ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES EN SIXIEME A PARTIR DES GRANDEURS

Fabrice TARRA
ftarra@free.fr
Irem de Poitiers

*Les mathématiques ont pour objet de mesurer,
ou plutôt de comparer les grandeurs ;
par exemple les distances, les surfaces, les vitesses, etc.*
(Bossut, 1784)

L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs.
(Chevallard, Bosch, 2002)

La proposition présentée dans cet article s'inscrit dans le cadre d'une recherche INRP pour redynamiser l'enseignement des mathématiques menée depuis plus de trois ans par l'équipe Collège de l'Irem de Poitiers [1]. Cette recherche, centrée, pour l'instant, sur le programme de sixième, a conduit l'équipe à structurer l'année autour des grandeurs, et à définir pour les élèves un parcours d'étude et de recherche sur chaque grandeur à partir de questions mathématiques fondamentales et d'une organisation mathématique qui permette de construire la grandeur en question. Cette nouvelle façon de concevoir et de faire le programme de sixième vit à travers sa mise en œuvre en classe par les membres du groupe et par des collègues de l'académie de Poitiers.

1. A quoi ça sert de « faire » des mathématiques ? Les points de vue qui ont motivé notre démarche.

Ce que nous avons à enseigner se présente, dans les programmes, comme une énumération de compétences regroupées en quatre domaines : Organisation et gestion de données, fonctions ; Nombres et Calculs ; Géométrie ; Grandeurs et mesures. Certes le programme nous laisse totalement libres d'organiser notre enseignement, mais cette présentation a induit un découpage du savoir en de multiples chapitres, souvent étanches les uns

1 CHEVALARIAS Thierry, DELIGT Frédéric, GUICHARD Jean-Paul, LEBOT Bertrand, MERCIER Jean-Paul, MESNIER Walter, PACAUD Gaëlle, PEYROT Sébastien, REDONDO Cyril, TERRADE Laurent.

aux autres, dont le seul but est de faire acquérir la dizaine de savoir faire qui y sont rassemblés. Ainsi, on apprend à ajouter des fractions pour savoir ajouter des fractions. On apprend à calculer une longueur ou un angle qu'on aurait tout aussi bien pu mesurer. On apprend les mots images et antécédents pour apprendre le vocabulaire des fonctions que n'utiliseront ni les sciences physiques ni la biologie. On apprend à développer et à factoriser pour savoir développer et factoriser. On apprend à tracer des figures, etc. Mais pourquoi faut-il apprendre tout ce vocabulaire, toutes ces techniques ?

Cette présentation émiettée du savoir, sans aucune organisation, l'a coupé de ses racines, de ses raisons d'être. Et la tradition l'a sédimenté : c'est un savoir mort qui n'est plus questionné. Par exemple rendre rationnel un dénominateur était fonctionnel dans le cadre du calcul numérique à la main. Or savoir d'où viennent ces outils et techniques et pourquoi les hommes les ont inventés, c'est ce qui permet de comprendre ce que sont les mathématiques et pourquoi on en fait.

Il nous est donc apparu important de savoir de quoi s'occupent les mathématiques, et comment elles s'en occupent — ce qui en fait un savoir qui s'ancre dans l'histoire de l'humanité et dans la vie quotidienne des hommes —, de connaître les questions que se sont posées et que se posent les hommes et dont les mathématiques se sont emparées, et de connaître les outils qu'elles ont élaborés pour y répondre.

Bien sûr, l'on ne pourra pas examiner toutes les questions ni tous les outils. Il s'agira dans un premier temps de choisir des questions fondamentales et de progresser petit à petit dans les réponses. A ce propos nous faisons nôtre ce que dit Poincaré : « *Il n'y a pas des problèmes qu'on se pose, il y a des problèmes qui se posent. Il n'y a pas de problèmes résolus, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus.* » (Poincaré, 1908). Où trouver ces questions ? En revenant aux sources du savoir, donc en revisitant son histoire, et en recherchant où vivent les mathématiques dans notre société : ce qu'à la suite dYves Chevallard, nous nommerons son écologie.

2. La structuration de l'année de sixième autour des grandeurs et des parcours d'étude et de recherche.

2.a. *Notre cheminement*

Nous avons regardé le programme de sixième à un niveau général de présentation des contenus. A trop rester dans les compétences ponctuelles, on risquait de ne pas rentrer dans des problématiques et des questions générales. Alors comment faire ? Nous avons lu le programme, nous nous en sommes imprégnés et nous avons privilégié les « introductions générales pour le collège » « classe de sixième » et « les bandeaux introductifs » de chaque domaine.

Nous avons aussi dégagé des points forts du programme de sixième (outils nouveaux) et des fils rouges (outils utiles presque partout). D'où le tableau ci-contre qui permet de savoir quoi enseigner d'une façon assez générale.

Chaque point fort a été étudié. Nous avons par exemple mené notre réflexion autour de la multiplication des décimaux. Cette opération généralisée se retrouve dans des « mathématiques mixtes » (Bkouche, 2006, 2003) telles que « comment calculer des prix ? ». Finalement, nous nous sommes rendus comp-

Points forts du programme de sixième (dominantes et problèmes nouveaux importants)	**Fils rouges** du programme de sixième (savoirs, techniques, démarches utiles presque partout)
Périmètre, longueur du cercle Critique des graphiques Symétrie orthogonale. Multiplication des décimaux généralisée. Aire. Rapporteur et mesure des angles. Fractions. Notion de quotient. Notion de volume, perspective. Outils pour traiter la proportionnalité.	Notion de quotient. Notion de proportion. Calcul (mental, posé…) TICE Résolution de problèmes Justification en géométrie comme en calcul Références concrètes sur certaines grandeurs.

te que la multiplication des décimaux intervenait pour calculer un prix et l'aire du rectangle. Afin de ne pas retomber dans un découpage par compétences et de ne pas insérer dans le même chapitre des calculs de prix et d'aires, nous avons donc commencé à envisager que la technique pourrait se faire selon deux grandeurs : *les aires et les prix*. Nous avons donc continué à chercher à quels problèmes répondaient les compétences répertoriée dans les points forts. A chaque fois, les grandes questions qui en dérivaient reposaient sur des grandeurs ou des constructions.

2.b. *Une structuration de l'année selon les grandeurs*

Ainsi, on aurait à parler du produit des décimaux, sur des calculs au quotidien et sur les aires. Le même travail a été fait sur des angles… De là l'idée de travailler un découpage de l'année selon les grandeurs : longueurs, aires, volumes, angles et un autre sur le calcul au quotidien (prix, masse, durée, quantité…). Cela nous faisait six chapitres sur les grandeurs, dans lesquels on pouvait bien introduire des problèmes qui soient une réponse à des questions pour lesquelles les mathématiques ont élaboré les savoirs et savoir faire figurant dans le programme. Travailler sur les grandeurs a été un choix de l'équipe car on a pressenti qu'alors il serait plus facile de retrouver une écologie des savoirs. Mais il restait quelques points forts du programme de sixième en dehors du champ des grandeurs.

Nous avons alors poursuivi notre réflexion. Pourquoi la symétrie orthogonale ? Pour reproduire une figure. Qui en a besoin ? Pourquoi ? Il va sans dire que le travail restait en suspens en attendant de trouver des réponses… De même il restait des points forts à intégrer dans la progression comme pi et les partages. Finalement nous avons obtenu pour la première année d'expérimentation huit chapitres. Chaque chapitre a alors été construit comme un parcours d'étude et de recherche centré sur quelques grandes questions.

Au collège, le genre de tâche à aborder s'enrichit de nouveaux types de tâches mais le genre reste peu ou prou le même qu'en primaire. Il s'agit de *Comparer*…, *Calculer*…, *Partager*…, *Construire*…, *Mesurer*…. Il y en a peut-être d'autres mais il faut dire qu'au collège, on peut estimer qu'ils sont essentiels. Ces genres de tâche se déclinent en des types de tâche comme par exemple, comparer des aires, calculer des aires, partager une aire, mesurer une aire… Ou bien encore dans un autre chapitre : *Comparer des longueurs*, *calculer des longueurs…*

Finalement, nous nous sommes rendu compte que c'est le travail sur les grandeurs qui détermine les grandes questions, chaque chapitre répondant à une ou deux grandes questions. Voici donc (ci-dessous) l'organisation que nous avons expérimentée la première année.

Mais une réflexion plus approfondie sur la notion de grandeur (Pressiat, 2001, 2006 ; Barbin, 2007 ; document d'accompagnement des programmes, collège, 2007) et l'usage fait de la symétrie dans le chapitre des aires et des angles nous a amenés à centrer complètement notre progression sur les grandeurs, la symétrie intervenant comme un outil au service des grandeurs angles et aires et les partages se trouvant naturellement impliqués dans la construction de chaque grandeur. Du coup, le découpage de l'année de sixième que nous expérimentons depuis deux ans comporte les six chapitres suivants :

1. Les angles	2. Les durées
3. Les aires	4. Les prix
5. Les volumes	6. La longueur du cercle.

Un trimestre pour chaque couple de chapitres.

Il fallait ensuite concevoir chaque chapitre comme un parcours d'étude et de recherche : étude de la grandeur à partir de la recherche de réponses à quelques grandes questions que l'on peut se poser à propos de cette grandeur. Pour élaborer un tel parcours nous avons essayé de répondre à deux questions : *Pourquoi (les angles, les aires…) ? et où (dans*

Chapitres	**Les grandes questions étudiées**
Chapitre 1 : Les longueurs.	Comment calculer une longueur ? Comment comparer deux longueurs ?
Chapitre 2 : Le système décimal.	Comment calculer au quotidien un prix ? une durée ?
Chapitre 3 : La symétrie axiale.	Comment construire une figure symétrique ? Le symétrique d'une figure ?
Chapitre 4 : Les aires.	Comment comparer des aires ? Comment calculer une aire ?
Chapitre 5 Les angles.	Comment mesurer l'inaccessible ? Comment s'orienter ?
Chapitre 6 : Les partages.	Comment partager en deux, trois, quatre… parties égales ?
Chapitre 7 : Les volumes.	Comment comparer des volumes ? Comment calculer un volume ?
Chapitre 8 : Le nombre « pi ».	Comment mesurer le courbe ?

les activités humaines actuelles et passées) ? Nous avons donc fait, pour chaque grandeur, des recherches à la fois historiques et de repérage de l'usage de la grandeur dans la vie sociale actuelle.

3. Élaboration du chapitre « aires »

3.a. *Des questionnements qui informent sur son déroulement*

Dans le domaine mathématique des aires, les problèmes renvoient essentiellement à deux grandes questions : comment comparer des aires ? Comment calculer une aire ?

