EPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE DANS LA FORMATION MATHEMATIQUE

Evelyne BARBIN
Centre François Viète
et Irem de Nantes

Résumé : *La Commission inter-*IREM *« Epistémologie et histoire des mathématiques » a été créée en mai 1975. Dès cette époque, des stages académiques sont proposées, puis la Commission organise des colloques et édite des ouvrages. À la création des IUFMs en 1991, seulement trois postes d'universitaires sont créés en épistémologie et histoire des sciences, puis quelques autres suivront. En 2007, l'Académie des Sciences affirmait l'importance de formations épistémologique et historique pour les enseignants* [1]*. Les textes à propos de la « mastérisation » des formations des enseignants » vont dans le même sens. Mais, ce que l'on attend de l'histoire des mathématiques vis-à-vis de l'enseignement, change avec le temps. C'est donc en prenant un recul historique que cet article situe les enjeux et les apports de l'histoire des mathématiques dans la formation initiale et continue des enseignants.*

L'histoire des mathématiques : une panacée ?

Si l'intérêt pour l'histoire s'est poursuivi et même amplifié au cours des trente dernières années, il a eu divers motifs et il a pris diverses formes. En particulier, les apports attendus dans les années 1970 et celui des années 2010 sont en partie différents [2].

La Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » a été créée en mai 1975 à l'initiative de Jean-Louis Ovaert et de Christian Houzel. Nous étions une petite dizaine lors de la première réunion. Par la suite et aujourd'hui, cette Commission rassemble une cinquantaine de participants, dont la moitié sont enseignants de lycées, et l'autre moitié est constituée d'enseignants de collèges et d'universitaires.

Rappelons que les années 1970 furent celles de la « réforme des mathématiques modernes ». Les promoteurs de cette réforme dénonçaient le style qualifié d'historique de l'enseignement antérieur et reprochaient à cet enseignement de ne pas donner une conception unifiée des mathématiques [3]. La réforme devait donner, pour utiliser une terminologie de l'époque, le dernier « spectacle » des mathématiques [4]. Assez vite, cette réforme et sa mise en œuvre sont remises en cause, en particulier dans les IREMs, car elle présentait les mathématiques comme une langue et parce que les mathématiques étaient devenues une discipline de sélection.

Les recherches historiques ont constitué alors pour les enseignants, comme nous l'écrivions en 1980, une « thérapeutique contre le dogmatisme, un ensemble de moyens leur permettant de mieux s'approprier et maîtriser leur savoir ». Nous ajoutions que : « pour les élèves, elles ont préparé un terrain où les mathématiques cessent de jouer le rôle de monstre froid qui normalise, juge et condamne, pour être rétablies dans leur statut d'activité culturelle indissociable des autres pratiques humaines [5] ». Il ne s'agit plus de voir les mathématiques comme un produit achevé, mais comme un processus historique, ni de les comprendre comme un langage, mais comme une activité intellectuelle [6]. En réaction contre le rôle sélectif des mathématiques, une réflexion sur les relations entre mathématiques et société est entreprise dans les IREMs, qui organiseront à la fin des années 1970 trois colloques sur ce thème. Nous résumions l'apport de l'histoire des mathématiques en 1982 en écrivant : « Le regard de l'historien […], loin de commémorer une mathématique morte, y observe au contraire un savoir débordant de vitalité ; en prise sur des recherches intra et extra mathématiques ; inséparables de problèmes d'astronomie et de physique, d'optique, de technique et de création artistique ; transi de controverses philosophiques et théologiques ; confronté aux pouvoirs et aux institutions [7] ».

Après l'abandon de la réforme, l'enseignement des mathématiques a connu plusieurs « nouveaux programmes » successifs, qui n'étaient pas guidés, comme lors de la « réforme des mathématiques modernes », par un plan d'ensemble. Tout au contraire, il résulte plutôt, des différentes suppressions et ajouts qui ont été faits, un éparpillement des savoirs et des procédés. De sorte que, bien que les programmes soient allégés ils semblent toujours trop lourds pour le temps imparti, qui a d'ailleurs beaucoup diminué. Après la réforme des mathématiques modernes, qui reposait sur une conception axiomatique forte, il a été proposé dans les années 1980 d'enseigner à partir d'« îlots déductifs ». Depuis, l'idée de déduction s'est fortement diluée. Les raisonnements sont souvent réduits au collège à enchaîner une ou deux étapes. De plus, les assertions ont un statut confus : définition ? propriété ? proposition ? Enfin, les « nouveaux programmes » sont souvent interprétés comme une réduction des mathématiques à une « discipline de service ».

