L'ARITHMETIQUE ET LA CULTURE DU PROBLEME

Une expérience au lycée

François BRISOUX
Irem de Strasbourg

L'arithmétique est un champ des mathématiques qui possède une étrange singularité. Son support est des plus simples — les nombres entiers — son champ d'action des plus complets.

On peut aborder des problèmes d'arithmétique dès le plus jeune age, avec la seule connaissance des nombres entiers et de quelques opérations. Pourtant, de nombreuses questions se posent encore sur son enseignement, en raison entre autres, de la grande variété des techniques permettant de les résoudre.

Dans le cadre de travaux menés par le groupe arithmétique de l'Irem de Strasbourg, une expérience a été proposée en classes de seconde et de première scientifique, afin d'évaluer les aptitudes des élèves face à un problème d'arithmétique, et de répondre aux deux questions suivantes :

— Peut-on traiter un problème d'arithmétique sans maîtriser les outils mathématiques enseignés habituellement pour sa résolution ?

— Quelles sont les initiatives et démarches des élèves face à un problème d'arithmétique ?

Au-delà de ces deux questions, l'expérience avait aussi pour objet d'observer les actions et réactions des élèves face à un problème ouvert, d'apprécier leurs capacités à mobiliser les bons outils ainsi qu'à faire le lien avec d'autres champs des mathématiques.

Le problème

Nous avons proposé un exercice très classique à quatre classes de seconde et à deux classes de première S dont voici l'énoncé que l'on doit à Euler [1] :

« Une caravane composée d'hommes et de femmes fait halte dans une auberge. Les hommes y dépensent 19 *sous et les femmes* 13*. La recette de l'aubergiste est de* 1000 *sous. Combien y avait-il d'hommes et de femmes dans cette caravane ? »*

Les élèves avaient l'autorisation d'utiliser leur calculatrice, et ils avaient libre accès aux ordinateurs (sans internet bien sûr !). Le professeur leur a signalé qu'ils avaient toute liberté d'action mais ne leur a donné aucune indication, ni sur la démarche, ni sur le choix ou non de travailler sur outil informatique.

De manière surprenante, l'expérience en seconde et en première S ne s'est pas du tout déroulée de la même façon et les réflexes mathématiques des élèves de première ont totalement modifié leur manière d'aborder le problème. Ces différences sont au cœur de notre réflexion.

L'expérience en classe de seconde

La chronologie de recherche a été globalement la même pour tous avec, pour commencer, des essais à la calculatrice, au hasard, puis par approximation, puis de manière réfléchie. Le problème a suscité de vives discussions entre les élèves.

Voici un exemple de progression dans une des classes ; pour la clarté de la lecture, on notera (h,f) les couples solutions ordonnés.

Le premier réflexe des élèves est de penser qu'il y a à peu près autant d'hommes que de femmes puisqu'ils voyagent certainement en couple :

— Un homme et une femme dépensent ensemble 19 + 13 = 32 sous. 1000 / 32 = 31,25 donc le couple (31,31) est un bon ordre de grandeur de la solution,

— Mais le couple (31,31) dépense en réalité 992 sous, il manque donc 8 sous.

Les élèves vont ensuite se rapprocher de la solution par petites modifications successives :

— Remplacer une femme par un homme augmente la dépense de 6 sous (19 – 13), donc le couple (32,30) dépense 998 sous,

— Remplacer un homme par deux femmes augmente la dépense de 7 sous (2×13 – 19), c'est trop… le méthode semble s'arrêter là pour le moment.

Il faudra un certain temps avant que la situation ne se débloque :

— Remplacer deux hommes par trois femmes augmente la dépense d'un sou (3×13 – 2×19 = 1)

— Le couple (32,30) dépense 998 sous

— Donc le couple (32 – 2,30 + 3) = (30,33) dépense 999 sous

— Puis le couple (30 – 2,33 + 3) = **(28,36)** dépense 1000 sous.

Enfin la solution !! **Il y a 28 hommes et 36 femmes !** Après quelques instants d'auto-congratulation collective, une élève prend la parole : « Oui, mais moi j'ai trouvé qu'avec 41 hommes et 17 femmes ça marche…». Ses camarades vérifient et prennent seulement alors conscience qu'il peut y avoir plusieurs solutions.