Au niveau de la sixième ces questions peuvent se décliner sous des formes dont voici quelques exemples : quelle surface est la plus grande, la plus petite ? Les échanges de terrains sont-ils équitables ? Combien de carreaux pour carreler ma cuisine ? Combien de mètres carrés font les murs que j'ai à repeindre ?

Ce seront ces deux grandes questions qui seront à la base de notre analyse sur les aires afin de développer un parcours d'étude dans lequel s'inséreront des techniques justifiées au service des deux types de tâche à résoudre : « calculer une aire » « comparer deux aires », enrichissant les genres de tâche « comparer… » « calculer… » qui s'y rapportent au niveau du collège en sixième.

3.b. *Où vit la notion d'aire ?*

Des raisons d'arpentage, d'urbanisme ou encore d'architecture l'impliquent depuis la nuit des temps : ce sont donc des raisons pratiques qui sont à l'origine des mesures d'aire et de la géométrie. Aujourd'hui encore, on retrouve cette classe de problèmes à laquelle on peut rajouter des problèmes de bricolage, de jardinage…. Il suffit de chercher dans les catalogues publicitaires ou les prospectus pour avoir un éventail d'utilisation des aires.

Nous pouvons donc privilégier des questions qui se posent dans des domaines importants pour lesquels la notion d'aire répond à des questions humaines à un niveau familial ou sociétal :

— Comparer des surfaces agricoles pour les échanger, les acheter, les vendre.
— Comparer ou évaluer des aires à partir de figures à l'échelle, à partir d'un plan, photos aériennes (Google Earth, IGN, ..), à partir d'un schéma.
— Calculer une aire pour estimer une quantité de peinture, de semence, de tuiles, de carrelage, de papier pour un patron ou encore pour déterminer un prix (terrain à bâtir,…).
— Calculer une dimension dans un problème de conservation d'aire, de remembrement.

3.c. *Histoire des aires*

Pour que ces questions sur les aires se structurent, elles doivent s'intégrer dans une organisation mathématique. La théorie des aires est assez riche pour que l'on puisse aller voir ce qui s'est passé, quels sont les problèmes majeurs qu'ont eu à surmonter les hommes, comment ils s'y sont pris. La notion mathématique d'aire que nous allons proposer repose donc aussi sur une étude épistémologique et historique. Quid des aires au fil du temps ? Quelle théorie ? Sur quoi repose-t-elle ? Nous sommes allés revisiter l'histoire et les œuvres importantes.

Chez les grecs, on retient que dans *Les éléments* d'Euclide, par des constructions (et non des découpages) tout polygone peut, par des transformations reposant sur les compléments se transformer en un parallélogramme dont un angle et un côté sont fixés (Euclide, 1990). Cette propriété est à rapprocher du théorème de Hadwiger-Glur : « Deux polygones de même aire sont équidécomposables en un nombre fini d'étapes sous forme de triangles ». In fine, tout polygone est ramené à un carré de même aire.

Chez les chinois, on note que, dans le livre de Liu Hui, *Les Neuf Chapitres*, (IIIe s.) le premier chapitre est intitulé : « Champ rectangulaire ». (Liu Hui, 2004). Le rectangle est la figure clé de cette partie comme le nom du chapitre nous l'indique. Toutes les autres aires s'y rapportent. Il traite successivement de l'aire du triangle, du champ oblique (de forme trapézoïdale) et du trapèze. Les formules d'aires de ces trois figures sont déduites de celle du rectangle par tracé d'un rectangle d'aire équivalent à la figure donnée sur une partie de celle-ci de telle manière que les morceaux en plus correspondent aux morceaux en trop (« ce qui entre et ce qui sort se compensent »). Ces quatre aires (qu'il appelle champ) constituent toutes les figures rectilinéaires étudiées.

Pour les unités d'aire, si dans l'histoire et la vie pratique on a pour unité d'aire parfois des rectangles, l'usage s'est établi de considérer le carré de longueur unité comme unité d'aire, et depuis la Révolution, le système métrique décimal comme système de référence. On peut alors évaluer une aire par des réseaux de carrés de plus en plus fins (Lebesgue, 1935). Cette technique permet de justifier la formule de l'aire du rectangle, formule qui va permettre de calculer l'aire de tous les polygones qu'on sait pouvoir être réduits à un rectangle de même aire. L'encadrement des aires par des sommes de rectangles est alors une démarche de base pour trouver les aires de surfaces délimitées par des courbes, démarche que l'on retrouve aussi bien chez les chinois, que chez Cavalieri ou qu'avec l'intégrale de Riemann (Rogalski, 2001).

3.d. *Les points du programme abordés*

A partir du moment où nous avons fait un choix conscient et justifié de faire un découpage de l'enseignement basé sur des domaines, il est judicieux de considérer les compétences officielles concernant le domaine des aires. On lit ainsi dans le document d'accompagnement des nouveaux programmes de l'école primaire en Mathématiques « Articulation école collège » :

> « 2. 6 Grandeurs et mesures
> Le nouveau programme de l'école primaire insiste sur la nécessité de travailler la compréhension des grandeurs, par des activités de comparaison, de classement et de rangement, préalablement à leur mesure et à l'utilisation de formules.
> …/…
> *La notion d'aire est en cours de construction à la fin de l'école élémentaire, le travail visant d'abord la maîtrise de la grandeur (distinction entre aire et périmètre). Les élèves sont aussi entraînés à déterminer des aires par pavage et dénombrement, sans que l'unité d'aire soit forcément un carré. Le travail sur les formules est limité à l'aire du rectangle. En sixième, le travail sur les aires est repris dans le même esprit pour consolider et stabiliser les connaissances des élèves et pour y intégrer celles du programme de sixième. …/…* »

C'est nous qui soulignons pour indiquer la direction à suivre. Avant de lire les compétences présentées de façon linéaire, la lecture de ce paragraphe « grandeurs et mesures » invite à s'engager dans une organisation mathématique. Les différentes étapes d'une progression possible proposent un découpage qui peut se présenter en trois études. Chacune de ces études a un objectif précis qui est :

— Affirmer le sens de la notion d'aire dans le cadre des grandeurs pour la première.
— Utiliser le pavage et le dénombrement pour la deuxième.
— Travailler la formule pour le troisième.

On lit de plus dans les programmes des collèges mathématiques classe de sixième, BO. Hors série N° 6 avril. 2007, annexe 2, p. 28 e 30 :

> « 4. Grandeurs et mesures
> En continuité avec le travail effectué à l'école élémentaire, cette rubrique s'appuie sur la résolution de *problèmes souvent empruntés à la vie courante*. Elle permet *d'aborder l'histoire des sciences*, d'assurer des liens avec les autres disciplines, en particulier la technologie et les sciences de la vie et de la Terre, de réinvestir les connaissances acquises en mathématiques, mais aussi d'en construire de nouvelles. Par exemple, *le recours aux longueurs et aux aires permet d'enrichir le travail sur les nombres non entiers et les opérations étudiées en classe de sixième*. Il est important que les élèves disposent de références concrètes pour certaines grandeurs et soient capables d'estimer une mesure (ordre de grandeur). L'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime. Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens. A travers les activités sur les longueurs, les aires et les volumes, *les élèves peuvent élaborer et utiliser un premier répertoire de formules*.»

Le travail précédent nous a permis de mettre en évidence des domaines où vivent les aires, problématique qui répond à une nécessité présentée ci-dessus. Des problèmes liés à la vie sociale et des problèmes historiques permettent d'enrichir le travail sur les aires et sur les nombres non entiers, et de se constituer une banque d'exercices pour préparer les études mais aussi travailler les techniques.

Nous énumérons les compétences à atteindre dans le tableau récapitulatif de la page suivante.

Ces compétences sont nombreuses. Les exercices qui naîtront de la mise en place de notre parcours sur les aires doivent avoir pour objectif une maîtrise des techniques qui répondent à des compétences du programme. A ce titre, il nous paraît nécessaire de préciser que le choix des exercices se fera d'une part principalement par les domaines de la vie des hommes dont ils sont issus, et d'autre part par la qualité du questionnement posé. Pour nous, résoudre un exercice sur les aires, c'est se placer, le plus souvent possible, dans une situation où la notion vit, de façon naturelle, et où l'on a à résoudre une tâche relevant de l'un des deux types : comparer ou calculer. Il s'agit alors d'investir le maximum de domaines et de questionnements possibles pour mettre à l'épreuve les techniques et les faire évoluer le cas échéant.

Le programme, vu dans son ensemble, nous permet déjà d'appréhender des compétences présentes dans les autres paragraphes qui vont apparaître dans ce cha-

Contenus	Compétences	Exemples d'activités, commentaires
4.3 Aires : mesure, comparaison et calcul d'aires *[Programme cycle 3 ; document d'application, p.37-38]*	- Comparer des aires. - Déterminer l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple. - Différencier périmètre et aire. - Calculer l'aire d'un rectangle dont dimensions sont données. - Connaître et utiliser la formule donnant l'aire d'un rectangle. - Calculer l'aire d'un triangle rectangle. - Effectuer pour les aires des changements d'unités de mesure.	Poursuivant le travail effectué à l'école élémentaire, les élèves sont confrontés à des problèmes dans lesquels il faut : - comparer des aires à l'aide de reports, de décompositions, de découpages et de recompositions, sans perte ni chevauchement ; - déterminer des aires à l'aide de quadrillage et d'encadrements. Certaines activités proposées conduisent les élèves à comprendre notamment que leurs sens de variation ne sont pas toujours similaires. Au cycle 3 de l'école élémentaire, les élèves ont calculé l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés au moins était de dimension entière. En sixième, le résultat est généralisé au cas de rectangles dont les dimensions sont des décimaux [cf. § 2.Nombres et calcul]. Des manipulations permettent aux élèves de comprendre le passage du rectangle au triangle rectangle. A partir de là, ils peuvent être confrontés au calcul d'aires de figures décomposables en rectangles et triangles rectangles. Comme pour les longueurs, l'utilisation des équivalences entre diverses unités est préférée à celle systématique d'un tableau de conversion.

pitre. C'est ainsi le cas pour le paragraphe *Proportionnalité* où on lit :

> « Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures). L'étude de la proportionnalité dans le cadre purement numérique relève du programme de la classe de cinquième. »

On pense en particulier au cas bien précis du rectangle qui se partage en deux triangles rectangles de même aire selon la diagonale car une surface deux fois plus petite a une aire deux fois plus petite. On pense aussi à un rectangle dont la longueur d'un côté est fixée et dont l'aire est proportionnelle à l'autre côté.