L'histoire des mathématiques deviendrait alors plutôt une « thérapeutique contre l'hétéroclisme », permettant de construire et de relier les différents savoirs mathématiques à partir de champs de problèmes, mathématiques ou non, d'analyser la construction d'un savoir à partir ou à l'encontre d'autres savoirs, de repérer des savoirs pérennes, de comprendre les liens entre les mathématiques et les autres activités scientifiques. Le colloque inter-IREM de Montpellier de 1985 portait sur « le rôle des problèmes dans histoire et dans l'activité mathématique ». Il fut suivi de la publication [8] de l'ouvrage *Histoire de problèmes, histoire des mathématiques* en 1993 où il est question du problème de l'irrationalité, de la résolution des équations aussi bien que de la représentation en perspective dans l'histoire, et où il est proposé aux lecteurs des « exercices historiques ». Nous écrivions en 2000 dans les actes du colloque inter-IREM sur les « mathématiques dans la longue durée » que « prendre l'histoire à partir de grandes problématiques est une manière de saisir en même temps la pérennité de certaines conceptions et les différences entre les approches successives [9]». L'histoire montre que les mathématiques n'ont pas été inventées pour servir de support à des activités pédagogiques mais qu'elles ont été d'abord un instrument de compréhension et de maîtrise du monde. Ceci est essentiel, puisqu'en dépend aussi la légitimation d'un enseignement des mathématiques pour tous.

Il peut paraître paradoxal, qu'après avoir avancé à l'époque de la « réforme des mathématiques modernes » que les mathématiques sont une activité, certains dénoncent plus tard un « activisme pédagogique [10]». Pour lever ce semblant de paradoxe, je me rapporterai à un échange avec un stagiaire de l'IUFM de Créteil dont le mémoire portait sur l'enseignement par activités. Dans son mémoire, l'auteur se félicitait d'avoir toujours pu montrer à ses élèves que les savoirs ou les connaissances servaient à résoudre des problèmes, mais il regrettait que pour la trigonométrie se soit impossible car « la trigonométrie ne sert à rien ». Cette affirmation indique une méconnaissance historique, car la trigonométrie, c'est-à-dire la mesure des angles à l'aide de mesures de segments est très ancienne. Nous pouvons trouver cette idée dans les problèmes de pente des pyramides des mathématiques égyptiennes vers 1650 avant J.-C., elle est présente dans la géométrie d'Euclide et constituée dans l'astronomie de Ptolémée. La trigonométrie peut servir à se repérer dans l'espace [11] ou à mesurer des distances inaccessibles et aussi, comme aime le rappeler Martine Bühler, à couper des tartes en six parts [12]. Inversement, la connaissance des angles permet de mesurer les distances. Ainsi, le mathématicien Alexis Clairaut enseigne en 1765 les angles à partir de la triangulation utilisée pour établir des cartes géographiques. Mais, l'affirmation laisse aussi à penser que le jeune stagiaire imaginait qu'enseigner les savoirs comme activités, serait seulement une injonction didactique, ou que l'on enseignerait des savoirs qui ne seraient que des objets scolaires. Ici, l'histoire des mathématiques peut servir de « thérapeutique contre une pédagogisation » de l'enseignement des mathématiques, car elle indique la portée authentique des savoirs enseignés. Autrement dit, enseigner par les activités, ou mieux par les problèmes, mérite d'être épaulé par une connaissance de l'histoire. Il n'y a plus de paradoxe.

Le triple enjeu de l'histoire des mathématiques pour l'enseignement

Les apports de l'histoire à l'enseignement sont liés au contenu de cet enseignement, mais aussi aux préoccupations des enseignants. Or, comme l'a écrit Henri-Irénée Marrou, « l'histoire est inséparable de l'historien ». De ce point de vue, l'histoire qui intéresse les enseignants peut avoir trois vertus en étant dépaysante, épistémologique et culturelle [13].

L'histoire a la vertu de nous dépayser, de nous « étonner de ce qui va de soi » comme l'écrit l'historien Paul Veyne. Tout simplement et d'abord, parce que les mathématiques n'ont pas toujours été, ni pas toujours été telles qu'on les enseigne aujourd'hui. Elles sont l'œuvre d'hommes, de femmes et de communautés. Ensuite, elles ont été produites à une certaine époque, dont elles reflètent les préoccupations et les conceptions mathématiques. Enfin, elles ont été produites dans une aire culturelle et géographique et elles ont circulé. Le dépaysement est aussi bien mathématique que culturel. Il peut nous permettre de comprendre les difficultés de nos élèves qui ne sont pas, comme nous enseignants, en pays connu. Il nous aide aussi à mieux entendre leurs questions ou à mieux interpréter leurs erreurs.

Après un cours sur l'histoire des méthodes de fausse position à l'IUFM de Créteil, une stagiaire m'avait raconté qu'elle n'avait pas arrêté immédiatement un élève de collège qui essayait de résoudre un problème numérique en essayant des nombres. Au contraire, elle avait fait avec lui le chemin qui permet d'aboutir d'une mauvaise valeur à la solution. Les méthodes de fausse position sont très anciennes [14], on les trouve en Inde, dans les Pays d'Islam puis en Europe à la Renaissance. Elles reposent sur un raisonnement de proportionnalité et c'est peut-être la raison pour laquelle elles étaient toujours enseignées dans les années 1900. Il va de soi, pour nous enseignants, que la résolution d'un problème, dit du premier degré, passe par celle d'une équation. Pourtant l'algèbre a été inventée par Al-Kwarizmi pour résoudre des problèmes dits du second degré. Ce constat dépaysant soulève bien des questions : pourquoi enseigner l'algèbre s'il s'agit seulement de résoudre des problèmes du premier degré, souvent si simples que les élèves ont envie d'essayer des nombres ? L'investissement algébrique n'est-il pas démesuré vis-à-vis des effets qu'il procure ? En général, les savoirs et les procédures enseignés sont-ils bien en adéquation avec la difficulté des problèmes posés ?

