Première en cours depuis 2000 d'explicitation de savoirs et de compétences logiques qui pourraient se dégager de l'activité mathématique.

De nombreux points de logique « élémentaire » présentent néanmoins des difficultés subtiles, et il est permis de se demander si le programme officiel ne devrait pas être plus précis sur ce sujet. Par exemple, le raisonnement par récurrence révèle particulièrement bien les difficultés liées aux relations entre implication et quantification. Ce mode de démonstration, présenté comme un « axiome » dans le programme officiel, est introduit en Terminale. Dans les manuels de Terminale que nous avons consultés, le principe du raisonnement par récurrence n'est pas toujours formulé de manière très claire. C'est le cas par exemple dans le manuel *Nathan Hyperbole Terminale S* (2006) :

Axiome de récurrence

$P(n)$ désigne une proposition qui dépend d'un entier naturel n.

n_0 désigne un entier naturel.

Pour démontrer que *pour tout entier naturel quelconque* $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie, il suffit de :

1. vérifier que $P(n_0)$ est vraie ;

2. considérer que pour un entier naturel quelconque $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie (*c'est l'hypothèse de récurrence*) et démontrer qu'alors $P(n + 1)$ est vraie.

La formulation du point 2 laisse planer un doute sur la signification de l'hypothèse de récurrence : on pourrait penser qu'en fait on considère que l'hypothèse est vérifiée par n'importe quel entier supérieur ou égal à n0, mais c'est ce que l'on veut prouver, et l'on introduirait alors une forme de circularité. Une formulation plus appropriée serait : « *considérer un entier supérieur ou égal à 0 tel que P(n) est vraie* »[2]. Notons que cette présentation est moins celle d'un axiome que celle du mode de raisonnement lui-même, qui est bien ce dont l'apprentissage est visé. Un autre manuel, *Bordas Indice terminale S* (2002), présente l'axiome sous une forme qui semble être plus proche de celle d'un théorème, mais qui est plutôt une forme hybride faisant intervenir à l'intérieur de l'énoncé les termes « prouver » et « vrai » :

Axiome

Si une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour l'entier p supérieur ou égal à n_0 elle est vraie aussi pour l'entier p + 1, alors elle est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0.

Remarquons que l'axiome et le mode de raisonnement sont deux choses différentes du point de vue logique. L'axiome est un énoncé clos, c'est-à-dire, dans sa forme, un « théorème » (voir plus loin paragraphe II.3), alors que le mode de raisonnement est une succession d'étapes permettant de démontrer un énoncé. L'axiome *justifie* la validité du mode de raisonnement, mais ne s'y identifie pas. Les deux citations précédentes font bien apparaître cette différence : exposé d'une technique dans le premier cas, énoncé d'un véritable axiome dans le second.

2 Ceci est développé par exemple dans Durand-Guerrier & al. (2000)

2.2 *Ce que savent les élèves de lycée*

Il nous semble que tous les éléments de logique et de raisonnement décrits dans la section précédente sont plus ou moins abordés tout au long des classes de lycée (série S), mais que la majorité d'entre eux ne sont pas acquis en fin de Terminale, mis à part la démonstration d'une implication et la maîtrise du contre-exemple. Voici quelques commentaires sur la réalité que nous percevons de l'enseignement des notions ensembliste et logique.

Les symboles $\cup$, $\cap$, $\subset$ sont introduits en Seconde avec les intervalles de **R** et l'écriture des solutions d'inéquations. Ils sont également parfois utilisés en géométrie dans l'espace (intersection $P_1 \cap P_2$ de deux plans et plus rarement inclusion $D \subset P$ d'une droite dans un plan). Ces notions sont revues et complétées en Première S (et en Seconde pour le nouveau programme) dans le cadre du chapitre de Probabilités, avec la notation du complémentaire pour un évènement contraire, et la relation $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Le quantificateur « pour tout » est employé tout au long du lycée, mais son utilisation par les élèves se révèle problématique : ils écrivent volontiers des égalités d'expressions littérales sans préciser quel est le statut des variables, paramètres, etc. Cet obstacle est notamment perceptible dans les travaux sur les équations différentielles : le passage de « $f' = f$ » à « $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = f(x)$ » est très loin d'être acquis en fin de terminale. Plus rares sont les occasions d'utiliser le quantificateur « il existe » (théorème d'existence de limites, théorème des valeurs intermédiaires, en Spécialité : théorème de la division euclidienne, théorème de Bézout...). Pour ces deux quantificateurs, l'usage des symboles logiques $\forall$ et $\exists$ par les enseignants, et a fortiori par les élèves, reste cependant marginale.

Les élèves conçoivent des démonstrations par l'absurde ou par contraposition lorsqu'on leur expose, mais il n'est pas attendu d'eux qu'ils pensent seuls à ces types de raisonnement. Des raisonnements par l'absurde sont rencontrés par exemple pour prouver l'unicité de la limite d'une suite, l'unicité d'une solution d'une équation différentielle avec condition initiale (davantage d'exemples sont vus en Spécialité : infinité des nombres premiers, unicité de la division euclidienne…) Quelques raisonnements par contraposition sont notamment vus en géométrie (contraposée des théorèmes de Pythagore et de Thalès).

Le raisonnement par disjonction des cas est peu travaillé, sauf en Spécialité mathématiques en terminale S (en particulier : caractérisation complexe des similitudes et congruences). On le rencontre néanmoins quand on introduit des tableaux de signes en seconde, mais le raisonnement sous jacent est caché par les tableaux de signes.

Les notions de proposition directe et de réciproque sont connues des élèves, mais non celles de contraposée (qu'ils ont vu passer sans savoir la nommer) et de négation. Les élèves savent que pour démontrer qu'un énoncé est faux, il suffit d'exhiber un contre-exemple, la difficulté étant alors de le trouver.

Les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante » ne sont pas connues de la plupart des élèves et la manipulation des notions sous-jacentes est loin d'être acquise en fin de Terminale. Les élèves rédigent souvent leurs réponses en commençant par « Pour montrer que …, il faut que », et la correction de ce genre d'erreurs reste anecdotique pour eux. Ils privilégient l'usage systématique de « il faut que » et n'utilisent que très rarement « il suffit que ». Notons que ces expressions sont également employées, à tort, par les enseignants eux-mêmes. Une autre erreur communément rencontrée chez les élèves est l'utilisation d'un simple « Si ..., alors ... » pour démontrer une équivalence. Les remarques sur ces erreurs de raisonnement passent au mieux pour un pinaillage de la part du professeur : l'essentiel est que les calculs soient justes, le reste n'est que de la « rédaction » et les élèves confondent le bon usage des connecteurs logiques avec le style d'écriture d'un texte. Ce type d'erreur n'est que très rarement pénalisé, sauf en spécialité (TS).

Les exercices du type «Vrai/Faux» sont des pistes pour faire travailler toutes ces notions de logique et de raisonnement qu'on ne retrouve pas vraiment à l'intérieur des exercices plus classiques. Ces exercices, ainsi que certains QCM, imposent de prendre en compte la signification réelle des quantificateurs, incitent à trouver des contre-exemples, à travailler par induction plutôt que par déduction et font réfléchir sur la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, entre proposition directe et réciproque. Ils devraient aussi permettre de s'interroger sur les conditions pour pouvoir attribuer une valeur de vérité à un énoncé.