C'est aussi le cas pour le paragraphe *Nombres entiers et décimaux* où on lit :

> « La multiplication de deux décimaux est, en revanche, à mettre en place en sixième, aussi bien du point de vue du sens que du point de vue de la technique de calcul posé. Le sens de la multiplication de deux décimaux est en rupture avec celui de la multiplication de deux entiers notamment par le fait que, dans ce cas, "une multiplication" n'agrandit pas toujours. »
> « La maîtrise du calcul passe en particulier par la capacité à trouver dans des situations numériques simples rencontrées à propos de problèmes concrets : le nombre par lequel multiplier un nombre donné pour obtenir un résultat donné (cf. paragraphe 2.2 : Division, quotient). »

On pense en particulier à la formule de l'aire du rectangle qui est valide pour les nombres entiers et aussi les nombres décimaux. Le sens de la multiplication peut alors se construire sur une représentation de mieux en mieux assimilée de la notion d’aire. Le travail sur le calcul d’aire sera l’occasion d’enrichir la compréhension des nombres non entiers et des opérations permettant alors de résoudre des problèmes complexes de remembrement, par exemple, pour lesquels les formules d’aires sont d’un grand secours.

C’est enfin le cas pour le domaine entier de la *Géométrie* où on lit dans le bandeau introductif :

« Les connaissances géométriques permettent de modéliser des situations (par exemple représenter un champ par un rectangle) et de résoudre ainsi des problèmes posés dans l’espace ordinaire. Les formes géométriques (figures planes, solides) se trouvent dans de nombreux domaines : architecture, œuvres d’art, éléments naturels, objets d’usage courant. Ces mises en relation permettent peu à peu de dégager le caractère universel des objets géométriques par rapport à leurs diverses réalisations naturelles ou artificielles. »

Le rectangle joue un rôle majeur dans le programme de sixième. Se ramener à lui par des découpages, des assemblages, permet de ne considérer que cette figure pour la suite des études. Comment se ramener à un rectangle ? En mettant au point des stratégies qui reposent sur des considérations de symétrie orthogonale ou bien en utilisant des propriétés des figures au programme de sixième qui trouvent, dans ce cadre, une place naturelle et fonctionnelle. Nous voyons ainsi comment, à travers l’étude des aires, se construisent à la fois le numérique et le géométrique. Et, à ce propos, on ne peut s’empêcher de penser à ce que dit Lebesgue dans *La mesure des grandeurs* (Lebesgue, 1935) :

« Mais l’étude des aires et des volumes a une utilité plus haute qu’il faut envisager : elle fait comprendre comment, pour des fins pratiques, les hommes ont pu être conduits à construire la géométrie et elle justifie leur effort. »
« Les nombres quelconques ne sont eux aussi que des symboles destinés à servir de comptes rendus à des expériences physiques; schématisées géométriquement certes, mais de telle manière que l'on peut presque dire que l'opération n'a pas été schématisée, que ce sont seulement les objets sur lesquels elle porte qui l'ont été. Au lieu de placer un mètre en bois sur le mur à mesurer, nous avons porté un segment unité sur un segment à mesurer. »

3.e. *Synopsis du parcours*

Toutes les considérations précédentes nous permettent maintenant d’imaginer un parcours d’étude et de recherche dont l’organisation mathématique se résumerait ainsi.

1) *Premier temps de l'étude :* les découpages. On met en lumière que, par des découpages ou des assemblages, on peut comparer des aires, résolvant ainsi toute une classe de problèmes et mettant au point la notion de grandeur. Nous mettons l’accent sur une figure particulière : le rectangle. Sa place doit apparaître comme emblématique dans ce domaine.

2) *Deuxième temps de l'étude :* les quadrillages. Il apparaît que le maillage du plan par un réseau est un outil efficace pour résoudre une classe supplémentaire de problèmes. Il permet de valider la formule de l'aire d'un rectangle quels que soient les nombres qui mesurent ses côtés.

3) *Dernier moment de l'étude* : les formules. On montre la richesse de l’utilisation de la formule précédente pour résoudre toute une

nouvelle classe de problèmes. Les techniques nouvelles, loin de se substituer aux techniques précédentes, doivent apparaître comme répondant à une classe supplémentaire de problèmes dont les exercices en feront une routine, quitte à ce que la technique s'améliore. Est-ce le découpage, l'assemblage, le décalquage qui me sera utile ? Est-ce l'utilisation du maillage, du réseau ? Est-ce l'utilisation de la formule ? Sont-ce les trois techniques en même temps ?

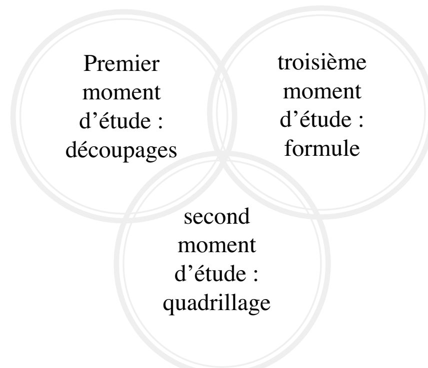
C'est au prix d'une telle construction du parcours que le savoir apparaîtra comme une connaissance disponible. La progression dans l'étude ne doit pas écarter les connaissances précédentes. Même si les moments d'études s'enchaînent chronologiquement, ils ne se hiérarchisent pas selon « l'importance » du savoir. Seule la classe de problèmes associés au type de tâche et la construction de la grandeur justifient le découpage. La chronologie du parcours répond donc à une autre exigence, celle de la nécessité d'une organisation mathématique utile à la construction des techniques, mais pas à leur performance relative.

4. Le parcours sur les aires

Comment s'organisent les « études », « la synthèse », les « exercices » et les « évaluations » dans notre parcours sur les aires ?

4.a. *Une banque de situations.*
[Voir un extrait en annexe 1]

L'organisation est basée sur le *dualisme problème-synthèse* : l'activité mathématique émerge sur la base d'une activité originelle puisée au cœur de l'écologie de la notion. A première vue, les mathématiques ne sont peut-être pas là mais, d'après l'analyse qui a été faite, elles doivent intervenir pour combler les



Chaque ellipse représente une classe de problèmes et d'exercices, qui seront résolus grâce aux techniques mises en place. Leur résolution permettra de travailler la technique, de l'améliorer. L'intersection des ellipses fait apparaître que les techniques des unes peuvent résoudre les problèmes des autres, que la frontière n'est pas étanche.

lacunes. La séparation entre le monde physique et les mathématiques interviendra donc à ce moment. Alors, on aura séparation des objets communs entre la réalité et les mathématiques ; on va donc avoir une rencontre côte à côte « *méthode, notion et résultats* » puis, dans un second temps, nous aurons la *synthèse*, fruit d'un travail de la classe sous la direction du professeur. Les problèmes seront alors repris pour améliorer la technique.

Nous ne voulons pas faire des exercices d'application comme il y aurait des mathématiques appliquées mais des exercices qui sont une base expérimentale active, mettant les techniques à l'épreuve.

Nous avons donc créé une *banque de situations* qui répondent toutes à des questions qui informent notre parcours. De cette banque, sont issues les situations qui servent de point de départ à nos études. Ces études permettent de répondre chacune à un type de tâche. Elles s'intègrent dans le parcours par leur dimension sociale ou citoyenne. Elles reposent sur des mathématiques signifiantes dans le sens où « elles prennent sens ». Ce n'est pas l'activité qui fait émerger la notion. La notion prend sens quand elle se montre au travers de « l'activité » ou « l'exercice ».

Comme on le voit, toute la compréhension ne repose pas sur l'étude, mais celle-ci en est le point de départ. Afin que ce point de départ ait une continuité, nous allons puiser dans la banque des exercices qui vont reposer sur le même type de tâche en accord avec notre parcours, améliorant ainsi la maîtrise de la technique .

4.b. *Une organisation mathématique*
[Voir un exemple en annexe 2]

Le cours suit la construction rationnelle de la grandeur « aire » qui a été esquissée précédemment dans la présentation du synopsis du parcours : c'est donc lui-même un parcours organisé de façon mathématique avec ses définitions, théorèmes et méthodes logiquement reliés et répondant aux grandes questions qui sont à la base de l'étude du chapitre.

— *Le premier temps est celui de la définition*. Peut-on toujours comparer l'aire de deux figures différentes ? Peut-on dire que les aires sont égales même si les figures sont différentes ? Peut-on toujours ajouter les aires ? C'est le lieu de l'égalité, de l'inégalité, de l'addition.

Des définitions et des techniques se dégagent des études. Elles permettent de comparer de façon absolue des aires et de construire un rectangle d'aire égale à celle d'une figure donnée. L'étude des figures au programme va introduire la symétrie axiale comme outil de « découpage ». Puzzles et constructions cohabitent, et réclament des justifications. C'est donc le lieu où se construit du géométrique.

— *Le second temps est celui du partage et de la duplication.* Peut-on toujours dire qu'un objet a une aire *n* fois plus grande que celle d'une autre figure, *n* fois moins grande ? C'est le lieu de la comparaison relative, de la notion de quotient et de rapport, de diviseur et de multiple. Les définitions et les techniques se dégagent des études. Elles permettent de comparer de façon relative les aires.

— *Le troisième temps est celui de la mesure.* La grandeur « aire » est maintenant construite. Existe-t-il un système qui permet de mesurer cette grandeur ? Mesurer une aire c'est la comparer à une aire usuelle choisie pour unité, qu'on va être amené à partager de façon de plus en plus fine. C'est donc le lieu du dénombrement et de la construction du numérique.

L'utilisation de quadrillages va permettre d'approcher l'aire de n'importe quelle figure.

— *Le quatrième temps est celui de la formule.* La figure clé est celle du rectangle : on a trouvé des méthodes pour s'y ramener. La formule clé va être celle de l'aire du rectangle que la technique des quadrillages va permettre de valider. Cette formule et les techniques vues précédemment vont permettre d'aller vers le calcul de l'aire de n'importe quel polygone mais aussi d'approcher d'une autre façon l'aire de surfaces courbes. C'est le lieu du calcul.

4.c. *Une organisation didactique*
[Voir un exemple en annexe 3]

Le parcours mis en œuvre dans la classe est balisé par les temps de l'organisation mathématique du chapitre qui lui donnent sa cohérence. Il dure environ six semaines. Pour chaque temps nous choisissons à partir de notre banque de situations une étude qui est une activité de recherche et des exercices satisfaisant aux conditions que nous nous sommes imposées. Les techniques ne sont donc jamais travaillées hors de tout contexte. Le cours est issu du bilan des études et notre banque de situations nous fournit le matériau des devoirs à la maison et des contrôles. Dans tous les travaux que nous faisons en classe ou que nous donnons à la maison, nous laissons une grande place aux explications des élèves comme le montrent les documents du paragraphe 5.