Nous donnerons trois exemples d'une histoire épistémologique qui peut intéresser l'enseignant.

Le premier exemple concerne les transformations réciproques des problèmes et des concepts. Dans l'enseignement, un problème donne lieu à l'application d'un concept ou d'un savoir, en général celui qui a été abordé en cours juste avant. Puis un autre problème suivra qui permettra d'utiliser un autre concept ou un autre savoir, etc. Alors que l'histoire montre qu'un problème connaît des transformations, et que les résolutions nécessitent des transformations de concepts. Ainsi, les démonstrations sur les tangentes sont géométriques dans les textes grecs, tandis que dans les années 1630, le problème de trouver la tangente à une courbe devient un problème cinématique chez Roberval et un problème optique chez Descartes. De sorte que les notions de tangente et de courbe s'en trouvent changées. Roberval conçoit une courbe comme la trajectoire d'un point en mouvement et la tangente comme la direction du mouvement en un point. Descartes associe une équation à une courbe et recherche un cercle tangent à la courbe en un point. Le problème optique qui intéresse Descartes est celui des ovales : il faut trouver la forme d'un dioptre, tel que des rayons incidents venant d'un même point se réfractent en des rayons convergeant tous en un point. Les brouillons de Descartes indiquent qu'à cette occasion, il explore le problème de trouver les normales à une courbe. La méthode qu'il donne dans *La géométrie* de 1637 pour résoudre ce dernier problème consiste à écrire algébriquement que la courbe et un cercle se touchent en un seul point.

Le second exemple concerne les statuts des démonstrations et des méthodes. À partir du collège, l'élève doit « démontrer », et il s'agit alors de raisonner en s'appuyant sur la déduction logique. Mais il peut aussi obtenir des résultats et des propositions en utilisant des calculs algébriques, puis plus tard des calculs vectoriels. Quels étaient les statuts de ces calculs vis-à-vis du discours démonstratif à l'époque où ils ont été produits ? L'histoire permet de comprendre ces calculs en tant que « méthode », notion qui a disparu en grande partie de l'enseignement, à savoir la méthode algébrique de Descartes de 1637 et la méthode des équipollences de Bellavitis de 1837.

Quand Descartes introduit la méthode algébrique de résolution des problèmes géométriques, ce qui s'appelle démonstration est le discours axiomatico-déductif que l'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide. Cependant, pour Descartes, il y a bien deux façons de démontrer : par l'exposé déductif (la synthèse) ou par la méthode de recherche (l'analyse).

Le troisième exemple concerne la notion de nombre. Dans les programmes, il y a les entiers, les décimaux, les fractions, les négatifs, les irrationnels, les complexes, qui sont tous considérés, au même titre, comme des nombres. Il semblerait que cela ne pose pas de difficulté : les élèves accepteraient sans problème que le produit de deux négatifs soit positif, « puisque c'est bien ce qu'indique la calculatrice », tout comme la racine carrée correspond à une touche de la calculatrice. Il en résulte que, lorsqu'il faut opérer avec les nombres négatifs ou irrationnels, pourtant si différents des entiers, des élèves considèrent qu'ils se comportent « comme » ces entiers. C'est ainsi que, la somme de deux racines carrées devient la racine carrée de la somme, etc. L'histoire indique les obstacles épistémologiques qu'il a fallu franchir pour étendre la notion de nombre. L'existence et la nature de ces obstacles sont intéressantes pour l'enseignant, tout comme les arguments qui ont conduit à étendre la notion de nombre.

L'histoire culturelle des mathématiques permet de situer les mathématiques dans le contexte philosophique, littéraire, artistique ou social d'une époque. Elle permet de faire des rapprochements historiques significatifs, comme la démonstration de la géométrie grecque, avec la naissance de la démocratie, ou comme la méthode de résolution des problèmes de Descartes, avec la volonté de progrès de son siècle. Les enseignants de mathématiques peuvent ainsi établir des liens avec les enseignements des professeurs de philosophie, mais aussi d'histoire. Un thème, comme l'histoire de la perspective, intéresse aussi les enseignants d'arts plastiques. Dès la fin des années 1970, l'IREM de Caen a commencé à étudier ce thème, qui est devenu maintenant bien connu par les enseignants [15].

Les relations historiques entre les mathématiques et la philosophie sont profondes et constitutives. La Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » comprend, depuis ses débuts en 1975, des enseignants de philosophie. Dans les années 1990, elle a inscrit dans ses séminaires et ses universités d'été la question des relations entre les philosophes et les mathématiques. Il en a résulté un ouvrage, *Les philosophes et les mathématiques*, qui offre un panorama de la façon dont des philosophes ont pensé les mathématiques, mais aussi les inspirations qu'ils ont pu en tirer pour leur théorie de la connaissance ou pour leur doctrine métaphysique. Le panorama couvre seize philosophes, de Platon à Cavaillès, en passant par Pascal, Comte, Husserl ou Wittgenstein [16].