2.3 *Sur quelques aspects logiques de l'activité mathématique*

Comme on l'a vu plus haut, une idée courante est qu'il n'y pas besoin de connaissances spécifiques de logique pour pratiquer le raisonnement mathématique élémentaire, l'idée étant que celui-ci se développerait spontanément grâce à la seule activité mathématique. Au contraire, nous estimons qu'il est nécessaire que des éléments de logique soient théorisés, au moins chez l'enseignant.

Vergnaud (1991) considère que les catégories explicites de la connaissance que sont les objets, les propriétés et les relations sont constitutives des processus de conceptualisation. Avec cet auteur, nous considérons que ceci s'applique aux mathématiques. En effet, si une finalité essentielle des mathématiques est d'établir par le moyen de la preuve la valeur de vérité d'énoncés choisis à l'intérieur des théories mathématiques, il n'en reste pas moins que l'activité mathématique ne se résume pas à la manipulation d'énoncés ayant une valeur de vérité bien déterminée, connue ou non. Par exemple en situation de recherche mathématique, on est amené à émettre des conjectures, dont précisément on ne connaît pas de valeur certaine la valeur de vérité, conjectures que l'on peut tester avec des cas particuliers (des objets), mais également en examinant ce que l'on pourrait déduire de leur vérité ou de leur fausseté. Ajoutons également qu'une part très importante de l'activité du mathématicien appliqué consiste à essayer, à partir de ses connaissances mathématiques, à mettre en place des outils pour les autres sciences (calcul scientifique, statistiques, etc.) : ces outils ne sont pas basés sur des preuves irréfutables, mais sur l'intuition que le mathématicien a de sa discipline, de sa thématique, et des besoins des autres sciences.

Le rôle des objets mathématiques [3] et des catégories logiques que sont les propriétés d'objet et les relations entre objets est essentiel dans le processus de conceptualisation, et ceci en amont des questions de formalisation :

- Les **propriétés** servent à catégoriser les objets d'un domaine donné en deux classes disjointes et complémentaires : étant donné un objet, et une propriété pouvant s'appliquer à cet objet, soit l'objet possède la propriété, soit il ne la possède pas (c'est le principe du tiers exclu pour les propriétés).

3 « On apprend à faire des maths non pas en écoutant une leçon purifiée, mais en manipulant des êtres mathématiques » (Choquet, 1990, p.61, cité in Rogalski, 2007, p.78)

Par exemple, « être un nombre premier » est une propriété qui s'applique aux entiers naturels ; « être un quadrilatère » est une propriété qui s'applique aux figures géométriques. Sur le plan logique, une propriété est une phrase ouverte, qui se formalise par « $P(x)$ » où P est un prédicat à une place et x une variable libre. Pour bien comprendre une propriété, il faut pouvoir reconnaître à la fois les objets qui vérifient la propriété et ceux qui ne la vérifient pas [4].

- Les **relations** s'appliquent à deux objets ou plus ; elles se formalisent sous la forme $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$., où n est un entier, R un prédicat à n places et $x_1, x_1, \ldots, x_n$ des variables libres. On peut aussi les considérer comme des propriétés s'appliquant aux n-uplets. Les relations les plus fréquentes sont les relations binaires et ternaires, mais en droit on peut avoir autant d'objets qu'on le souhaite. Par exemple, « *être supérieur ou égal à* » est une relation binaire qui s'applique aux nombres réels ; « *être congru à … modulo …* » est une relation ternaire qui s'applique aux nombres entiers. En attribuant des valeurs à certaines variables libres (mais pas à toutes), on obtient d'autres relations ou des propriétés : « *être supérieur ou égal à 0* » (propriété s'appliquant aux réels) ; « *être congru à … modulo 5* » (relation binaire s'appliquant aux entiers) ; « *être congru à 3 modulo 5* » (propriété s'appliquant aux entiers).

Les propriétés et relations sont les briques qui permettent de construire les énoncés mathématiques (elles fournissent les formules atomiques du calcul des prédicats) ; on les combine avec les connecteurs logiques classiques (*et*, *ou*, *si … alors*, *si et seulement si*) et les quantificateurs (*pour tout*, *il existe*). Reconnaître la structure logique d'un énoncé (repérer les connecteurs logiques, les quantificateurs, y compris lorsqu'ils sont cachés, et leurs portées mutuelles) et le domaine ou les domaines de quantification contribue à la compréhension de sa signification. Ce travail est souvent nécessaire car la langue naturelle tend à l'économie et est porteuse d'ambiguïté. La pertinence d'identifier la structure logique d'un énoncé est particulièrement nette lorsque l'on veut en prendre la négation [5].

Les énoncés composés construits à l'aide des connecteurs et des quantificateurs à partir des formules atomiques peuvent ne comporter aucune variable libre. Ce sont alors des énoncés clos ; lorsque le domaine de quantification est bien identifié, ils ont une valeur de vérité déterminée (que l'on peut connaître ou non comme nous l'avons mentionné plus haut). **Les théorèmes** sont des énoncés clos qui ont été prouvés dans une théorie donnée. De tels énoncés composés peuvent également comporter des variables libres ; étant donnés un domaine d'objets pertinents, ils fonctionnent alors comme des relations (deux ou plus variables libres) ou comme des propriétés (une variable libre). Ceci peut dans certain cas correspondre à la définition d'une nouvelle classe d'objets à l'intérieur de ce domaine [6]. Prenons l'exemple de la définition d'un polyèdre régulier en géométrie euclidienne, telle qu'on peut la donner à l'école élémentaire :

Définition : *Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des poly-*

4 En logique, on utilise plutôt le verbe « satisfaire » ; nous avons choisi de conserver le verbe « vérifier » qui est d'usage courant en mathématiques (et ce malgré la polysémie de ce verbe).

5 Sur les difficultés liées à la négation, voir les résultats d'une enquête de la CI2U conduits en 2006 (CI2U, 2008)

6 Certaines définitions ne sont pas de ce type. On peut par exemple définir des objets comme éléments d'un ensemble construit par la méthode axiomatique, ou comme classe d'équivalence modulo une relation d'équivalence sur un ensemble E donné (ensemble quotient).

gones réguliers identiques et ayant le même nombre de faces à chaque sommet[7].

Cette définition traduit une propriété composée qui permet de catégoriser les polyèdres réguliers parmi les polyèdres. C'est la conjonction de quatre propriétés : « être convexe » ; « avoir des faces qui sont des polygones réguliers » ; « avoir des faces toutes identiques » ; « avoir le même nombre de faces à chaque sommet ». Il faut noter que ces propriétés sont elles-mêmes des propriétés composées dont la structure logique est plus ou moins complexe[8].

Ce point de vue « phrase ouverte » pour les définitions est mobilisé principalement dans deux cas. Pour construire une partie d'un ensemble donné en compréhension d'une part ; lorsque l'on veut construire un objet répondant à une définition donnée d'autre part, et ceci dès l'école primaire[9].

Bien sûr, à une telle définition, on peut toujours associer un énoncé clos :

Pour tout polyèdre X, X est régulier si et seulement X est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers identiques et ayant le même nombre de faces à chaque sommet.