En conclusion :

— La nécessité des aires s'impose à travers une rencontre vécue avec de nombreuses situations où vivent la notion d'aire et les questions que l'on est amené à résoudre à son sujet.

— L'organisation didactique permet de comprendre que les savoirs ne sont pas établis une fois pour toute, mais qu'ils répondent à une classe de problèmes s'organisant autour de classes de questions. Les savoirs ne sont plus sans finalité : ils sont fonctionnels, ils sont les outils qui permettent de résoudre cette classe de problèmes.

— Le savoir s'actualise, laissant la porte ouverte à toute une autre classe de problèmes : « comment obtenir l'aire du courbe ? des polygones… » qui permet d'ouvrir des perspectives pour les années futures.

— Les champs d'applications des définitions, des techniques ou encore des théories sont étudiés en classe, ce qui permet de prendre en compte que la théorie a un espace de validité. Les exercices sont là pour mettre à l'épreuve définitions et techniques.

— Le cours du professeur est une synthèse faite par la classe sous la direction du professeur.

— Les activités, au nombre de trois ou quatre sont liées les unes aux autres car elles sont organisées pour étudier le parcours, c'est-à-dire apporter des réponses à une classe de problèmes, clairement identifiés.

— La base expérimentale reste active, non plus alors dans l'organisation mathématique elle-même mais dans l'organisation didactique nécessaire pour la constituer. L'idée de mathématiques mixtes est omniprésente. Les savoirs ne sont plus cloisonnés.

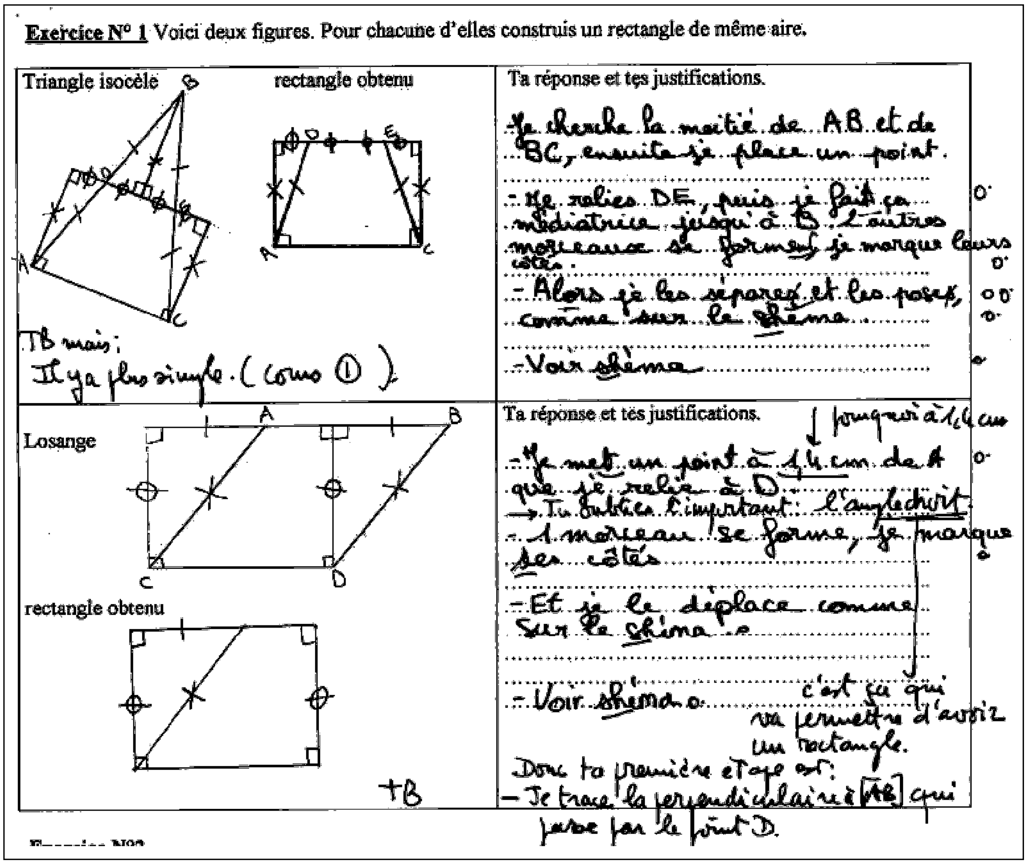
5. Quelques productions d'élèves

Les productions, reposant sur des techniques vues en classe, sont riches, variées, loin des stéréotypes. Nous demandons aussi sans cesse que les élèves expliquent et justifient leurs démarches pour les faire entrer dans le domaine de la rationalité. Voici quelques exemples, que l'on pourra resituer dans leur contexte en consultant les différentes annexes.

5.a. *Comparer les aires : les aires égales*

Extrait d'une copie d'élève (premier contrôle sur les aires). Les deux figures (triangle isocèle et losange) sont données « brutes ». On peut apprécier tout le travail géométrique, à la charge de l'élève, qui est impliqué dans la première partie du parcours sur les aires : coder les figures, donner des noms, prendre des

Encadré 1


Exercice N° 1 Voici deux figures. Pour chacune d'elles construis un rectangle de même aire.

Triangle isocèle — rectangle obtenu

Ta réponse et tes justifications.

Je cherche la moitié de AB et de BC, ensuite je place un point.

- Je relies DE, puis je fait sa médiatrice jusqu'à B. 2 autres morceaux se forment je marque leurs côtés.

- Alors je les sépares et les poses, comme sur le shéma

- Voir shéma

TB mais;
Il y a plus simple. (cours ①)

Losange

rectangle obtenu

Ta réponse et tes justifications.

longueur à 1,4 cm

- Je met un point à 1,4 cm de A que je relie à D.

→ Tu oublies l'important : l'angle droit

- 1 morceau se forme, je marque les côtés

- Et je le déplace comme sur le shéma.

- Voir shéma. c'est ce qui va permettre d'avoir un rectangle.

Donc ta première étape est:
- Je trace la perpendiculaire à [AB] qui passe par le point D.

TB

initiatives, construire des figures (perpendiculaires, rectangles…), justifier sa démarche…

5.b. Comparer des aires : les rapports

Extrait de deux copies d'élèves (premier devoir à la maison sur les aires) Des méthodes de justification purement visuelles, sans mots, ou mêlant visuel et discursif. *(Encadré 2)*

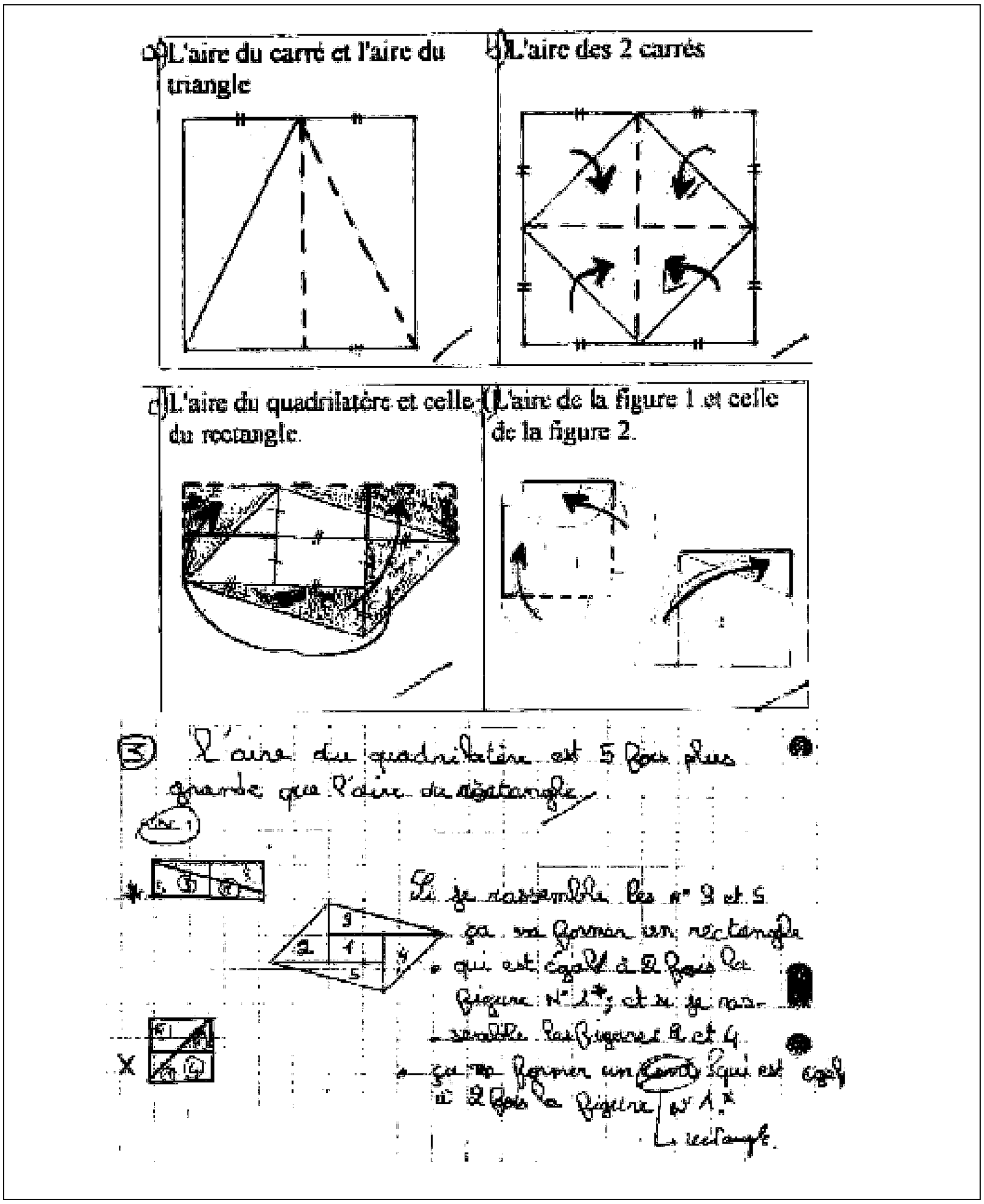
5.c. *Mesurer les aires : le quadrillage.*

Extrait d'un travail d'élève fait en classe : mesure de la superficie de la Mer d'Aral. Cet exercice permet à l'élève de performer la technique du quadrillage mise en place avec la superficie de la France. Calcul mental, calcul posé, présence des unités dans les calculs sur les grandeurs. *(Encadré3)*