L'apport épistémologique de l'histoire des mathématiques

Nous avons indiqué plus haut trois exemples d'une histoire épistémologique. Plus largement, l'histoire permet d'étudier les rôles du problème, de la conjecture, de la preuve, de l'écriture, de la rigueur, de l'intuition, de l'erreur comme de l'évidence dans la pratique mathématique. Nous avons déjà dit l'intérêt pour les problèmes dans les travaux des IREM. En 1975, les participants de la première réunion se disaient tous adeptes de Bachelard, par référence à sa *Formation de l'esprit scien-*

tifique : son influence reste importante aujourd'hui, même si elle n'est plus directe. Nous parlerons plus loin du rôle de l'expérience dans l'activité mathématique.

Le colloque de Clermont-Ferrand de 2006, qui constituait un point d'aboutissement d'une recherche INRP-IREM menée pendant quatre ans, avait pour thème « Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements ». En effet, les idées de rigueur, d'évidence et de démonstration ont changé au cours des époques : il y a une historicité de ces idées. De même la qualification d'erreur doit être prise dans un contexte historique. On doit donc parler au pluriel, de rigueurs, d'erreurs et de raisonnements, dans l'histoire. Ces constats suscitent beaucoup de questions sur la temporalité des apprentissages mathématiques. Qu'accepte-t-on comme rigoureux, comme évident, au collège, au lycée, à l'université ? Que décide-t-on de démontrer ? Quand et pourquoi ? Est-ce qu'il y a des niveaux de rigueur et d'abstraction au cours de la scolarité ? Lesquels ? Comment distinguer entre erreur et insuffisance d'un raisonnement, au collège, au lycée, à l'université ? Quelles explicitations de ces questionnements et quelles réponses les enseignants doivent-ils élaborer pour eux-mêmes ou pour leurs élèves ?

Le colloque a donné lieu à un ouvrage [17] publié par l'INRP, qui se compose de quatre grandes parties consacrées respectivement aux thèmes des rigueurs, des expériences et des preuves géométriques, des multiplicités des points de vue, des raisonnements entre géométrie et algèbre, dans l'histoire et dans l'enseignement des mathématiques. Les douze chapitres abordent des moments historiques précis, ils s'appuient sur la lecture de textes historiques et ils s'ancrent sur des réflexions épistémologiques et didactiques. La « multiplicité des points de vue » en mathématiques, est un thème abordé par les didacticiens, qui se nourrit par l'approche historique. Renaud Chorlay analyse dans cet ouvrage la mise en place de quatre points de vue en analyse, ponctuel, infinitésimal, local et global, à partir de deux concepts, ceux de croissance et de maximum. Deux moments importants sont mis en évidence dans le travail historique sur les points de vue : celui où ces points de vue sont distingués et celui où ils sont mis en relation. En effet, de nombreux résultats mathématiques consistent à les relier, comme le théorème qui lie le signe de la dérivée aux variations de la fonction. La mise en perspective historique permet ainsi d'éclairer les choix didactiques dans l'enseignement de l'analyse. De nombreux autres chapitres montrent l'intérêt de la confrontation de méthodes ou de démonstrations dans la résolution d'un problème ou dans l'établissement d'un théorème.

L'histoire est riche d'exemples de théorèmes démontrés de nombreuses façons, à commencer par les théorèmes de Pythagore et de Thalès. Pourquoi les mathématiciens ont tenu à donner de nouvelles démonstrations d'un résultat déjà établi ? La réponse concerne la portée de leurs mathématiques. C'est le cas avec Leibniz, qui redémontre des résultats pour mettre en valeur la simplicité de son calcul infinitésimal. La réponse peut aussi être liée à leurs conceptions méthodologiques. Ainsi, Arnauld, qui veut suivre « l'ordre naturel » des figures de la géométrie, donne en 1667 une nouvelle démonstration du théorème dit de Thalès parce qu'il n'admet pas la démonstration d'Euclide, car elle utilise des triangles pour démontrer une proposition sur de simples segments. Dans son mémoire de 1817, Bolzano s'oppose aux démonstrations données jusque-là du théorème des valeurs intermédiaires, pour des raisons méthodologiques et philosophiques. Il ne veut pas que les démonstrations soient réduites à des « fabrications d'évidence », mais qu'elles soient des « fondements ». Parfois, un certain esthétisme est proclamé quand un mathématicien écrit qu'il a voulu une démonstration « plus élégante ». C'est souvent le cas, à partir des années 1810, pour les défenseurs de la géométrie synthétique qui s'opposent aux calculs analytiques.

Tous ces exemples historiques indiquent que les mises en présence de méthodes ou de démonstrations aux prises avec les mêmes questions permettent d'apprécier leurs significations et leurs portées. En particulier, la puissance d'une méthode peut valoir pour son adoption par les mathématiciens. Cela ne vaudrait-il pas aussi pour que nos élèves apprécient de nouvelles connaissances ?