Etant donné un polyèdre, cette « équivalence définitoire » peut permettre de faire différentes inférences, selon ce que l'on sait de l'objet dont on parle. Dans ce cas-là, l'énoncé fonctionne comme un théorème. Mais ce n'est pas un théorème de la théorie considérée car il n'a pas à être prouvé. C'est une conséquence immédiate de la définition. A partir de cette définition, on peut par exemple démontrer le résultat suivant[10] :

Théorème : *Tout polyèdre régulier convexe est inscriptible dans une sphère.*

Il faut noter que si la différenciation entre *définition* et *théorème* est importante, ce qui précède montre qu'elle n'est pas nécessairement aisée ni facilitée par les usages, puisque la forme syntaxique d'une définition s'apparente à celle de l'énoncé d'un théorème ; une attention particulière devrait probablement être portée par les enseignants d'université à ces questions délicates. Au-delà, il apparaît nécessaire de s'attacher à clarifier les différentes formes et les différents usages de l'implication, en lien avec la déduction. En particulier, comme le soulignent de nombreux auteurs, il est essentiel de faire la distinction entre affirmer un énoncé conditionnel de la forme « Si A, alors B » et faire la déduction « Si A, alors B ; or A ; donc B ».[11]

3 Enseignement de l'algèbre linéaire au lycée

Nous présentons dans ce paragraphe une synthèse de l'enseignement de l'algèbre linéaire dans la filière scientifique de l'enseignement secondaire, en se basant sur la lecture des programmes officiels et des manuels scolaires. On trouvera également des commentaires sur la réalité de l'enseignement, les acquis et les difficultés constatées des élèves. Les références aux textes officiels concernent les programmes en vigueur

7 Pour être tout à fait complet, il faudrait ajouter « rien d'autre n'est un polyèdre régulier ».

8 On pourrait sans doute considérer que « être convexe » est une propriété non composée ; ce n'est évidemment pas le cas des trois autres propriétés.

9 Ceci est développé dans Durand-Guerrier & Héraud (2006)

10 Pas au cycle 3 de l'école de l'école primaire.

11 Voir sur ces questions Durand-Guerrier (1999) et Durand-Guerrier & al. (2000)

jusqu'en 2008 en seconde. Les extraits de cours des manuels sont cités à titre d'exemples.

Vecteurs

Jusqu'en 2008, les vecteurs sont introduits en classe de Troisième (le programme 2009 les repousse en Seconde). La progression est la suivante :

- Troisième : vecteurs du plan.
- Seconde : vecteurs du plan (suite).
- Première : vecteurs de l'espace, produit scalaire de vecteurs du plan.
- Terminale : produit scalaire de vecteurs de l'espace.

Les vecteurs sont pensés de manière intuitive et visuelle, dans le contexte du plan (puis de l'espace) affine muni d'une distance. Ce plan et cet espace sont les espaces « évidents » auxquels on pense tous les jours ; pour cette raison, leurs propriétés affines et métriques ne sont pas toujours explicitées. Aucun traitement axiomatique n'est effectué.

Généralités sur les vecteurs du plan

En classe de troisième, les notions de translation, de symétrie centrale ou axiale (du plan) sont déjà connues, ainsi que le parallélogramme et ses propriétés. La translation, définie de manière ponctuelle à partir des parallélogrammes, est utilisée sur des figures et correspond à un « glissement » (de même, la symétrie axiale correspond à un pliage autour d'une droite, la symétrie centrale à un demi-tour autour d'un point).

Les vecteurs (du plan) sont introduits à partir des translations. Par exemple dans le manuel *Magnard Maths 3ème* (2003), une activité préparatoire présente une figure de pavage et propose le « Vocabulaire » suivant :

> « *La translation qui transforme* A *en* B, *transforme* B *en* C *et* C *en* D. [cette phrase fait référence à la figure donnée]
>
> *Les couples de points* (A ; B), (B ; C), (C ; D)... *définissent un même objet appelé vecteur et noté* $\vec{u}$.
>
> *La translation qui transforme le point* A *en* B *est appelée translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$.
>
> *Le vecteur* $\vec{u}$ *est défini par sa direction, son sens, sa longueur.*
> *On écrit :* $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ »

On voit que la nature précise du vecteur n'est pas claire. Le même manuel dit d'ailleurs plus loin : « Le vecteur $\vec{u}$ est représenté par les trois vecteurs égaux $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ »

Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est introduit ; il n'a ni direction ni sens, ce qui en fait un vecteur un peu exceptionnel et mystérieux.

Comme on vient de le voir, il y a confusion entre le vecteur et ses différents représentants ; par exemple, on dit que A est l'origine et B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Dans le même ordre d'idées, on dit qu'un vecteur admet des représentants qui sont égaux. Ces confusions perdurent dans la suite de la scolarité et jusqu'à la Terminale. Voici deux présentations de manuels, correspondant au tout début de la partie de cours sur les vecteurs :

> « Définition. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
>
> — *sa direction :* celle de la droite (AB) ;
>
> — *son sens :* de A vers B ;
>
> — *sa norme :* la longueur du segment [AB] dans l'unité choisie.

[suit un dessin avec des points A, B, C, D et un vecteur $\vec{u}$, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$]

Cas particulier : le vecteur $\overrightarrow{AA}$ n'a pas de direction, et sa norme est nulle. C'est le vecteur nul. »
(Hachette Déclic 2nde)

« *Définition 1*. Soit A, B, C, D quatre points du plan tels que A et B d'une part, C et D d'autre part sont distincts. Dire que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie qu'ils ont la même direction, le même sens et que les longueurs AB et CD sont égales.

On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{CD}$) est un représentant (sic) du vecteur $\vec{u}$.

Définition 2. Soit $\vec{u}$ un vecteur et $\overrightarrow{AB}$ un représentant du vecteur $\vec{u}$. Lorsque les points A et B sont confondus, on dit que $\vec{u}$ est le vecteur nul et on note $\vec{0}$ ce vecteur.»

(Belin Radial 2nde, premières définition du cours)

On constate sur ces exemples que la première définition du cours n'est pas, contrairement à ce que l'on pourrait attendre, la définition générale de la notion de « vecteur ». Dans *Belin Radial 2nde*, il s'agit plutôt de la définition de l'égalité entre vecteurs ; dans *Hachette Déclic 2nde*, on « caractérise » ce qu'est un vecteur. Dans les deux cas, la présentation n'est que partielle puisqu'elle ne permet pas de traiter le cas du vecteur nul.

L'égalité des vecteurs est définie ou caractérisée au choix par l'égalité des attributs des vecteurs (direction, sens, longueur) comme dans les exemples ci-dessus, ou par les propriétés du parallélogramme, voire par l'égalité des translations associées (cas le plus rare).

Une fois la nature des vecteurs partiellement élucidée, on définit les opérations et les notions reliées : somme de deux vecteurs (associée à la composée de deux translations, par la relation de Chasles, ou, plus rarement, par la règle du parallélogramme) ; opposé d'un vecteur ; différence de deux vecteurs (addition avec l'opposé) ; produit d'un vecteur par un nombre réel (introduite soit de manière géométrique, en raisonnant sur le sens et la longueur des vecteurs, soit de manière analytique comme suggéré par le programme officiel mais absent des manuels que nous avons consultés et vraisemblablement de la plupart des cours, au moins jusqu'en 2009) ; colinéarité de deux vecteurs (*Belin Radial 2nde* dit par exemple : « *ou bien les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction ou bien l'un des vecteurs est le vecteur nul* », et certains manuels disent que « par convention », le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur) ; enfin, les règles de calcul sont énoncées.