1 Eléments d'algèbre, 1770

Comme le principe des échanges entre hommes et femmes a été compris, la méthode se généralise rapidement :

— **13 hommes dépensent autant que 19 femmes**, car 13×19 = 19×13

— (28 + 13,36 – 19) = **(41,17)**

— Mais aussi (28 – 13, 36 + 19) = **(15,55)**, (15 – 13,55 + 19) = **(2,74)**

Nous avons toutes les solutions : **(41,17), (28,36), (15,55), (2,74).**

L'expérience s'est en général arrêtée à ce stade en seconde, les élèves ne voyant pas la nécessité de s'assurer qu'ils avaient bien toutes les solutions : cela leur paraissait évident. Ce travail s'est donc achevé sous la direction du professeur qui a présenté l'aspect fonctionnel du problème, afin au moins de s'assurer, à l'aide d'une table de valeur, qu'aucune solution n'a été oubliée.

Les questions d'existence et d'unicité des solutions n'ont pas été abordées.

L'expérience en classe de première S :

Contrairement aux classes de seconde, les élèves de première ont immédiatement opté pour un traitement algébrique du problème en enchaînant les étapes suivantes : mise en équation, tentatives de résolution, tentatives de visualisation avec les outils Tice, étude des contraintes pour restreindre le champ des recherches.

Tous les élèves sans exception ont commencé par une mise en équation du problème sous la forme 19x + 13y = 1000, puis ont tenté de la résoudre…

Malheureusement, ils avaient d'habitude deux équations : il leur manquait donc ici des informations. Qu'à cela ne tienne, la plupart ont contourné le problème en dédoublant l'équation : $y = \dfrac{1000-19x}{13}$ et $x = \dfrac{1000-13y}{19}$, ils avaient dès lors un système de deux équations à résoudre.

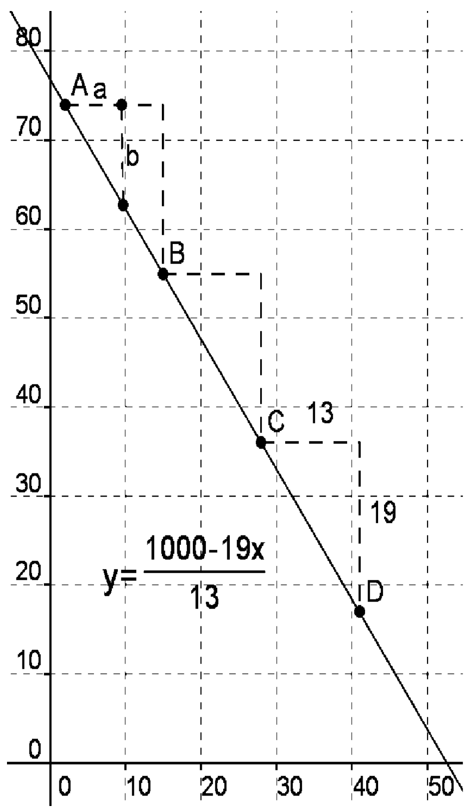
La plupart ont consacré beaucoup de temps à cette résolution avant d'admettre que c'était peine perdue, et seulement alors certains ont fait le lien avec les fonctions affines. Ils se sont souvenus qu'un système de deux équations linéaires à deux inconnues pouvaient être assimilé à un système de deux droites du plan. Dans le cas présent, ils comprirent qu'ils n'avaient donc qu'une droite, et ils l'ont immédiatement représentée avec un logiciel ou sur la calculatrice. Mais leur conclusion fut pour autant sans appel, il y a une infinité de solutions, tous les points de la droite.

Une fois de plus dans une impasse, vint alors l'idée intéressante proposée par une bonne moitié des élèves consistant à limiter la recherche :

Il y a au maximum 52 hommes et 76 femmes car 1000/19 < 53 (s'il n'y avait que des hommes), et 1000/13 < 77 (s'il n'y avait que des femmes), mais ils n'ont pas su l'exploiter, par exemple en construisant une table de valeurs, car ils avaient perdu de vue une donnée essentielle du problème : *les solutions sont des couples d'entiers.*

Cette recherche ayant duré trois quart d'heure et face à l'urgence de résoudre le problème avant la fin de la séance, les élèves ont pris leurs calculatrices pour (enfin) donner un sens plus concret au problème en testant des couples de valeurs. En quelques minutes, plusieurs d'entre eux ont reconstitué la démarche qu'avaient eue les élèves de seconde et le problème a pu être résolu dans la séance. Ces élèves de première S maîtrisant l'utilisation du tableur et du grapheur ont pu ensuite retrouver rapidement tous les résultats illustrés ci-dessous, car le nœud du problème, à savoir la nature des solutions, était délié.