L'histoire des logarithmes est particulièrement intéressante pour explorer les différentes facettes d'une notion. Les quinze chapitres de l'ouvrage *Histoires de logarithmes,* publié par la commission inter-IREM en 2006, sont organisés autour de quinze histoires sur les logarithmes. Il ne s'agit pas d'une histoire exhaustive des logarithmes, mais les histoires choisies marquent des étapes à la fois essentielles et riches pour l'histoire des idées mathématiques, et plus largement des idées scientifiques et culturelles. Elles sont présentées en suivant la chronologie et renvoient les unes aux autres, mais elles peuvent aussi être lues chacune pour elle-même. Leurs titres soulignent que les logarithmes font partie de bien des épisodes de l'histoire des mathématiques, aussi cet ouvrage est conçu également comme une introduction à celle-ci depuis le XVIe siècle jusqu'au XXe siècle. L'ouvrage aurait pu s'intituler aussi bien *Histoires de logarithmes et d'exponentielles*, tant les deux notions de logarithme et d'exponentielle sont proches dans l'esprit des mathématiciens.

Il y a des logarithmes partout, dans les sciences et dans les mathématiques. Il y a de multiples façons de les introduire et de les définir. Voilà deux constats, que l'histoire permet de comprendre et d'approfondir, puisqu'elle indique les contextes des inventions, des conjectures, des problèmes et des résultats, les circonstances des changements de point de vue, et qu'elle montre l'intérêt d'avoir à sa disposition une multiplicité de points de vue. Accompagnés de leur histoire, les logarithmes constituent un sujet de réflexion et d'enseignement passionnant et instructif. D'abord, ce sont des outils de résolution de divers problèmes mathématiques. Ensuite, ils relient différents domaines des mathématiques - arithmétique, algèbre, géométrie et analyse. Enfin, ils interviennent dans de nombreuses sciences, physiques, naturelles et humaines. Ils forment toujours l'une des parties des programmes de l'enseignement mathématique, et constituent ainsi un de ses savoirs pérennes.

L'histoire des mathématiques comme instrument d'une approche pluridisciplinaire

L'histoire des mathématiques conduit à l'histoire des sciences. En effet, la lecture d'un texte ancien nécessite souvent de le situer vis-à-vis des préoccupations scientifiques de l'auteur. La résolution d'un problème demande parfois aussi d'établir des passerelles ou de faire des analogies entre des sciences. Inversement, il est intéressant d'examiner le passage de l'histoire des sciences à celle des mathématiques, parce que la création et l'autonomisation des différentes sciences sont des faits de l'histoire des sciences et parce que la séparation entre les différentes sciences explicite des distinctions établies dans la résolution de problèmes.

La circulation entre l'histoire des mathématiques et l'histoire d'une science peut être du côté des problèmes, par rétrécissement ou au contraire par élargissement d'un problème. Par exemple, le problème inverse des tangentes – c'est-à-dire les problèmes où il faut trouver une courbe connaissant une propriété de ses tangentes – devient, pour Leibniz, le problème auquel doivent se ramener les problèmes physico-mathématiques, comme celui de la chaînette. La circulation peut aussi être du côté des concepts et des méthodes : spécification d'une science par autonomisation d'un concept ou d'une méthode, transfert d'un concept ou d'une méthode d'une science à une autre. Par exemple, Newton fonde son calcul des fluxions sur les notions de mouvement et de temps, qui appartiennent à la physique depuis Aristote.

Le cloisonnement et le décloisonnement des sciences est un propos à historiciser. Par exemple, dans son *Organon*, Aristote condamne le « mélange des genres », comme ceux de l'arithmétique et de la géométrie. Son propos est de fonder la science sur la démonstration axiomatique afin de distinguer la science de l'opinion, de sorte que deux sciences, dépendant d'axiomes différents, ne doivent pas se mélanger. En revanche, Descartes dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, prononce l'union et l'interdépendance des sciences. Son propos est tout autre que celui d'Aristote, puisqu'il s'agit de donner des « règles pour acquérir plus facilement la science ». Or, ce qui est commun à toutes les sciences, ce sont les « opérations de l'entendement » que nous sollicitons pour les acquérir.

De manière générale, toutes les universités d'été, organisées depuis 1984 par la commission inter-IREM pour le Ministère de l'Éducation Nationale, ont été des « universités d'été interdisciplinaires » ouvertes aux enseignants de sciences physiques, de philosophie et d'histoire. La septième, organisée par l'IREM à Nantes en 1997, avait pour thèmes « les mathématiques et la réalité » à propos des relations entre mathématiques et sciences physiques, et aussi « les mathématiques et la navigation ». En 2001, le thème de la neuvième université d'été organisée par les IREMs était « l'histoire des sciences comme instrument d'une approche pluridisciplinaire des enseignements en collège et en lycée [18]».