Repérage

Les notions de repérage liées à des contextes précis sont familiers des élèves depuis au moins la classe de sixième (en mathématiques ainsi que dans d'autres disciplines). En troisième, un repère du plan est la donnée de trois points non alignés (implicitement ordonnés). Un repère peut être « quelconque » (d'usage marginal), orthogonal, orthonormé (ou orthonormal). On sait calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ si l'on connait celles des points A et B. On énonce alors que deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.

Cette notion de repère évolue en seconde : un repère du plan est parfois un triplet

(O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) constitué d'un point et de deux vecteurs non colinéaires. La structure euclidienne du plan est présente a priori. Certains manuels disent que les deux vecteurs constituent une base du repère, mais en général cette notion de base n'apparaît pas dans les classes.

Un point M, un vecteur $\vec{u}$ du plan ont des coordonnées dans un repère, qui les caractérisent (c'est un théorème). On écrit M(x ; y), $\vec{u}(x\,;y)$. Les notations $\vec{u}\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sont parfois utilisées.

Le critère de colinéarité faisant intervenir les coordonnées est énoncé et démontré.

Vecteurs de l'espace

Le programme de Première introduit les vecteurs de l'espace, comme simple extension de la notion vue en Seconde dans le plan. Aucune définition n'est redonnée ; la confusion entre vecteur et représentant est toujours présente. Les opérations dans l'espace sont également définies « comme dans le plan, avec les mêmes propriétés ».

On introduit la notion de vecteurs coplanaires. *Belin Radial 1ère S* donne par exemple la définition suivante : *« Dire que trois vecteurs de l'espace sont coplanaire signifie qu'ils admettent des représentants dont les origines et extrémités sont des points coplanaires »*. Le même manuel donne ensuite le théorème suivant :

> « *Trois vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *de l'espace sont coplanaires si, et seulement si, il existe des nombres réels* α *et* β *tels que* $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ »,

et remarque aussitôt après que « $\vec{0}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ *sont toujours coplanaires* », contredisant évidemment la définition donnée. On rencontre à cette occasion l'expression « combinaison linéaire ». La notion de vecteurs coplanaires est peu utilisée et reste finalement très mal maîtrisée par les élèves jusqu'en Terminale.

Produit scalaire

Le programme de Première introduit le produit scalaire des vecteurs du plan, après avoir défini la notion d'angles orientés de vecteurs. On définit le produit scalaire dans la majorité des cas par la relation :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

On aborde ensuite le cas de vecteurs colinéaires (de même sens, de sens opposés), le carré scalaire $\vec{u}\,.\vec{u}$, noté $\vec{u}^{\,2}$. Le produit scalaire sert à définir la notion de vecteurs orthogonaux. On étudie les propriétés, les règles de calcul.

On rencontre d'autres expressions du produit scalaire : expression analytique, expression en fonction de la norme uniquement, avec la projection orthogonale d'un vecteur sur un « axe ». La projection orthogonale n'est pas étudiée à part entière comme les autres applications du plan ; ses propriétés — la linéarité en particulier — ne sont jamais explicitées.

On utilise le produit scalaire pour les équations cartésiennes dans le plan muni d'un repère orthonormé, avec les notions de vecteur normal à une droite, équation d'une droite, distance d'un point à une droite.

Le programme de Terminale prolonge le produit scalaire aux vecteurs de l'espace en se plaçant dans un plan : on choisit des points A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, et on considère un plan (unique si les points ne sont pas alignés) contenant A, B, C ; le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est alors, par définition le produit scalaire, calculé dans le plan en question, des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les règles de calcul du produit scalaire (symétrie et bilinéarité, sans que ces mots soient employés) sont ensuite énoncées (et démontrées). On définit par la suite la notion de vecteurs orthogonaux dans l'espace et on calcule le produit scalaire dans une base orthonormée (le plus souvent appelé repère orthonormé, ou repère orthonormal). Ceci permet d'obtenir l'équation cartésienne d'un plan dont un vecteur normal est donné et réciproquement un vecteur normal à un plan dont l'équation cartésienne est donnée, ainsi que la distance d'un point à un plan et l'inéquation d'un demi-espace (notion très peu utilisée en pratique).

Systèmes linéaires, droites, plans

En Troisième sont introduites les fonctions linéaires et affines, représentées graphiquement par des droites. Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une (unique) équation « réduite », à savoir de la forme $y = m\,x + p$. Le nombre m est appelé le coefficient directeur de la droite, et p est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite ; on insiste sur l'interprétation graphique de ces deux nombres. L'équation d'une droite est présentée comme une « relation » entre les coordonnées des points de cette droite : l'égalité est vraie pour tous les points de la droite, fausse pour les points extérieurs. Cette interprétation constitue un réel obstacle pour les élèves. Ceci pourrait être lié à des choix d'enseignement concernant les équations du premier degré à une inconnue qui tendent à privilégier le point de vue « transformation des écritures » pour aboutir à une équation du type $x = a$, au détriment du point de vue « vérification d'une équation par un nombre donné » même lorsque celui-ci serait aussi voire plus pertinent [12].

En Seconde, on aborde le cas des droites d'équation $x = k$. L'équation « cartésienne » $ax + by = c$ est identifiée dès la classe de Première comme une équation de droite.

Les équations et systèmes d'équations linéaires à deux inconnues sont introduits dans ce contexte (les équations et systèmes d'équations ont été rencontrés au collège, dans des cas d'unicité de la solution). Une équation linéaire à deux inconnues x et y est une équation « de la forme » (*Belin Radial 2nde*) ou « qui peut s'écrire sous la forme » (*Hachette Déclic 2nde*) $ax + by = c$, où a, b, c sont des nombres réels (*Belin Radial* impose à a, b de ne pas être simultanément nuls, et *Hachette Déclic* ne précise pas « réels »). On parle d'équations équivalentes (multiples non nulles l'une de l'autre).

Résoudre un système, c'est trouver tous les couples $(x\,;y)$ qui sont solution de chacune des deux équations simultanément. De la même manière, en classe de Troisième, une équation du premier degré à une inconnue est, « une égalité dans laquelle une quantité est inconnue » (*Magnard 3ème*). Résoudre une équation, c'est « trouver les valeurs pour lesquelles l'égalité est vraie ». On rencontre très peu de problèmes conduisant à résoudre une équation à plusieurs inconnues (par tâtonnement ou autres procédures), même si les programmes encouragent cette pratique.

On passe rapidement à l'interprétation géométrique (droites sécantes, parallèles, confondues), et on fait le lien avec les coefficients des équations (théorème démontré). Certains manuels distinguent la résolution graphique et la résolution algébrique. Cette dernière est accompagnée d'une démonstration détaillée, mais le résultat est pris sous forme de recette dans les exercices d'application : d'abord regarder si $ab' = a'b$, etc. On multiplie (et divise) les équations par un scalaire non nul ; on dit qu'on résout « par combinaison linéaire ».

12 Sur ces questions, voir par exemple Kouki (2006).

Pour des raisons de lourdeur d'écriture, les systèmes ne sont pas forcément résolus par équivalence, même si la notion est parfois utilisée. La rigueur tient dans le fait qu'on peut prévoir le nombre de solutions, à l'aide du calcul du déterminant $ab' - a'b$ du système (parfois appelé explicitement ainsi). Certains enseignants demandent une résolution par implication, puis une vérification tient lieu de réciproque.