Table de valeur de $y = \dfrac{1000 - 19x}{13}$ **et sa représentation graphique**



x	y
0	76.923
1	75.462
2	74
3	72.538
4	71.077
5	69.615
6	68.154
7	66.692
8	65.231
9	63.769
10	62.308
11	60.846
12	59.385
13	57.923
14	56.462
15	55
16	53.538
17	52.077
18	50.615
19	49.154
20	47.692
21	46.231
22	44.769
23	43.308
24	41.846
25	40.385
26	38.923
27	37.462

x	y
26	38.923
27	37.462
28	36
29	34.538
30	33.077
31	31.615
32	30.154
33	28.692
34	27.231
35	25.769
36	24.308
37	22.846
38	21.385
39	19.923
40	18.462
41	17
42	15.538
43	14.077
44	12.615
45	11.154
46	9.6923
47	8.2308
48	6.7692
49	5.3077
50	3.8462
51	2.3846
52	0.9231

Lors de la séance suivante, le professeur a cette fois-ci pu prolonger la réflexion pour justifier les résultats, notamment en faisant le lien entre table de valeurs, fonction affine, droite représentative. Mais aussi en justifiant que toutes les solutions ont été trouvées.

Pour cela il pouvait s'appuyer sur la représentation ci-contre où la droite a pour pente – 19/13 . Partant de l'un des points à coordonnées entières de la droite, pour atteindre un autre point à coordonnées entières, l'abscisse doit nécessairement progresser d'un multiple de 13, car 13 et 19 sont premiers entre eux.

Par exemple, s'il existait un point à coordonnées entières entre A et B, alors 19/13 = b/a , avec a et b des longueurs entières proposées sur la figure ; a et b étant respectivement inférieurs strictement à 13 et 19, il n'y aurait de solution que si la fraction 19/13 était réductible, ce qui n'est pas le cas car 13 et 19 sont premiers entre eux. Un certain nombre d'élèves a trouvé ces arguments assez rapidement.

Vers une généralisation

Le professeur a alors ajouté en première S quelques questions pour envisager une généralisation du problème.

Question 1 : *Peut-on trouver des solutions si la récolte de l'aubergiste est de 1001 sous?*

La réponse des élèves fut rapide, à l'aide du tableur. En outre, la propriété « Remplacer 2 hommes par 3 femmes augmente la dépense de 1 sou » était encore bien présente. Il ne semblait pas raisonnable de traiter la question analogue pour une recette quelconque, bien que l'appui du tableur l'aurait permis, les justifications menaient à une réflexion trop avancée face à nos objectifs. Le professeur a toutefois fait remarquer qu'une dépense de 30 sous est impossible, qu'une dépense de 32 sous n'admet qu'une solution… la généralisation reste donc un problème ouvert.

Question 2 : Si l*es hommes y dépensent 18 sous et les femmes 12 sous. La recette de l'aubergiste peut-elle être de 1000 sous ?*

Le tableur ne propose pas de solution. Pourquoi ? Seuls quelques élèves ont remarqué que la recette serait un multiple de 6. La propriété liée au fait que 13 et 19 sont premiers entre eux n'a pas encore pris toute sa dimension auprès de la majorité des élèves.

Question 3 : Si l*es hommes y dépensent 18 sous et les femmes 12 sous. La recette de l'aubergiste peut-elle être de 1002 sous?*

Bien entendu le tableur fourni des solutions qu'on ne pouvait prévoir mais la plupart des élèves avaient anticipé le fait que d'une solution, on pouvait trouver toutes les autres car « 2 hommes dépensent autant que 3 femmes, et on ne peut faire de permutation plus petite ».

En reprenant l'interprétation graphique précédente, cela revient à souligner que la pente – 18/12 = – 3/2 et que le plus petit « pas » pour passer d'un point à coordonnées entières à un autre est (+ 2 hommes ; – 3 femmes) ou (– 2 hommes ; + 3 femmes).

La résolution

La résolution générale de cette équation n'a pas été abordée lors de cette expérience. Etudiée en enseignement de spécialité de terminale S, elle fait appel notamment aux théorèmes de Bézout et de Gauss. S'il existe des solutions de l'équation $ax + by = c$, en notant g le PGCD de a et b, g divisant a et b, g doit nécessairement diviser c.