Nous soulignons ici encore deux enjeux globaux de l'histoire des sciences vis-à-vis de l'enseignement : celui de replacer les sciences dans l'histoire des idées, des sociétés, des techniques, et celui de susciter une réflexion en profondeur sur les méthodes et les contenus de l'enseignement scientifique. L'histoire des sciences peut jouer un rôle essentiel pour garder des enseignements scientifiques cohérents et pour proposer une approche pluridisciplinaire fructueuse. À condition cependant qu'elle ne devienne pas une discipline scolaire de plus, détachée de la pratique des sciences proprement dit. Il s'agit, plutôt et d'abord, de rassembler des enseignants autour de cette histoire, de répondre au souhait exprimé dans le Rapport Lecourt, celui de « montrer aux élèves une réflexion commune de leurs enseignants sur les démarches, les perspectives et les enjeux des sciences qu'on leur enseigne [19]».

Plusieurs exemples ont été donnés lors de l'université d'été de 2001 où l'histoire est une ressource en vue d'une approche pluridisciplinaire de l'enseignement des sciences. Parmi ceux-ci, nous citerons la théorie de la reproduction de Buffon pour les liens entre la biologie et la physique, l'étude de la musique chez Euler pour les liens entre les mathématiques, la physique et la biologie, les conceptions des atomes pour les liens entre la physique et la chimie, les travaux de Galilée, pour les liens entre les mathématiques, la physique et l'astronomie.

L'analyse historique de l'étude des mouvements par Galilée est au carrefour de la philosophie, des techniques, de la physique et des mathématiques. Elle souligne l'opposition entre deux questionnements philosophiques des phénomènes physiques : l'un par les causes et l'autre par les effets de ces phénomènes. Aristote est du côté du premier et Galilée du second. Ensuite, elle situe les travaux galiléens dans le contexte de la recherche des trajectoires des projectiles pour les artilleurs. Les *Discours concernant deux sciences nouvelles* de 1638 se terminent par des tables de portée selon l'inclinaison du jet (ou du canon). Ce problème avait intéressé l'ingénieur et mathématicien Tartaglia au siècle précédent. Puis, elle identifie les rôles différents des hypothèses, des expériences et des raisonnements dans la physique moderne initiée par Galilée. Enfin, elle cerne les difficultés d'une notion physique comme celle d'accélération, tout en rendant compte des difficultés d'ordre mathématique dans la démonstration de la loi de chute des graves.

Les relations entre les mathématiques et les autres disciplines ont été subsumées ces dernières années par la notion de modélisation. Il a été tenu à ce sujet des propos qui semblent contradictoires, mais qui ne le sont pas si on tient compte des différentes acceptions qu'elle a prises dans son histoire, qui est récente. En effet, une théorie mathématique peut avoir besoin de modèle, mais un modèle peut aussi être une construction mathématique élaborée à partir d'une réalité. La notion de mathématiques comme « science expérimentale » dépend aussi d'un va-et-vient. En effet, les mathématiques ont été construites dans l'histoire à partir d'expériences, la géométrie notamment à partir d'expériences spatiales, mais elles sont aussi productrices d'expériences, grâce à l'invention de logiciels de géométrie par exemple.

L'introduction d'une perspective historique dans la formation mathématique

Il y a donc des enjeux spécifiques de l'histoire dans la formation des enseignants. Dans la formation initiale des enseignants, elle va à l'encontre d'un savoir « scolaire » et d'un savoir de plus en plus « hétéroclite ». Dans la formation continue des enseignants, elle autorise une réflexion sur les contenus et les programmes enseignés. Par exemple, l'histoire des rencontres historiques entre probabilités et statistiques est un élément de réflexion vis-à-vis de l'approche statistique de la probabilité d'un évènement [20]. L'introduction de l'histoire des mathématiques va à l'encontre d'une vision arbitraire des procédures mathématiques enseignées. La connaissance historique permet à un enseignant, auquel un élève demande « à quoi cela sert ? », de ne pas répondre « en maths, c'est comme ça qu'on fait » ou « vous le verrez plus tard ».

La lecture des textes anciens est particulièrement bénéfique vis-à-vis de ces enjeux. Elle permet un « choc culturel », en plongeant d'emblée l'histoire des mathématiques dans l'histoire. Il ne s'agit pas alors de lire ces textes en rapport avec nos connaissances, mais plutôt dans le contexte de celui qui les a écrits. C'est à cette condition qu'elle devient une source d'un « étonnement épistémologique », par une mise en question des savoirs et des procédures qui « vont de soi ». Elle confronte la question : pourquoi les contemporains n'ont-ils pas compris telle nouveauté ? à la question : pourquoi les élèves ne comprennent-ils pas ?