Les élèves privilégient bien souvent au départ la méthode dite de « substitution » et, même s'ils sont convaincus de la plus grande efficacité de la résolution par combinaison linéaire dans le cas général, c'est celle de la substitution qui refait surface lorsque des systèmes n'ont pas été résolus depuis longtemps. Quoi qu'il en soit, ces aspects techniques de résolution ne posent pas réellement de problème aux élèves s'orientant vers la série S. En revanche, le lien entre le système et son interprétation graphique n'est pas évident si le cadre graphique n'est pas précisé a priori, de même qu'il n'est pas évident a priori qu'un système puisse ne pas avoir une unique solution.

C'est à partir de la classe de Première qu'on résout des systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues. La systématisation des opérations et leur codage, jugés pratique par les élèves, ne figurent pas au programme (permutation de deux équations L1 □L2 ; multiplication par un nombre non nul (précisé) L1 □α × L1 ; remplacement L1 + L2 □L1). On retrouve les méthodes de résolution classiques par substitution ou par combinaison linéaire.

En Terminale, la plupart des manuels introduisent les équations de droites et plans de l'espace :

— Représentation (on trouve aussi « caractérisation ») paramétrique d'une droite de l'espace. *Didier Math'x* et *Bordas Indice* parlent de « système d'équations paramétriques d'une droite de l'espace » ;
— Equation cartésienne et représentation paramétrique d'un plan de l'espace.

Le fait qu'une droite de l'espace « n'a pas d'équation » est perturbant pour les élèves, habitués à manipuler des équations de droites depuis la classe de troisième ; la plupart prennent *a priori* les équations $ax + by = c$ ou $y = 0$ pour des équations de droite.

On revient sur les systèmes linéaires à trois inconnues, de deux ou plus souvent trois équations à l'occasion d'un chapitre de géométrie dans l'espace (intersection de deux plans, de trois plans de l'espace), interprétation graphique des solutions (aucune, une, une infinité sous deux formes : une droite ou un plan).

La rigueur demandée dans les résolutions de systèmes est souvent plus élevée que dans les classes précédentes. La méthode du pivot de Gauss est parfois abordée, mais uniquement sur des systèmes carrés admettant une unique solution. *Nathan Hyperbole* parle de combinaisons linéaires. Malgré sa disparition des programmes depuis 2000, la méthode de Gauss figure dans certains manuels et est encore parfois enseignée, avec un codage des opérations sur les lignes.

Autres manifestations de la linéarité

Les polynômes

Les fonctions polynômes (souvent appelées polynômes tout court) sont introduites en Première. Il s'agit des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ pour lesquelles il existe un entier n et des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On parle des coefficients a_k, parfois des monômes

$a_k x^k$, et du degré, rarement noté deg(f). Il est parfois précisé que la fonction nulle, aussi appelé polynôme nul, n'a pas de degré.

On peut additionner et soustraire des polynômes, les multiplier. Les règles sur les degrés sont parfois énoncées (hors programme). Les fractions rationnelles sont définies.

Les polynômes étudiés en pratique sont de degré 1 ou 2. Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont parfois appelées « racines ».

Linéarité de certains opérateurs

Des propriétés de linéarité sont rencontrées en Première et en Terminale, énoncées en utilisant le terme de linéarité (linéarité de l'intégrale, de la moyenne d'une série statistique, de l'espérance d'une variable aléatoire) ou non (dérivation, conjugaison sur les complexes, projection orthogonale). La linéarité de la projection orthogonale n'est abordée que de façon marginale.

Combinaisons linéaires

En dehors des résolutions de systèmes, les combinaisons linéaires sont évoquées en calcul différentiel (si f et g sont solutions d'une équation différentielle (E), alors toute combinaison linéaire de f et de g est solution de (E), où (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre) et en arithmétique (si d divise a et d divise b, alors d divise toute combinaison linéaire de a et b (TS, enseignement de spécialité)).

Décalage entre le lycée et l'université

La linéarité a été entrevue de multiples manières au cours du programme de lycée, mais la plupart du temps de façon implicite et sans distinguer clairement le linéaire du non-linéaire [13]. Cette linéarité concerne les ensembles d'objets mathématiques (les espaces vectoriels) et les applications entre ces ensembles (les applications linéaires).

La structure d'espace vectoriel apparaît notamment dans le cadre des fonctions de **R** dans **R**, des suites réelles, des solutions d'un système linéaire homogène, des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène, des vecteurs du plan et de l'espace, des nombres complexes.

Même si la linéarité des applications se rencontre notamment avec la dérivation, l'intégration, le passage à la limite, les transformations du plan et de l'espace, on ne parle pas explicitement de linéarité et on n'insiste pas sur les propriétés sous-jacentes qui se transposent d'un domaine à l'autre.

Rupture

Le programme du lycée impose de lui-même diverses restrictions sur ce que l'on peut dire au sujet de la linéarité.

1. Tout d'abord, les notions ensemblistes sont très peu utilisées ; ainsi l'expression « ensemble des solutions du système linéaire » n'est généralement pas employée : un système linéaire peut avoir une ou des solutions, mais ces solutions ne sont pas envisagées comme formant un tout. Les solutions correspondent certes à des objets géométriques (points, droites, plans), mais là encore l'aspect ensembliste est peu explicité : les objets géométriques sont avant tout des « figures » familières. De plus, les transformations du plan et de l'espace sont rarement vues comme opéra-

13 Il faut noter toutefois qu'à l'école primaire, les programmes insistent sur la nécessité de travailler sur des situations de non proportionnalité.

tions « ponctuelles », mais plus souvent comme agissant sur des figures. L'orientation générale donnée par le programme officiel est d'ailleurs de ne pas aborder les concepts ensemblistes (et logiques) pour eux-mêmes [14].

2. Ensuite, les mathématiques du lycée se font dans un contexte implicite riche qui préexiste à la discussion. Les notions mathématiques se dégagent de ce contexte sans qu'il soit clairement reconnu ce qui leur permet a-minima d'émerger ainsi. Par exemple, le plan et l'espace sont pris de manière « naïve », avec toutes leurs propriétés évidentes (structure affine, structure métrique, orientation) qui sont invoquées au besoin, parfois sans nécessité absolue [15]. Une difficulté du même ordre, mais pas spécifique au lycée, porte sur les ensembles de fonctions, ou plus généralement d'applications à valeurs réelles, qui portent une structure plus riche que celle d'espace vectoriel. Les règles de linéarité de la dérivation (ou de l'intégration) côtoient donc des règles faisant intervenir cette structure plus riche (dérivation du produit, intégration par parties).

A l'université, la tendance est souvent renversée, marquant ainsi une vraie rupture avec les pratiques du lycée.

1. L'aspect ensembliste est omniprésent, dans ses concepts comme dans ses notations (ensemble $\mathbf{R}^n$, ensemble des solutions d'un système linéaire, etc.)

2. Les mathématiques se font le plus souvent par reconstruction. Alors que le programme de lycée dégage progressivement des notions mathématiques (parfois implicitement) dans un contexte riche, les cours d'université privilégient souvent l'étude systématique (même si modeste initialement) d'une notion dégagée de son contexte.