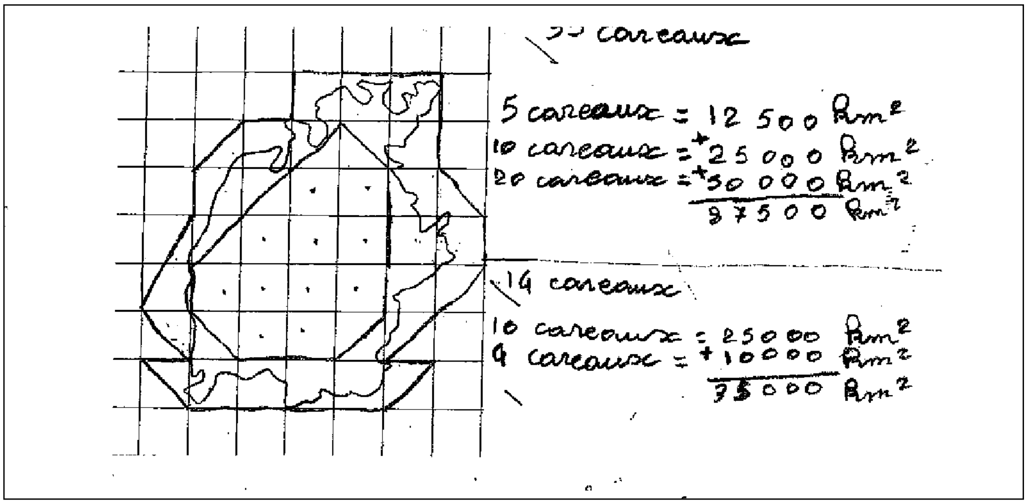
5.d. *Mesurer les aires : le calcul*

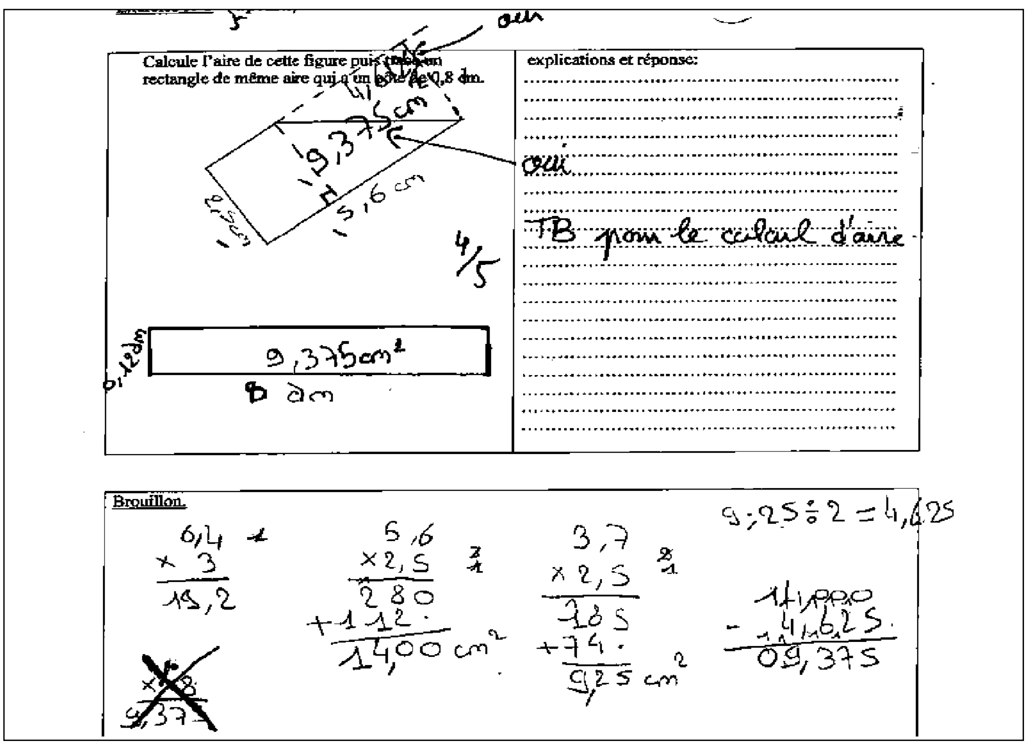
Extrait d'une copie d'élève (deuxième contrôle sur les aires). Le choix des mesures à effectuer pour mettre en œuvre le calcul sont laissés à l'initiative de l'élève. *(Encadré 4)*

Encadré 2


a) L'aire du carré et l'aire du triangle
b) L'aire des 2 carrés
c) L'aire du quadrilatère et celle du rectangle.
d) L'aire de la figure 1 et celle de la figure 2.
3) L'aire du quadrilatère est 5 fois plus grande que l'aire du rectangle
Si je rassemble les n° 3 et 5
ça va former un rectangle
qui est égal à 2 fois la
figure n° 1; et si je ras-
semble les figures 2 et 4
ça va former un carré qui est égal
à 2 fois la figure n° 1.
rectangle

Encadré 3



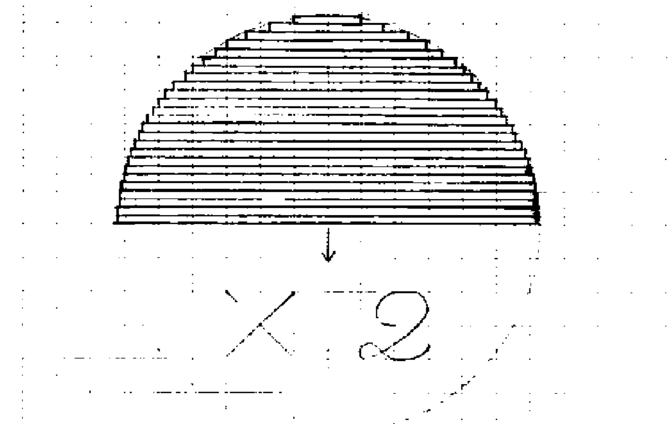


Encadré 4

Encadré 5

• façon : "Machiraag Ohashi"

• On calcule l'aire de la moitié du cercle et on la multiplie par 2.

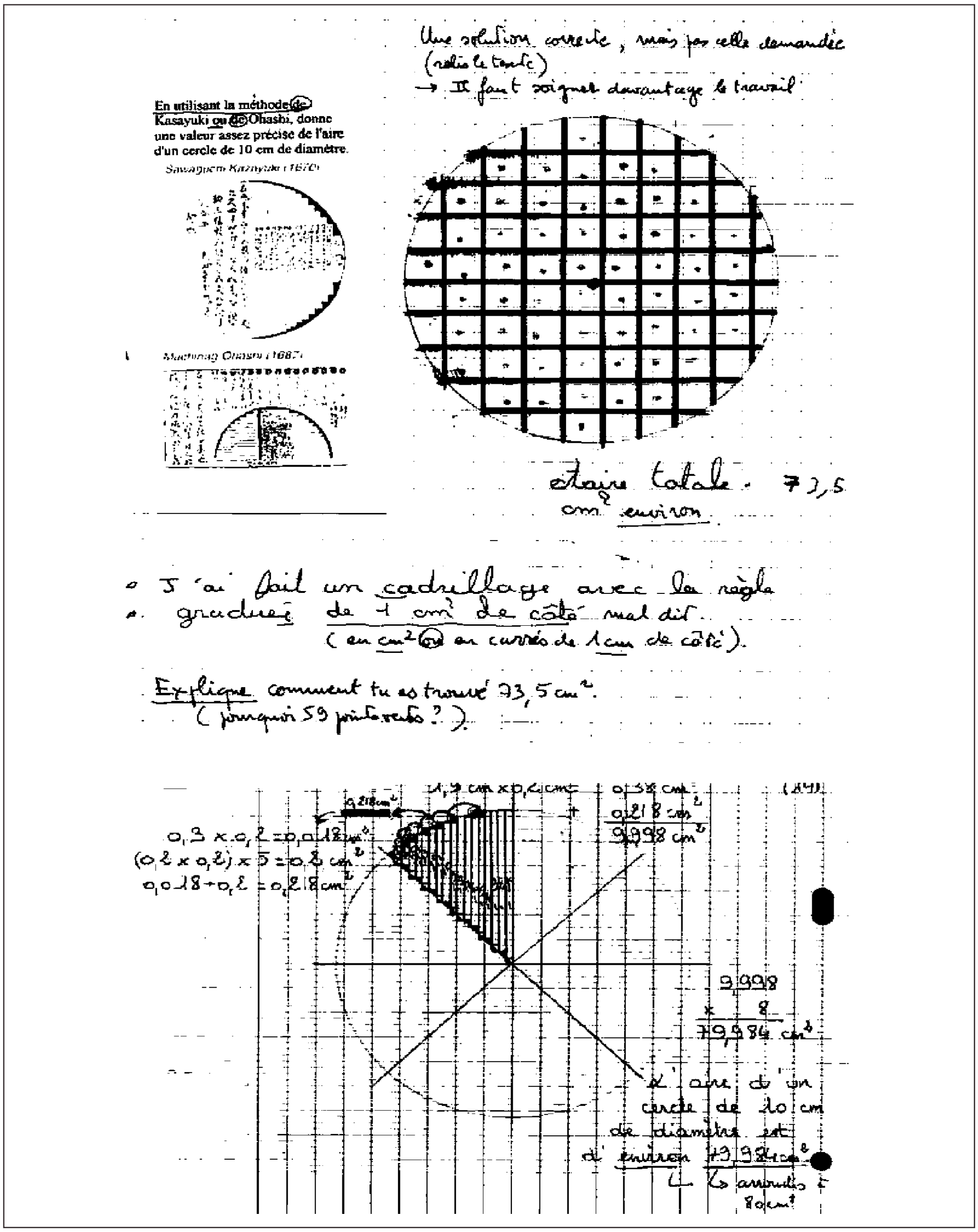


• Je calcule la moitié du cercle. Je calcule la longueur totale de mes rectangles qui est de 191,6 cm. Puis je multiplie la longueur totale de mes rectangles par la largeur qui est de 0,2 cm, je trouve : 38,32 cm². Ce qui me donne l'aire appropimatif de mon demi-cercle. Et je multiplie par 2 pour l'autre demi-cercle. Et l'aire totale est 76,64 cm² environ.
Donc tu peux arrondir à 77 cm² (vu qu'il manque toutes les parties noires).