La pensée historique conduit à l'idée de rectification des notions, car une notion peut changer dans l'histoire et un même mot peut désigner dans le temps plusieurs notions. Cette idée introduit à son tour celle du long terme dans la temporalité enseignante : c'est-à-dire enseigner en s'appuyant sur le passé de l'élève et en anticipant le futur de l'élève. Par exemple, la notion de fonction comme correspondance, qui est celle de l'enseignement actuel, est l'aboutissement d'un processus historique qui va de la fonction comme expression analytique à la fonction comme dépendance, puis comme correspondance. Dans ce processus interviennent des questions physiques, mais aussi épistémologiques. Or, dans l'enseignement, on voit des élèves qui, après avoir surtout fréquenté des fonctions définies par une expression, résistent à l'idée générale de correspondance. L'histoire des relations entre les notions de fonction continue et de fonction dérivable mérite d'être mise en rapport avec les difficultés dans l'enseignement de l'analyse. Comme souvent, l'histoire permet aux enseignants de se poser la question de l'adéquation entre les notions enseignées vis-à-vis des problèmes étudiés, les unes étant souvent trop sophistiquées et les autres trop simples.

Les enseignants peuvent nourrir leur enseignement par une réflexion historique et épistémologique, mais ils peuvent aussi introduire directement des éléments historiques auprès des élèves. Un enseignement autonome de l'histoire des mathématiques ou des sciences pourrait conduire à une discipline autonome, coupée des enseignements scientifiques, avec le risque de perdre le bénéfice que nous attribuons à l'histoire. La voie développée par les IREMs est celle de « l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement ». Il ne s'agit pas de donner des cours d'histoire, ni non plus d'un enseignement calqué sur l'histoire. Cette expression désigne la mobilisation de toute la réflexion historique et épistémologique de l'enseignant. Il s'agit d'intégrer l'histoire dans l'enseignement, de dater l'invention d'un concept, d'expliquer la portée historique d'un concept, de faire lire des textes anciens, mais aussi de résoudre des « problèmes historiques ». L'objectif n'est pas de créer une discipline ou un moment scolaire complètement détaché de la pratique des mathématiques.

Le premier colloque organisé par les IREMs à la fin des années 1978 portait sur « l'introduction d'une perspective historique » dans l'enseignement. Un ouvrage relatant de telles expériences fut publié par l'IREM de Lyon à l'occasion du congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME) qui s'est tenu en 1988 à Budapest. Dès 1980, la Commission inter-IREM a participé aux rencontres du « Groupe international on the relations between History and Pedagogy of Mathematics » (HPM) affilié à ICME. L'ouvrage de 1988, intitulé *Pour une perspective historique sur l'enseignement des mathématiques* [21], a ensuite été édité en anglais par l'Association britannique des professeurs de mathématiques.

La commission inter-IREM a écrit une suite avec l'ouvrage *Des défis mathématiques d'Euclide à Condorcet*, qui est paru en 2010 chez Vuibert. Il rassemble neuf expériences d'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, depuis le collège jusqu'au post-baccalauréat. Il ne propose pas une formule toute faite ou une réponse unique. Les différentes expériences relatées par leurs auteurs indiquent la variété des ressources qu'un enseignant de mathématiques peut trouver dans l'histoire de sa discipline à tous les niveaux d'enseignement. En effet, si les auteurs des chapitres indiquent les circonstances dans lesquelles ces expériences ont eu lieu, c'est pour cerner leurs conditions et pour inviter les lecteurs à les adapter ou à les transférer à d'autres lieux, d'autres classes ou d'autres niveaux. Car beaucoup d'elles peuvent être imaginées dans d'autres classes que celles où elles ont d'abord eu lieu. Ceci parce que les programmes et les élèves changent, mais aussi, plus profondément, parce que l'histoire des mathématiques permet d'explorer des savoirs pérennes, qui font partie du socle commun de l'enseignement des mathématiques.

Les différents chapitres de cet ouvrage ont tous pour point de départ des problèmes historiques, mathématiques ou non. Ils parcourent beaucoup d'époques très diverses, depuis les Pythagoriciens jusqu'au XXe siècle. Ils concernent la géométrie, l'analyse, l'algèbre aussi bien que les probabilités. Nous les avons répartis en quatre parties. La première partie concerne la mesure des grandeurs géométriques, qui correspond aux savoirs enseignés en collège et en seconde. La deuxième partie s'intéresse à la représentation des grandeurs pour comprendre leurs relations au numérique et au vectoriel. Les probabilités font l'objet de la troisième partie. Les problèmes d'approximation rapprochent des deux derniers chapitres de l'ouvrage.

L'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement nécessite, qu'en amont, les enseignants reçoivent une formation. Nous espérons donc que cette formation sera donnée partout en formation initiale. Les IREMs continuent à organiser, quand cela est possible, des stages pour la formation continue. Les universités d'été européennes destinées à rassembler enseignants, didacticiens et historiens continuent à être organisées : la prochaine aura lieu à Vienne en Autriche en juillet 2010. L'histoire continue.

Notes

1 Institut de France, Académie des Sciences, *La formation des professeurs à l'enseignement des sciences*, novembre 2007.

2 une rétrospective historique est parue lors des dix ans de la Commission inter-IREM dans le Bulletin de l'APMEP : « Histoire et enseignement des mathématiques, dix ans d'histoire des mathématiques dans les IREM », *Bulletin APMEP*, 358, avril 1987, pp.143-163. Je reprends ici certains éléments d'un article plus récent : « Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement » paru dans un numéro de la revue *Tréma* coordonné par Murielle Guedj, IUFM de Montpellier, 2006, pp.21-28.