Conséquences sur les programmes

Les programmes d'algèbre linéaire de première année d'université illustrent souvent cette situation. Deux approches se dégagent principalement :

1. L'approche « classique » est de commencer de manière abstraite par la définition formelle d'un espace vectoriel. Cette présentation axiomatique va à l'encontre de ce qui est fait au lycée, comme on l'a dit plus haut. En particulier, on ne met dans la situation que le strict nécessaire pour parler de la linéarité, les notions de métrique ou d'orientation n'apparaissant que plus tard ; la structure affine est même le plus souvent passée sous silence, alors qu'elle est fondamentale (même si non explicitée au lycée, elle est utilisée de manière naturelle et implicite). Ceci n'est pas un mal en soi, mais ce décalage n'est généralement pas anticipé par l'enseignant. Même si quelques exemples sont donnés et réutilisés régulièrement, l'aspect formel et ensembliste domine.

2. Une autre possibilité est de commencer par de l'algèbre linéaire « concrète », essentiellement dans $\mathbf{R}^n$. La résolution des systèmes linéaires fournit par exemple un très bon cadre pour faire apparaître les notions qui se révéleront fondamentales : combinaisons linéaires, familles libres et génératrices, bases et dimension, applications linéaires, etc. L'aspect ensembliste est présent dès le départ (ensemble des solutions d'un système linéaire), mais de manière plus concrète que dans l'approche précédente. Les objets d'étude, donc les vecteurs dont on parle principalement, sont ici les n-uplets

14 Rappelons que ceci a changé depuis la rentrée 2009 (voir plus haut paragraphe 2.2)

15 Sur le rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, voir Gueudet 2004.

de nombres réels, ce qui pose un autre problème. D'une part ce n'est pas ce que les étudiants avaient appelé « vecteurs » au lycée, d'autre part la référence aux vecteurs géométriques est faite rapidement (ce n'est pas là que résident les difficultés) et dans un cadre vectoriel (les vecteurs géométriques sont des flèches issues de l'origine). Enfin, cette approche semble réduire l'algèbre linéaire à l'étude des n-uplets de nombres réels, et ne montre pas le caractère unificateur de la théorie.

4 Les choix d'enseignement en Algèbre linéaire à l'UM2 Premiers décalages identifiés et pistes envisagées pour y remédier

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté des constats et des analyses qui nous semblent refléter une portée assez générale en ce qui concerne le contexte français, et sans doute une large partie du contexte francophone. Dans ce paragraphe, nous présentons des éléments plus spécifiques au contexte montpelliérain.

4.1 *Quelques difficultés repérées*

Nous présentons maintenant quelques exemples concrets de difficultés rencontrées ces dernières années au cours de l'enseignement d'algèbre linéaire de L1 (premier semestre) à l'Université Montpellier 2. Il s'agit de l'unique enseignement de mathématiques du premier semestre de première année. Il est à noter que le choix de commencer par l'algèbre linéaire résulte d'une certaine volonté de rupture avec l'enseignement du secondaire : les tentatives de commencer l'enseignement mathématique universitaire par l'analyse ont laissé l'impression que les étudiants ne voyaient pas la nécessité de revenir de manière conceptuelle sur des notions qu'ils estimaient déjà connues (limite, dérivée, intégrale…).

Le module « Algèbre Linéaire 1 » en vigueur actuellement prend la résolution des systèmes linéaires comme fil conducteur pour l'apprentissage des concepts d'algèbre linéaire. La résolution des systèmes mène naturellement aux notions de combinaison linéaire, sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, familles libres et génératrices, bases, dimension, applications linéaires, et peut également être utilisée pour démonter de nombreux résultats de la théorie. La résolution de systèmes sert ainsi à la fois de motivation et d'outil dans tout le module.

4.1.1 *Difficultés sur les notions ensemblistes*

Les ensembles, plus précisément les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$, apparaissent initialement en tant qu'ensembles de solutions de systèmes linéaires. Les étudiants rencontrent rapidement de nombreux problèmes, liés à leur absence de pratique des notions ensemblistes (qui seront pourtant omniprésentes dans les mathématiques universitaires) et en particulier à leur difficulté à concevoir un ensemble comme un nouvel objet mathématique sur lequel des assertions et des raisonnements peuvent être faits :

- Confusion entre l'ensemble et ses éléments, qui se manifeste dans l'écriture symbolique des ensembles (oubli des accolades, identification entre l'ensemble et son « élément générique »), et se prolonge en une confusion entre appartenance et inclusion.
- Confusion entre l'ensemble et sa description : deux descriptions paramétriques différentes sont intuitivement vues comme décrivant des ensembles différents (difficulté à concevoir que l'ensemble puisse être l'image de deux applications différentes, sur-

tout si les mêmes variables littérales apparaissent dans les deux descriptions). Cette difficulté semble moins grande pour les descriptions par équations.

Considérons par exemple les deux ensembles suivants, obtenus comme ensembles de solutions de systèmes linéaires :

$$S_1 = \{(-8-2z+4t, 6+3z+t, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid z, t \in \mathbf{R}\}$$

et

$$S_2 = \{(-8-4t, 6+3z+t, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid z, t \in \mathbf{R}\}$$

On demande de déterminer si ces ensembles sont égaux. Voici quelques réponses relevées sur les copies :

1. « Prenons $z = 0$ et $t = 1$. On a alors $S_1 = \{(-10,9,1,0) \in \mathbf{R}^4\}$ et $S_2 = \{(-8,9,1,0) \in \mathbf{R}^4\}$. Pour deux valeurs de z et t respectivement égales, on a $S_1 \neq S_2$, donc ces deux ensembles ne sont pas égaux. »

2. « On remarque que S_1 et S_2 sont égaux pour $z = 0$ [...] Les deux ensembles sont [donc] égaux si et seulement si $z = 0$. On a donc : S_1 inclus dans S_2 . On ne peut écrire une intersection de S_1 et S_2 que lorsque $z = 0$. »

3. « Les deux ensembles ne sont pas égaux car leur variable principale x n'est pas la même. En effet, dans l'ensemble S_1 on a $x = -8-2z+4t$, et dans l'ensemble S_2 on a : $x = -8-4t$. » Ici, il est difficile de déterminer si les conceptions de l'étudiant sont correctes ou non.

La notation employée dans l'énoncé de l'exercice pour définir les ensembles S_1 et S_2 est probablement celle qui serait spontanément utilisée par de nombreux enseignants. Elle est pourtant source de confusion supplémentaire, dans la mesure où elle est un raccourci d'une notation plus rigoureuse mais plus lourde. Ainsi, la notation correcte

$$S = \{\vec{a} \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \text{ tels que } \vec{a} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}\}$$

deviendra souvent chez l'enseignant

$$S = \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$$

augmentant ainsi le risque de confusion entre ensemble et paramétrage. Les étudiants, quant à eux, écriront volontiers

$$S = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w},$$

ou

$$S = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \text{ dans } \mathbf{R},$$

ou encore

$$S = \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}\} \text{ pour } \alpha, \beta, \gamma \text{ dans } \mathbf{R}.$$

Ces notations ensemblistes sont généralement présentées au fil du cours (ou des exercices) et commentées si le besoin semble s'en faire sentir, mais l'enseignant considère le plus souvent qu'il s'agit d'un point mathématique simple voire mineur, probablement déjà vu, et ne demandant aucun travail spécifique.

De leur côté, de nombreux étudiants semblent percevoir le souci de rigueur de leur enseignant (rigueur toute relative, comme on l'a vu plus haut) comme un point de détail sans réelle importance qu'ils refusent plus ou moins d'intérioriser : certains étudiants peuvent retomber dans les mêmes erreurs même après une séance entière de travaux dirigés sur le sujet. Notons qu'il est difficile d'interpréter ce phénomène, dans la mesure où la plupart des discussions sur les aspects ensemblistes sont improvisées par l'enseignant, ce qui peut donner aux étudiants l'impression qu'il s'agit effectivement d'un point mineur (« si c'était important, l'enseignant l'aurait prévu »).