En notant $a' = a/g$, $b' = b/g$ et $c' = c/g$, l'équation, simplifiée par g, devient : $a'x + b'y = c'$ avec a' et b' premiers entre eux.

Or le théorème de Bézout affirme que l'équation $a'x + b'y = 1$ a des solutions dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ si et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.

Ceci permet de résoudre toute équation diophantienne de la forme $a'x + b'y = c'$ avec a' et b' premiers entre eux. Il suffit en effet de multiplier par c' une solution de l'équation $a'x + b'y = 1$. Ce résultat permet d'affirmer l'existence de solutions dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ si et seulement si g divise c.

On montre alors à l'aide du théorème de Gauss que les solutions sont :

$$\begin{cases} x = x_0 + ka' \\ y = y_0 - kb' \end{cases} \text{avec } k \in \mathbf{Z},$$

$(x_0; y_0)$ étant un couple solution que l'on peut trouver à l'aide par exemple de l'algorithme d'Euclide.

Dans notre problème, les solutions sont :

$$\begin{cases} x = 2 + 13k \\ y = 74 - 19k \end{cases} \text{avec } k \in \mathbf{Z}.$$

On ne retiendra que les couples à coordonnées positives, pour k allant de 0 à 3.

Lorsque le professeur a modifié la somme récoltée par l'aubergiste, il y avait donc toujours des couples solutions dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ mais pas nécessairement dans $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ (exemple « la dépense était de 30 sous » n'a pas de solutions positives).

Analyses de l'expérience

Sans avoir traité la résolution générale de cette équation diophantienne, on peut toutefois répondre à l'une des questions posées en introduction : de nombreuses justifications peuvent être fournies et un raisonnement scientifique peut être mené en arithmétique sans avoir suivi d'enseignement spécifique. Cela ouvre de nombreuses perspectives et un support d'activités propices à la recherche, peut-être trop peu exploité, et ce, à tous les niveaux d'enseignement.

On peut toutefois rappeler l'expérience du problème golf[2] menée à l'école primaire. Il s'agissait d'additionner des multiples de deux nombres donnés (comme 3 et 8 par exemple) pour atteindre un nombre donné lui aussi (comme 41). Au delà de la recherche exhaustive, les élèves devaient s'assurer d'une méthode justifiant que toutes les solutions avaient été trouvées. Cette démarche est très proche de celle que les lycéens ont employé.

Il est à noter que l'investissement des élèves en seconde et première était remarquable car l'énoncé était attractif, de par sa simplicité et son aspect très concret. On a aussi pu constater que le vocabulaire d'Euler ne correspond plus tout à fait aux standards actuels auprès de nos élèves puisque l'un d'entre eux a demandé : « Mais comment font-ils pour loger tous dans une caravane ? ».

Cette expérience appelle plusieurs remarques. La première concerne les différences observées entre les classes de secon-

2 ERMEL CM2,1999

de et de première. On peut globalement dire que les élèves de seconde ont eu plus d'initiatives, ont été plus efficaces et plus proches du problème. On peut l'expliquer par deux raisons essentielles : tout d'abord, les élèves de ces classes de seconde ont tous participé en troisième et en seconde à l'épreuve de « Mathématiques sans frontières », dans laquelle les exercices ouverts aux énoncés d'apparence fort peu mathématiques, les incitent à tester, à rechercher des bribes de solution, à chercher « à l'instinct ». D'autre part, en première S, le message de rigueur dans les raisonnements et dans la recherche de la solution, que nous devons nécessairement transmettre aux élèves, a probablement bridé leurs initiatives. La mise sous forme algébrique du problème leur a, en outre, fait perdre de vue l'ensemble dans lequel ils devaient chercher les solutions : $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. Ces élèves avaient pourtant eux aussi participé en seconde à « Mathématiques sans frontières » mais leur perception du raisonnement mathématique a évolué, et, sans en exagérer les conséquences, on peut souligner là une dérive de notre enseignement.

Le nouveau programme applicable à la rentrée 2009 pour la classe de seconde met en avant un principe central : la résolution de problèmes, avec pour objectifs généraux *«s'engager dans une activité de recherche… pratiquer une activité de recherche expérimentale…utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème»*.

Nous ne pouvons que louer cette orientation, car elle s'inscrit clairement comme objectif majeur d'une formation scientifique complète. L'arithmétique, au travers de nouveaux supports, comme l'algorithmique, pourrait retrouver sa place dans la culture mathématique commune de nos élèves.