3 Barbin-Le Rest, Evelyne, « Histoire et enseignement des mathématiques, dix ans d'histoire des mathématiques dans les IREM », *Bulletin de l'APMEP*, 358, 1987, p.177.

4 l'expression est de Rudolf Bkouche, voir le Bulletin inter-IREM n°18 « Épistémologie et histoire des mathématiques » publié en 1979.

5 dans un mélange de textes présenté au Congrès ICME de Berkely puis dans la préface du premier ouvrage de la CII : IREM, *La rigueur et le calcul*, Paris, Cedic, 1982, p. 6.

6 Barbin, Evelyne, « Les effets pervers de la Réforme des Mathématiques Modernes », *Société Française*, n°33, décembre1989, pp. 26-28.

7 IREM, *La Rigueur et le calcul*, op. cit., p. 5.

8 IREM, *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Paris, Ellipses, 1993.

9 IREM, *4000 ans d'histoire des mathématiques*, IREM de Rennes, 2002, p. 10.

10 pour reprendre la fameuse formule de Rudolf Bkouche utilisée dans le « Point de vue » de *Repères-IREM*, n°9, octobre 1992.

11 sur l'utilisation de l'histoire pour l'enseignement des angles, voir Guichard, Jean-Paul, « Les angles au collège : arpentage et navigation » in IREM, *Enseignement des mathématiques : une perspective historique*, Paris, Vuibert, 2010.

12 Martine Bühler est membre de l'équipe M:ATH (Mathématiques : Approche par les Textes Historiques) de l'IREM Paris 7.

13 Barbin, Evelyne, « Histoire et enseignement des mathématiques » in *Histoire des sciences et des techniques*, Rosmorduc, J. (éd.), 1997, p.72.

14 sur les méthodes de fausse position, voir les publications de l'IREM de Toulouse, voir aussi Chabert, Jean-Luc et ali, *Histoires d'algorithmes*, en cours de réédition chez Belin.

15 voir les publications de l'IREM de Caen sur le site de cet IREM. L'IREM de Caen a organisé en 1986 un colloque *Destin de l'art, desseins de la science*. Voir aussi les écrits de Jean-Pierre Le Goff dans *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Paris, Ellipses, 1993, et dans *Arts et sciences à la Renaissance*, Paris, Ellipses, 2007.

16 Barbin, Evelyne, Caveing, Maurice (éd.), *Les philosophes et les mathématiques*, Paris, Ellipses, 1996.

17 Barbin, Evelyne et Bénard, Dominique (éd.), *Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements*, Lyon, INRP, 2007.

18 *La pluridisciplinarité dans les enseignements scientifiques : 1er tome Histoire des sciences*, Actes de la Desco, CRDP Basse-Normandie, 2003. Ils sont disponibles à l'adresse eduscol.education.fr/D0126/uescience_histoireT1_acte.pd

19 « Rapport sur l'enseignement de la philosophie des sciences » de Dominique Lecourt au Ministre de l'Éducation, de la Recherche et de la Technologie.

20 voir IREM, *Histoires de probabilités et de statistiques*, Paris, Ellipses, 2004.

21 IREM, *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, Lyon, IREM, 1988.

Bibliographie

Barbin-Le Rest, Evelyne, « Dix ans d'histoire des mathématiques dans les IREM », *Bulletin de l'APMEP*, n°358, 1987, pp.175-184.

Barbin, Evelyne, Caveing, Maurice (éd.), *Les philosophes et les mathématiques*, Paris, Ellipses,1996.

Barbin, Evelyne, « Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement » *Tréma*, Guedj, Murielle (éd.), IUFM de Montpellier, 2006, pp.21-28.

Barbin, Evelyne, Bénard, Dominique (éd.), *Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements*, Lyon, INRP, 2007.

Bkouche, Rudolf, « Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science », *Repères IREM*, n°39, 2000, pp. 35-59.

IREM, *La rigueur et le calcul*, Cedic, Paris, 1982.

IREM, *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques,* IREM de Lyon, Université de Lyon, 1988.

IREM, *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, actes de la 1ère université d'été européenne, Université de Montpellier, 1993.

IREM, *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Paris, Ellipses, 1993.

IREM, *4000 ans d'histoire des mathématiques*, actes du colloque inter-IREM, Université de Rennes, 2002.

IREM, Barbin, Evelyne (dir.), *Des défis mathématiques d'Euclide à Condorcet*, Paris, Vuibert, 2010,

Ministère de l'éducation nationale, *La pluridisciplinarité dans les enseignements scientifiques : 1er tome Histoire des sciences*, Actes de la Desco, CRDP Basse-Normandie, 2003.

IREM, *Histoires de probabilités et de statistiques*, Ellipses, Paris, 2004.

IREM, *Histoires de logarithmes*, *Ellipses*, Paris, 2006.

IREM, *Enseignement des mathématiques : une perspective historique*, Paris, Vuibert, 2010.