5.e. *Mesurer les aires : le cercle.*

Extrait de copies d'élèves (devoir à la maison sur les aires à partir de documents historiques). Quelques exemples des différentes méthodes utilisées par les élèves. *(Encadrés 5 et 6)*

Encadré 6


Une solution correcte, mais pas celle demandée
(relis le texte)
→ Il faut soigner davantage le travail
En utilisant la méthode de Kasayuki ou de Ohashi, donne une valeur assez précise de l'aire d'un cercle de 10 cm de diamètre.
Sawaguchi Kazuyuki (1670)
Matsunaga Ohashi (1687)
et aire totale. 73,5 cm² environ
J'ai fait un cadrillage avec la règle graduée de 1 cm² de côté mal dit.
(en cm² ou en carrés de 1 cm de côté).
Explique comment tu as trouvé 73,5 cm².
(pourquoi 59 points verts ?)
1,9 cm x 0,2 cm = 0,38 cm²
0,218 cm²
0,218 cm²
9,998 cm²
0,3 x 0,2 = 0,018 cm²
(0,2 x 0,2) x 5 = 0,2 cm²
0,018 + 0,2 = 0,218 cm²
9,998
x 8
79,984 cm²
L'aire d'un cercle de 10 cm de diamètre est d'environ 79,984 cm²
Ls arrondis à 80 cm²

6. Quelle conclusion ? Quelles perspectives ?

6.a. *Les grandes questions*

Nous espérons avoir montré que dans la démarche que nous expérimentons les compétences au programme de sixième ne sont pas étudiées pour elles-mêmes, mais sont des outils qui permettent de répondre à quelques grandes questions : comment comparer, comment mesurer, comment calculer, comment partager, qui en entraînent d'autres comme comment construire, comment dénombrer, comment justifier…

6.b. *Les grandeurs*

D'autre part nous avons pris conscience que toutes ces compétences vivent dans la société au travers des grandeurs, et que l'exploration des grandeurs est le point de départ des mathématiques et une partie de son essence, comme le rappellent les deux citations mises en exergue. D'où notre idée d'organiser l'enseignement des mathématiques en sixième à partir des grandeurs. Le choix des six grandeurs, angles, aires, volumes, longueurs, durées et prix, nous permet de traiter les compétences des quatre parties du programme dans des contextes où elles peuvent prendre du sens. Nous avons organisé le parcours d'étude de chaque grandeur autour de trois des quatre grandes questions :

— comparer des angles, partager des angles, mesurer des angles
— comparer des durées, partager des durées, calculer des durées
— comparer des aires, mesurer des aires, calculer des aires
— comparer des prix, partager des prix, calculer des prix
— comparer des volumes, mesurer des volumes, calculer des volumes (Guichard, 2009)
— comparer des périmètres, mesurer des périmètres, calculer des périmètres

Ceci permet de retrouver dans plusieurs des chapitres, voire même dans tous, les mêmes notions et donc de pouvoir les travailler progressivement : par exemple multiple et diviseur, fraction, quotient, proportion, valeur approchée, symétrie orthogonale, polygones…

6.c. *La mise en œuvre*

La mise en œuvre dans la classe est souple. Suivant la place du chapitre dans l'année et sa nature, nous nous fixons une durée de 4 à 8 semaines. Le temps que nous consacrons à chaque étude est d'environ une demi-heure, mais si des questions surgissent et que des réponses sont mises en débat, si des mises au point sont utiles, alors, dans la mesure où cela contribue à l'étude, nous prenons notre temps. Le professeur est responsable de l'organisation de son cours et de sa régulation. Chacun, dans l'équipe, organise son enseignement comme il l'entend : travail en groupe ou individuel, forme et fréquence des évaluations, choix des éléments de la banque et de leur finalité (exercice, étude, ou sujet de devoir). Ceci pour minimiser les variables sur lesquelles on ne peut pas intervenir (horaires de l'établissement, niveau des élèves, environnement, …), pour tenir compte de la personnalité de chacun, et respecter les choix personnels (choix didactiques, choix de matériel…). Ce qui ne nous empêche pas d'échanger sur nos choix. Par exemple, nous avons de nombreuses discussions sur la forme et les supports du cours. Si chacun colore le parcours d'étude et de recherche pour ses élèves par les choix qu'il peut faire des supports, par contre il l'adosse à l'organisation mathématique que nous avons élaborée. Et parce que le cadre qu'il s'est donné, celui de l'organisation mathématique, lui permet de savoir les questions qui vont être étudiées et les réponses qui vont pouvoir y être données, il a toute liberté de gérer le parcours et les études en fonction des réactions de sa classe, de l'intérêt manifesté et des questions posées.

Contrairement à un enseignement par activités où ce sont les activités qui doivent être robustes, pour nous c'est l'organisation mathématique autour de quelques questions fondamentales et la banque d'exercices construite sur des exercices écologiquement viables qui rendent le parcours robuste. Voilà ce qui nous est apparu, une espèce de liberté contrôlée, permettant de se mettre dans une perspective à long terme, ne reposant pas uniquement sur le bon choix des activités.

6.d. *Perspectives*

Actuellement notre expérimentation nous amène à enrichir nos banques de situations (exercices) et à intégrer de façon complète et répétée les compétences des trois premières parties du programme (Gestion de données, Nombres, Géométrie) dans nos six chapitres sur les grandeurs : angles, prix, aires, durées, volumes et longueurs. Nous avons aussi en projet de mettre à disposition des enseignants le matériau élaboré pour la sixième, puis d'essayer de travailler dans le même esprit aux trois autres niveaux du collège.

ANNEXE 1

BASE DE SITUATIONS (Extrait)

1) Comparer des aires 1 : égalité et inégalité

Table
Cette table carrée est constituée de quatre parties égales. Comment disposer les éléments en une seule table pour avoir la plus de surface et loger le plus de convives ?

Cercle et rectangle
Sur une feuille de papier uni, trace un cercle de centre O de 4 cm de rayon. Trace un rectangle ABCD tel que AB = 6 cm et BC = 7 cm. Compare l'aire des deux figures. Justifie ta technique.

Cerf volant
Trace un cerf-volant dont les diagonales mesurent 6 cm et 8 cm. Tous les élèves auront-il une figure de même aire ?

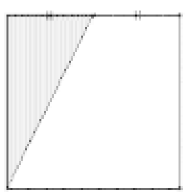
2) Comparer des aires 2 : rapports

Multiplier une aire
Dessiner un rectangle, puis construire des figures d'aire 2 fois plus grande, 3 fois…

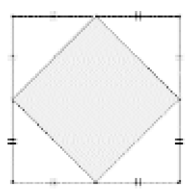
Diviser une aire
Dessiner un rectangle, puis construire des figures d'aire 2 fois moins grande, 3 fois…

Comparer les aires de 2 figures
Dans chaque cas comparer les aires des 2 figures : égales ? 2 fois, 3 fois, 4 fois … plus grande ? Plus petite ? Justifier la réponse.

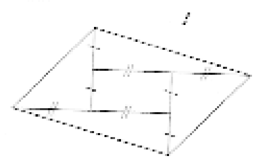
1) L'aire du carré et l'aire du triangle



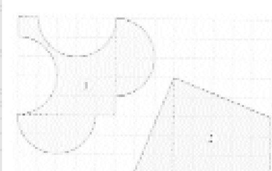
2) L'aire des 2 carrés



3) L'aire du quadrilatère et celle du rectangle.



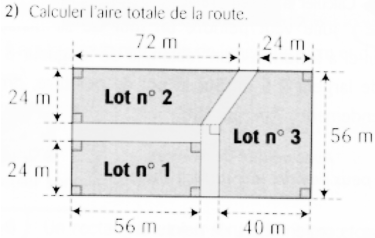
4) L'aire de la figure 1 et celle de la figure 2.



3) Calculer les aires

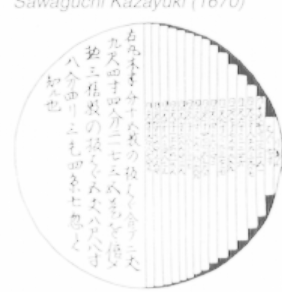
Labour
A partir du tableau de bord du tracteur, vérifier la superficie labourée

Lotissement
Un terrain de 5 824 m² de superficie a été partagé en trois lots séparés par une route.
1) Calculer l'aire de chaque lot.
2) Calculer l'aire totale de la route.



Aire du cercle
En utilisant la méthode de Kasayuki ou de Ohashi, donne une valeur assez précise de l'aire d'un cercle de 10 cm de diamètre.

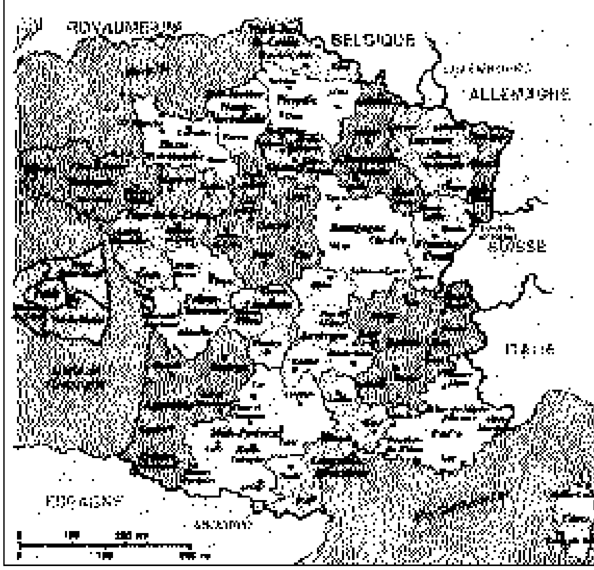
Sawaguchi Kazayuki (1670)



Machinag Ohashi (1687)

4) Mesurer les aires : le quadrillage

Quelle est la superficie de la France ?
Comment trouver cette superficie ?
1) A l'aide de la carte trouver la superficie de la France.
2) Trouver la superficie du Poitou-Charentes.



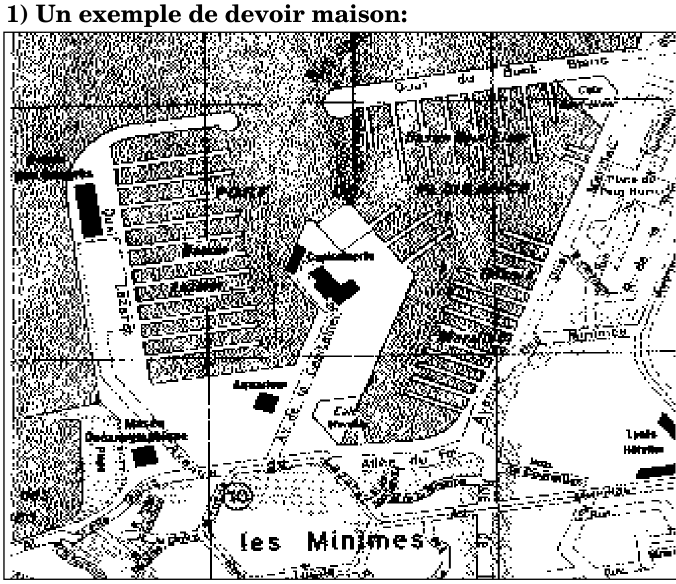
Aire d'un cercle
Trouver la mesure de l'aire d'un cercle de 3 cm de rayon.