4.1.2 *Difficultés autour de la notion de définition*

Cette difficulté est probablement liée au fait, observé dans la partie 1, que les étudiants perçoivent souvent mal l'intérêt et le rôle des définitions dans l'activité mathématique. Voici quelques exemples d'erreurs rencontrées lorsque l'on demande aux étudiants de rappeler la définition d'une matrice échelonnée :

- Donner un exemple que l'on estime suffisamment représentatif, en espérant que la notion à définir s'en dégage d'elle-même, éventuellement au moyen de quelques commentaires explicatifs. Cette démarche permet, dans les bons cas, de cerner les principaux éléments de la définition, mais ne suffit pas pour déterminer si un nouvel exemple vérifie ou non la définition. Par exemple :

  « Une matrice échelonnée est une matrice du type

  $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

  dans laquelle les pivots (premiers éléments non nuls d'une ligne) se décalent successivement vers la droite. »

- Ne pas faire clairement apparaître la fin d'une définition. Par exemple :

  « Une matrice échelonnée est une matrice dans laquelle les lignes nulles, s'il y en a, sont regroupées en bas de la matrice. De plus, les pivots… »

- Ne pas parvenir à une formulation acceptable du point de vue du français, lorsque la définition devient trop complexe. Un exemple extrême : *« Une matrice échelonnée réduite est une matrice qui se constitue pour chaque ligne de un coefficient en début de ligne pour la première et puis tel la matrice échelonnée on obtient une diagonale de coefficient mais cette fois il n'y a aucune valeur affecté aux coefficient précédant et suivant. Et le coefficient de la ligne est égal à 1. »*

- Confondre la définition d'une notion avec son utilisation principale dans le cours. Par exemple : *« Une matrice échelonnée est la matrice d'un système linéaire qui… »*. Ou encore (comme remarque à la définition) : *« Attention : une matrice échelonnée réduite est unique, ce qui n'est pas le cas forcément de la matrice échelonnée. »*

- Confondre la définition avec le résultat principal du cours la concernant : *« Toute matrice est équivalente à une unique matrice échelonnée réduite »* ou avec la méthode principale du cours utilisant cette définition : *« Une matrice échelonnée réduite est une matrice obtenue à partir d'une matrice par l'algorithme de Gauss. »*

4.1.3 *Difficultés autour de la résolution d'exercices*

La résolution de certains exercices peut s'avérer incompréhensiblement laborieuse du fait du décalage lycée-université et de l'absence de certains automatismes méthodologiques considérés a priori comme acquis. Prenons par exemple l'exercice suivant :

« Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ est libre ».

Un étudiant qui ne sait pas résoudre directement cet exercice devrait (du point de vue de l'enseignant) avoir le réflexe d'en simplifier l'énoncé en étudiant une situation un peu moins générale, par exemple résoudre l'exercice en prenant $k = 2$; en pratique, très peu d'étudiants prennent cette initiative par eux-mêmes.

D'autre part, cet d'exercice, semblable en ceci à de nombreux exercices de mathématiques du supérieur, exige de savoir exprimer une définition (de famille libre, en l'occurrence) ; mais ce mécanisme de « traduction de la définition », qui est évident et de bon sens pour l'enseignant, semble échapper aux étudiants même lorsqu'on le leur suggère.

Une fois ces points surmontés (du moins en apparence), l'aspect logique de l'énoncé fait apparaître de nouvelles difficultés. La distinction entre hypothèse et conclusion est par exemple problématique : ainsi certains étudiants supposent (dans le cas $k = 2$) qu'une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ s'annule et tentent de montrer que les coefficients de cette combinaison sont nuls. Le fait que la définition de famille libre contienne une implication, même si cela peut être atténué par une définition comme « la seule combinaison linéaire égale au vecteur nul est celle où tous les coefficients sont nuls », est également un obstacle pour de nombreux étudiants, qui tenteront souvent de montrer que toute combinaison linéaire n'a que des coefficients nuls, ou encore que si les coefficients sont nuls alors la combinaison est égale au vecteur nul.

Une autre « erreur » rencontrée consiste à supposer que $\alpha_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, à en déduire que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_1\vec{v}_2 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, puis à conclure « par la liberté de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ » que $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2)$ est libre.

On voit sur cet exemple que les difficultés à raisonner sur des objets abstraits en nombre indéterminé, à traduire une définition, à maîtriser la structure logique d'un énoncé mathématique contenant une implication ou des quantificateurs, rendent presque insurmontable un exercice que l'enseignant universitaire s'attend à trouver élémentaire.

4.1.4 *Difficultés concernant la rédaction.*

Il est très difficile d'obtenir de nombreux étudiants qu'ils explicitent précisément les étapes de leurs calculs, plus généralement de leur raisonnement. Si l'on prend l'exemple de l'algorithme de Gauss pour la réduction des matrices (ou des systèmes linéaires), trois étapes doivent avoir lieu : l'entrée dans l'algorithme (pourquoi appliquer cet algorithme), la description du déroulement de l'algorithme lui-même, la sortie de l'algorithme (interprétation du résultat des calculs). La première et la troisième étape vont évidemment ensemble : si l'étudiant entre dans sa suite de calculs sans en avoir compris l'intérêt, il y a de fortes chances pour que le résultat de l'algorithme n'ait aucun sens et soit utilisé de manière incohérente.

Une difficulté pédagogique est en particulier la suivante : si un type de raisonnement (en l'occurrence la résolution de systèmes linéaires) est présentée de manière automatisable (par exemple par l'algorithme de Gauss), de nombreux étudiants sont réticents à redonner à chaque fois du sens à l'algorithme car ils voient cette contrainte comme une perte de temps inutile. Le problème surgit plus tard lorsqu'il s'agit de savoir quel système résoudre pour répondre à quelle question : les mêmes étudiants sont tentés de fonctionner comme précédemment, avec des résultats aléatoires.

4.2 *Pistes envisagées*

Ce qui suit est essentiellement l'annonce d'un programme de travail que nous allons mettre en œuvre à partir de la prochaine rentrée universitaire.

4.2.1 *Liens avec les connaissances de lycée mettant en jeu la linéarité*

Nous avons vu plus haut ce qui avait présidé au choix de commencer l'année de L1 par l'enseignement de l'algèbre linéaire en choisissant de se placer d'emblée dans $\mathbf{R}^n$, en particulier pour éviter que les étudiants aient l'impression de revenir sur ce qu'ils savent déjà. Dans une perspective de transition, ce choix se situe plutôt du côté de la rupture. On peut donc l'interroger du point de vue d'une continuité relative. En effet, même si les enseignants peuvent à l'occasion faire référence aux connaissances de lycée, ils ne prennent pas appui de manière explicite sur les connaissances mettant en jeu la linéarité rencontrées au lycée (cf. paragraphe 3).