Aire du bois du Theil

1) Mesurer l'aire du bois du Theil, sachant que 1 cm sur la carte vaut 250 m dans la réalité.
2) Trouver l'aire de l'étang du Theil.

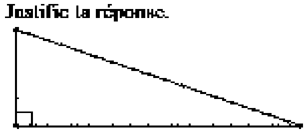
Des travaux d'évaluations utilisant d'autres situations prises dans la base complète

1) Un exemple de devoir maison:



1) Le port des Minimes à La Rochelle
A partir du plan ci-dessous, trouve la superficie du port de plaisance en m² et en ha, en sachant que 1 cm sur la carte vaut 100 m dans la réalité.
Explique ta méthode et ton résultat.

2) Le triangle rectangle
Quelle est l'aire de ce triangle ? Justifie ta réponse.



3) La route
Combien d'hectares fait la superficie d'une route de 8 m de large et de 12 km de long ? Justifie ta réponse.

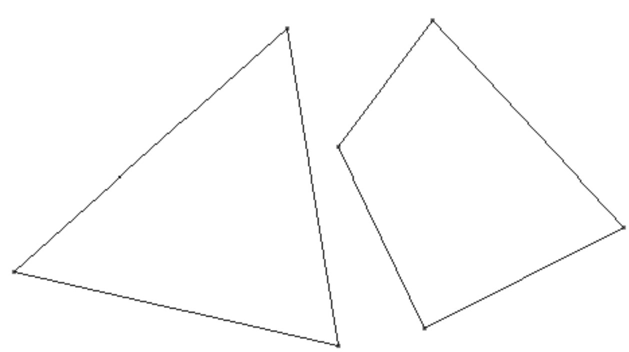
2) Un exemple d'évaluation sur les aires en sixième

Exercice 1 : *Construire un rectangle d'aire égale à un triangle isocèle.*
a) Construis un triangle isocèle (code ses côtés égaux).
b) Construis, à côté, un rectangle ayant la même aire.
c) Explique ta méthode en codant bien tes figures, et écris pourquoi les deux figures ont la même aire.

Exercice 2 : *Construire un rectangle d'aire égale à un trapèze isocèle.*
a) Construis un trapèze isocèle en indiquant bien l'axe de symétrie, les côtés égaux, les angles droits.
b) Construis, à côté, un rectangle ayant la même aire.
c) Explique ta méthode en codant bien tes figures, et écris pourquoi les deux figures ont la même aire.

Exercice 3 : *Construire une figure d'aire triple.*
Au dos de cette feuille, construis un rectangle de 4,5 cm de long et de 3 cm de large, puis un deuxième rectangle ayant une aire 3 fois plus grande.

Exercice 4 : *Comparer des aires.*
De ces deux figures, quelle est celle qui a la plus grande aire ?
Explique ta méthode, et explique comment tu peux être sûr de ta réponse?



Si tu as fini *(après avoir bien relu, vérifié et corrigé les fautes)*

Exercice 3 (suite) : construis une figure ayant une aire 2,5 fois plus grande que celle du rectangle de départ.

Exercice 4 (suite) : construis un rectangle ayant la même aire que le triangle (justifie), puis un rectangle ayant la même aire que le quadrilatère.

ANNEXE 2

COURS (Un exemple)

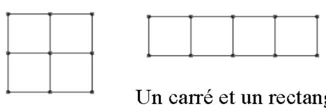
Chapitre 5 : LES AIRES

1 Comparer des aires

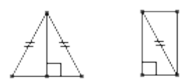
1) Égalité

Définition 1 **:** Deux figures ont la même aire si en découpant une des figures on peut reconstituer l'autre.

Exemple:



Un carré et un rectangle de même aire

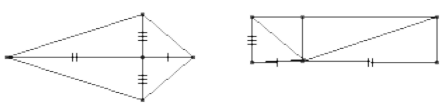


Un triangle isocèle et un rectangle de même aire

2) Transformer l'aire d'une figure en celle d'un rectangle

Théorème 1 : Tous les triangles et quadrilatères qui ont un axe de symétrie peuvent se transformer par découpage en un rectangle de même aire.

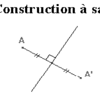
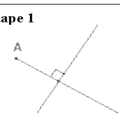
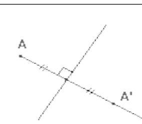
Exemple :



Un cerf volant et un rectangle de même aire

Remarques :

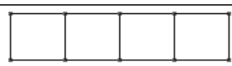
1) Un quadrilatère ne peut avoir que :
   - 1 axe de symétrie : cerf volant ou trapèze isocèle
   - 2 axes de symétrie : losange ou rectangle
   - 4 axes de symétrie : carré
2) Ces quadrilatères sont faciles à construire à partir de leurs axes de symétrie et du symétrique de 1 ou 2 points.
3) Le segment qui joint un point à son symétrique est <u>perpendiculaire</u> à l'axe et l'axe le coupe en son <u>milieu</u>. Donc on en déduit la façon de construire le symétrique d'un point avec une équerre :
   - on trace la demi droite qui part du point et qui est perpendiculaire à l'axe
   - on reporte sur la demi droite la distance du point à l'axe de l'autre côté : on obtient le symétrique du point. *(On peut faire les 2 étapes d'un coup en utilisant une réquerre)*

Construction à savoir faire :	**Etape 1**	**Etape 2**
 A , l'axe et le symétrique A' de A		

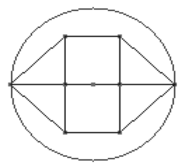
3) Inégalité

Définition 2 : Une figure a une aire plus petite qu'une autre si on peut la placer à l'intérieur de l'autre en bloc ou en morceaux, sans faire chevaucher les morceaux.

Exemple :

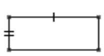
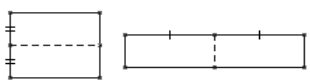
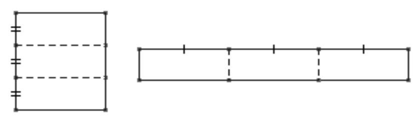


Le rectangle a une aire plus petite que le cercle



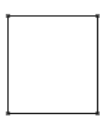
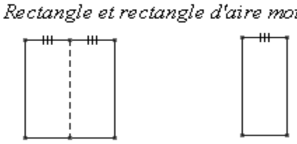
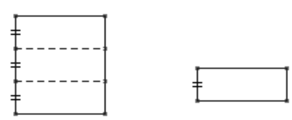
4) Les multiples

Théorème 2: à partir d'un rectangle donné, on peut construire un rectangle d'aire double, triple,quadruple.

Rectangle	*Rectangles d'aire double*	*Rectangles d'aire triple*
 aire 1	 aire 2 = 2 x aire 1	 aire 3 = 3 x aire 1

5) Les partages

Théorème 3: à partir d'un rectangle donné, on peut construire un rectangle d'aire moitié, tiers, quart...

Rectangle	*Rectangle et rectangle d'aire moitié*	*Rectangle et rectangle d'aire tiers*
 aire 1	 aire 2 = ½ x aire 1	 aire 3 = 1/3 x aire 1

2 Mesurer une aire

1) Principe

Définition 3 : Mesurer une aire c'est la comparer à l'aire d'une figure choisie pour unité. Une des figures les plus simples à utiliser est le <u>carré</u> : c'est celle que l'on utilise aujourd'hui.

- L'unité de base est un carré de 1 m de côté appelé le mètre carré et noté m² . *(Illustration)*
- Pour la superficie des pays on utilise un carré de 1 km de côté appelé le kilomètre carré et noté km².
- Pour les aires des figures sur une feuille de cahier on utilise un carré de 1 cm de côté appelé le centimètre carré et noté cm².

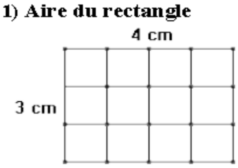
2) Méthode

Pour trouver la mesure de l'aire d'une figure, il faut savoir combien de carrés unités peuvent la recouvrir, sans se chevaucher, avec la possibilité d'en découper. *(Illustration : figure courbe fermée, et utilisation du quadrillage du cahier)*

- Une méthode commode pour cela est d'utiliser un quadrillage fait avec l'unité (T*ransparent*)
- Pour améliorer la précision on utilise un quadrillage plus fin.

3 Calculer une aire

1) Aire du rectangle



Si un rectangle mesure 4 cm sur 3 cm, il contient 12 (4x3) carrés de 1 cm de côté, donc son aire est de 12 cm². Si ses mesures sont 4,2 cm et 3,7 cm, il contiendra 1554 (42x37) carrés de 1 mm de côté, donc son aire sera de 1554 mm². Mais un carré de 1 cm de côté contient 100 (10x10) carrés de 1 mm de côté donc 1554 mm² = 15,54 cm²; Et 15,54 c'est aussi 4,2 x 3,7 (voir chapitre 2).

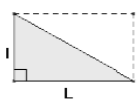
On peut donc résumer toutes les situations possibles par la formule :

Aire du rectangle = Longueur x largeur

à condition d'utiliser la même unité :
cm x cm = cm², mm x mm = mm², m x m = m², km x km = km²...

2) Aire du triangle rectangle

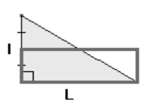
a) Formule 1



L'aire du triangle rectangle est égale à la moitié de l'aire du rectangle :

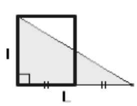
Aire du triangle rectangle = (L x l) : 2

a) Formules 2



L'aire du triangle rectangle est égale à l'aire du rectangle rouge

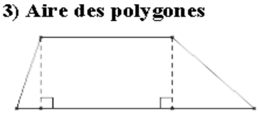
Aire du triangle rectangle = L x (l : 2)

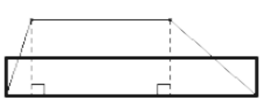


ou à l'aire du rectangle bleu

Aire du triangle rectangle = (L : 2) x l

3) Aire des polygones





Méthode :

1) on découpe le polygone en rectangles et en triangles rectangles
2) avec les formules on calcule l'aire de chaque morceau
3) on ajoute les aires de tous les morceaux

Remarques (pour aller plus vite) :

- s'il y a des triangles rectangles identiques, on peut les regrouper pour former un rectangle
- on peut parfois transformer directement le polygone en un rectangle (voir théorème 1)

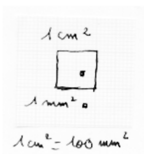
4) Les unités

a) Changement d'unité

Règle :

1) Si on prend une unité de longueur 10 fois plus grande, l'unité d'aire est 100 fois plus grande.
2) Si on prend une unité de longueur 10 fois plus petite, l'unité d'aire est 100 fois plus petite.