Or comme l'ont montré les travaux de Dorier, Robert Robinet & Rogalski, pour permettre leur appropriation, il est nécessaire de prendre en compte la nature formalisatrice, unificatrice, généralisatrice et simplificatrice des concepts de l'algèbre linéaire et de s'appuyer sur un certain nombre de prérequis (Dorier, 1998, p. 223). Ceci nous conduit à envisager de faire évoluer le contenu du module d'algèbre linéaire pour prendre en compte ces aspects de manière explicite. Nous ne souhaitons cependant pas modifier de manière radicale les choix d'enseignement qui ont été fait. Nous nous proposons de motiver l'introduction des concepts d'algèbre linéaire dans $\mathbf{R}^n$ en proposant dans les toutes premières séances aux étudiants un travail visant à dégager les aspects unificateurs qui caractérisent le concept de linéarité, puis à introduire régulièrement dans les séances de travaux dirigés des exercices et des activités montrant comment les concepts construits sur $\mathbf{R}^n$ peuvent s'appliquer dans les autres situations. Il ne s'agit donc pas de mettre en place une ingénierie comme celle développée par exemple à Lille dans les années 1990. De manière plus modeste, nous souhaitons explorer une piste qui prenne au sérieux l'importance de construire les connaissances nouvelles en Licence dans un mouvement dialectique avec les connaissances travaillées au lycée. Nous faisons l'hypothèse que, en outre, ceci pourrait aider les étudiants à se replonger dans leurs cours de lycée et à établir les liens nécessaires entre les connaissances travaillées en Licence et les acquis du lycée (cf. partie 1), qui font cruellement défaut chez la plupart des étudiants préparant les concours d'enseignement.

4.2.2 *Travail explicite sur les questions de logique*

Dans l'ouvrage déjà cité, Dorier écrit :

« Ces remarques, ainsi que la difficulté qu'il y a à enseigner des connaissances de logique pour elles-mêmes, ont poussé les auteurs à penser qu'il pourrait être souhaitable de faire une mise au point sur quelques questions de logique et de langage ensembliste à l'occasion du début du cours d'algèbre linéaire. En intégrant ainsi de façon explicite cette dimension au début de l'algèbre linéaire ils pensent pouvoir mieux gérer la difficulté liée au formalisme de l'algèbre linéaire, tout en améliorant les connaissances en logique élémentaire et en théorie des ensembles des étudiants. Ce dispositif semble nettement préférable à un cours de logique et langage ensembliste général en début d'année sur un contenu neutre » (Dorier, 1998, p.213).

Haug (2000) « Mathématiques pour l'étudiant scientifique » (tome 1 et 2) a fait ce choix pour l'ensemble du programme de première année. Il écrit dans la présentation de l'ouvrage :

« La quasi totalité des étudiants arrivent dans l'enseignement supérieur en ignorant le

maniement de la logique élémentaire. On trouvera ici une mise au point sur les problèmes de raisonnement, de bon usage des écritures et en particulier des écritures formelles ; il ne s'agit pas d'un cours de logique suivi, mais plutôt de la mise en évidence des quelques règles et méthodes constamment utilisées en mathématiques, proposées lorsque l'occasion s'en présente. » (op. cité. p. 5).

Par exemple, dans le chapitre d'Algèbre linéaire, il propose un développement sur la règle de déduction du détachement (p.268) et sur la méthode de démonstration par hypothèse auxiliaire (pour prouver que « A ⇒ B est un énoncé vrai, on suppose A vrai, et on démontre B sous l'hypothèse A ; plus généralement, pour démontrer un énoncé de la forme

$$« \forall x \in E\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) » (1),$$

on considère un élément générique a de E tel que P(a) soit vrai (hypothèse auxiliaire) ; on prouve Q(a) sous l'hypothèse P(a) ; on en déduit « P(a) ⇒ Q(a) » et, par généralisation, on a une preuve de (1)).

D'une manière générale, les définitions d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice permettent de travailler sur ce qu'est une définition, sur ce qu'il faut mettre en œuvre pour savoir si un n-uplet donné vérifie ou non la définition, sur la négation des énoncés conditionnels quantifiés, sur l'identification de la structure logique d'un énoncé en langage ordinaire afin de pouvoir le formaliser etc. De nombreux exercices permettent de travailler sur les modes d'utilisations des définitions et des théorèmes dans les heuristiques et dans les preuves. Pour des raisons d'économie, il s'agit d'identifier sur quels contenus précis conduire ce travail de logique, et ce que l'on choisit d'institutionnaliser. Ce travail est en cours.

Conclusion

Dans cet article, nous avons souhaité partager avec le lecteur l'état du travail en cours, au sein du groupe de réflexion sur la transition lycée-université de l'IREM de Montpellier, autour des programmes, des attentes des enseignants en première année d'université et, en ce qui concerne plus spécifiquement l'enseignement de l'algèbre linéaire, des acquis effectifs des élèves en fin de lycée, ainsi que les pistes que nous souhaitons explorer dans la suite de ce travail.

Nous ne sommes pas les premiers ni les seuls à nous poser ces questions, elles sont au cœur des travaux de la Commission Inter Irem Université (CI2U) depuis de nombreuses années, mais la persistance des difficultés rend nécessaire de les reprendre et de tenter d'y apporter des réponses très pragmatiques, nourries par les apports complémentaires des membres du groupe, par les travaux déjà conduits dans les IREM et au sein de la CI2U, ainsi que les résultats des travaux de recherche que nous avons identifiés. Nous allons nous consacrer désormais à l'élaboration de réponses et à leur mise en œuvre.

Références

Choquet, G. *Hommes de science*, Hermann, Paris, 1990

Dorier, J.L. *Etat de l'art de la recherche en didactique à propose de l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Recherches en Didactique des Mathématiques vol 18, n°2, pp. 191-230, 1998

Durand-Guerrier, V. *L'élève, le professeur et le labyrinthe*, Petit *x*, n°50, pp. 57-79, 1999

Durand-Guerrier & al. *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques*, IREM de Lyon, 2000

Durand-Guerrier & Héraud *Règles et définitions en mathématiques, le mythe de la transparence*, in Guernier & al. (dir.) *Interactions verbales, didactiques et apprentissages*, Presses Universitaires de Franche-Comté, 2006

Gueudet, G. *Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 24, n° 1, pp. 81-114, 2004

Haug, P.J. *Mathématiques pour l'élève scientifique*, EDP Sciences, Grenoble, Tomes 1 et 2, 2000

Kouki, R. *Equations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique*. Petit *x*, Numéro 71, 2006

Ouvrier-Buffet, C. *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique*, Collection « Education et sciences » dirigée par Sylvette Maury, Editions Fabert, 2007

Robert A. & Vandebrouk, F. *Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 23, no 3, pp 389-424, 2003

Rogalski, M. *Gustave Choquet et l'enseignement des mathématiques à l'université*, La Gazette des mathématiciens, n°111, pp. 77-83, 2007

Vergnaud, G. *La Théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 10, n° 2/3, 1991

Instructions officielles et manuels

Bulletin Officiel n° 30 du 23 juillet 2009 (programme de Seconde)

Bulletin Officiel hors série n° 7 du 31 août 2000 (programme de Première S)

Bulletin Officiel hors série n°4 du 30 août 2001 (programme de Terminale)

Belin Radial Seconde (2004), Première S (2005)

Bordas Indice Terminale S (2002)

Didier Math'x Terminale S (2002)

Hachette Déclic Seconde (2004)
Magnard Maths 3ème (2003)
Nathan Hyperbole Terminale S (2006)

Texte de communication en ligne

CI2U, 2008, présentée par Viviane DURAND-GUERRIER, *About logic, language and reasoning at the transition between French upper Secondary school and University, Negation, implication and quantification, icme11 (Monterrey, july 2008)* http://tsg.icme11.org/document/get/926