Exemples :



- 1 cm = 10 mm donc 1 cm ^{2}= 100 mm^2
- 1 dm = 10 cm donc 1 dm ^{2}= 100 cm^2
- 1 m = 10 dm donc 1 m ^{2}= 100 dm^2
- 1 mm = 0,1 cm donc 1 mm ^{2}= 0,01 cm^2
- 1 cm = 0,1 dm donc 1 cm ^{2}= 0,01 dm^2

b) Unités usuelles pour les terres

- ***1 are = 100 m²*** : on note 1 a.
  C'est donc un carré de 10 m de côté, c'est donc un dam^2
- ***1 hectare = 100 ares*** (hecto = 100). On note 1 ha.
  Donc 1 ha = 100 x 1 a = 100 x 100 m^2 = **10 000 m²**. Donc 1 hectare est un carré de 100 m de côté, c'est donc un hm^2.

ANNEXE 3

ORGANISATION DIDACTIQUE (Un exemple)

FICHE PROF – 6ème – LES AIRES

Introduction

Questions posées à la classe :
Qu'est-ce qu'une aire ? Quand a-t-on besoin des aires ? Qu'a-ton besoin de savoir sur les aires ?
Bilan des réponses noté sur le cahier de travail

- **Etude 1 : La table géniale** (Thème de l'étude : comparer des aires, aires égales)

Introduction : diaporama sur la table géniale
Bilan : mini document à coller (une table géniale.doc).
Problème 1.
Transformer une table carrée pour 8 personnes en une table rectangulaire pour 10 personnes
Problème 2.
Transformer une table carrée pour 4 personnes en une table rectangulaire pour 6 personnes
Problème 3.
Transformer un triangle isocèle en un rectangle de même aire
Mise en évidence de l'importance des axes de symétrie pour faire les découpages.

- Cours : **1 Comparer des aires** 1) Définition 1 (aires égales)
- Exercice 1 (Ex1.doc comparer des aires)

Problème 4.
a) Rechercher les quadrilatères ayant des axes de symétrie (1, 2, 3, 4 axes) b) Transformer un losange, un trapèze isocèle, un cerf-volant en un rectangle de même aire
Problème 5.
Transformer un hexagone régulier (un polygone régulier) en un rectangle de même aire
Recherches pour d'autres figures (le cas général du triangle du quadrilatère et polygone quelconque sera vu en 5ème)

Qu'a-t-on appris ?

A obtenir des aires égales par découpage, à transformer des polygones en rectangles de même aire.

- Dossier : construction des quadrilatères symétriques à partir de leurs axes de symétrie (avec les instruments, avec un logiciel de géométrie; programmes de construction)
- Cours : **1 Comparer des aires** 2) Théorème 1 (transformer triangles et quadrilatères symétriques en un rectangle de même aire)
- Exercices : puzzles (Transmaths 6ème, Nathan 2005, page 223 jeu + site de Thérèse Eveilleau), fiche (Ex2.doc)

• **Etude 2 : Le remembrement** (Thème de l'étude : comparer des aires, aires inégales)

Introduction : diaporama sur le remembrement.

Document : Etude 2 JPG.doc (+ papier calque)

- Cours : **1 Comparer des aires** 2) Définition 2 (aire plus petite qu'une autre)
- Interrogation

• **Etude 3 : Les rapports** (Thème de l'étude : comparer des aires, multiples, partages, rapports d'aires)

Problème 1 : dessiner un rectangle, puis construire des figures d'aire deux fois plus grande, trois fois...

Problème 2 : dessiner un rectangle, puis construire des figures d'aire deux fois moins grande, trois fois...

- Cours : **1 Comparer des aires**
  1) *Multiple* Théorème 2 (construire un rectangle d'aire double, triple ... d'un rectangle d'aire donnée)
  2) Partages Théorème 3 (construire un rectangle d'aire double, triple ... d'un rectangle d'aire donnée)
- Devoir à la maison (DM1.doc)
- Calcul mental 1 (fractions unitaires d'aires de polygones)

• **Etude 4 : La superficie de la France** (Thème de l'étude : mesurer des aires)

Introduction :

Quelle est la superficie de la France ? Recueil de propositions.

Où trouver l'information ? Recherche dans des agendas, le livre d'histoire, un dictionnaire (à disposition dans la classe), sur Internet (Un élève cherche sur l'ordinateur de la classe sur Wikipedia)

Comment trouver cette superficie ? A l'aide d'une carte.

Document : France.odt (+ quadrillages 1 cm sur 1 cm sur transparent, format A6)

1) A l'aide de la carte trouver la superficie de la France. Comment faire ? Idées. Bilan sur ce que veut dire savoir le nombre de km^2. Distribution du quadrillage sur transparent, et calculs. Mise en commun des résultats, et bilan sur le passage du nombre de carrés au nombre de km^2.

2) Trouver la superficie du Poitou-Charentes. Encadrement rapide, mais grossier. Comment améliorer la précision ? Distribution d'un quadrillage millimétré sur transparent (format A6). Bilan des résultats. Analogie : règle graduée instrument pour mesurer les longueurs, quadrillage sur transparent instrument pour mesurer les aires.

- Exercice : Trouve, à l'aide des quadrillages, l'aire d'un cercle de 3 cm de rayon.
- Cours : **2-Mesurer une aire**
  1) Principe (Définition 3)
  2) Méthode
- Exercices : p. 233 ex 8, 9, 10 et Aire du bois et de l'étang du Theil (1cm représente 250 m).

•**Etude 5 : Rectangles et triangles rectangles** (Thème de l'étude : calculer des aires)
Document : étude 2-4.pdf page 2
Calcul à l'aide des quadrillages. Problèmes des valeurs approchées. Amélioration des stratégies de comptage: localement et globalement. Problème des carrés coupés pour le triangle rectangle. Elaboration de formules pour calculer avec deux stratégies pour le triangle rectangle (voir cours). Comparaison des stratégies par rapport au calcul mental.

- Cours : **3-Calculer une aire** 1) Aire du rectangle
- exercices : fiche aire 3 figures (Problèmes aires.doc) + maison 1 + dictée1
- Cours : **3-Calculer une aire** 2) Aire du triangle rectangle
- Calcul mental 2 (a, b, noté) l Devoir à la maison (DM2.doc)
- Exercices : maison 2 + lotissement + p 234 ex22
- Cours : **3-Calculer une aire** 3) Aire des polygones 4) Unités
- Exercices : p 234 ex23, p 235 ex 34, 35, 36,
- Interrogation cours
- Dictées 2, 4, 5, 11, 6, 7, 12, + fiche 4 figures (polygones aires .doc)
- Contrôle

***

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BARBIN Evelyne. « L'arithmétisation des grandeurs ». Dans Repères IREM, n° 68. Topiques Éditions,

Metz, 2007. BKOUCHE Rudolf. « La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques ». Dans : Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9. Article disponible sur le sitede Culturemath

http://www.dma.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/pdf/Bkouche.pdf

« La géométrie élémentaire, une science physique ? » Actes du colloque de la CII Géométrie de Liège, 2003. Article disponible sur le Portail des IREM :

http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/lieg4_physique.pdf

CHEVALLARD Yves. Les Mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique. Bulletin de l'APMEP numéro 471. APMEP, Paris, 2007.

« Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique » , Cours donné à l'université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, La Rochelle, 4-11 juillet 1998 ; paru dans les actes de cette université d'été, IREM de Clermont-Ferrand, 1999, p. 91-120. Disponible sur le site :

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27

« Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. ». Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 12. N° 1. La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, 1992.

CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana. Les grandeurs en mathématiques au collège.

Partie I. Une Atlantide oubliée. Dans Petit x, numéro 55. IREM de Grenoble, 2000. Partie II. Mathématisations. Dans Petit *x*, numéro 59. IREM de Grenoble, 2002.

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT, Collège – mathématiques : Grandeurs et mesures au collège. Direction générale de l'enseignement scolaire – bureau du contenu des enseignements, octobre 2007. Document disponible sur le site Eduscol :

http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_grandeurs.pdf

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT, Les nouveaux programmes de l'école primaire – mathématiques : Grandeurs et mesure à l'école élémentaire. Direction de l'enseignement scolaire – bureau du contenudes enseignements, eduscol.education.fr, pdf de 11 p. sans date accessible sur le site :

http://www.ia76.ac-rouen.fr/evaluation/references/programmes/dac_grandeurs_mesure.pdf

BOSSUT Abbé. Discours préliminaire de l'Encyclopédie méthodique – Mathématiques. Par MM. d'Alembert, l'Abbé Bossut, de la Lande, Le Marquis de Condorcet, &c. Tome premier, Paris : Panckoucke et Leyde : Plomteux, 1784. Réédition du Bicentenaire, Paris : ACL-éditions, 1987. Disponible sur Gallica.

EUCLIDE d'Alexandrie. Les Éléments. Traduction et commentaires de B. Vitrac, introduction de M. Caveing. 4 volumes, PUF, Paris 1990-2001. Vol.1. Introduction générale, Livres I à IV.

GUICHARD Jean-Paul. Les volumes en classe de sixième. Dans Repères IREM, n° 76. Topiques Éditions, 2009.

JEDRZEJEWSKI Franck. Histoire universelle de la mesure. Ellipses, Paris, 2002.

LEBESGUE Henri. La mesure des grandeurs. Monographies de L'Enseignement Mathématique n° 1 Genève 1935. Réédition A. Blanchard, Paris, 1975.

LIU HUI. Les Neuf Chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.Édition bilingue. K. CHEMLA, G. SHUSHUN, Dunod, Paris, 2004.

POINCARÉ Henri. Avenir des mathématiques, 1908. Repris dans Science et méthode. Flammarion, Paris, 1934.

PRESSIAT André. La place des grandeurs dans la construction des mathématiques. Conférence donnée aux Journées nationales de l'APMEP, La Rochelle, 25, 261 27 octobre 2008. Bulletin de l'APMEP numéro°483. APMEP, Paris, 2009.

« Enseigner les grandeurs en mathématiques » Conférence du 06/12/2006. APMEP, Régionale Poitou-Charentes. Diaporama de l'intervention consultable sur le site :

http://irem.univ-poitiers.fr/apmep/conferen/c20061206/grandeurs.ppt

« Découpages et recompositions pour les aires et volumes ». 2001. Dans le dossier « Aire et périmètre » Disponible sur le site Eduscol :

http://www.eduscol.education.fr/D0049/pressiat.pdf

ROGALSKI Marc. « Aires, intégrales et primitives, un cheminement de la géométrie à l'analyse, inspiré par l'histoire ». Chapitre 5 de Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie. Ellipses, Paris 2001