L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES : CONTENUS ET METHODES

Contribution de la commission inter-**IREM** ***du second cycle***

présentée par
Jean-Pierre FERRIER
Irem de Lorraine

Le contenu de ce texte est issu de débats récents au sein de la commission inter-IREM du second cycle sous la responsabilité de Catherine Farjot, débats qui ont impliqué notamment Loïc Jussiaume et Jean-Marie Thomassin en plus de la responsable et du rédacteur. Il aurait du être rediscuté et approuvé, puis transmis à l'Inspection générale en vue de son colloque de novembre dernier. Ce devait même être le testament de ladite commission. Malheureusement elle est morte un peu trop tôt pour cela. Au passage, aussi invraisemblable que cela paraisse, les IREM n'ont plus de commission généraliste pour le lycée.

Les positions avancées ne correspondent donc pas toujours exactement à celles du signataire de l'article. Disons, pour simplifier, qu'il les assume, parce qu'ils les considère défendables et dignes d'être présentées.

On annonce des réformes de structure profondes pour le lycée, avec la suppression des filières scientifique et littéraire et l'instauration d'un tronc commun représentant 60 % de l'horaire en première et 40 % en terminale. Dans ces conditions l'heure n'est plus de savoir comment s'adapter à telle ou telle petite nouveauté instaurée dans les programmes, comment renouveler l'enseignement de tel petit chapitre y ayant toujours figuré, comment intégrer telle technologie à la mode dans les apprentissages traditionnels.

Il s'agit de tenter d'énoncer quelques principes incontournables à la base de la définition de progressions quelles qu'elles soient, avant de savoir quelles progressions pourront faire partie du tronc commun et quelles autres des options et en quelle année on placera précisément tel niveau.

Le risque est en effet considérable de voir retenues des aberrations comme celle qu'a justement dénoncées, à propos du socle du collège, Jacques Moisan, doyen de l'inspection générale de mathématiques, alors qu'il était invité en fin d'année 2007 par la commission inter-IREM du second cycle. On a placé dans ce socle le calcul algébrique du premier degré et les identités remarquables, mais on en a retiré la résolution de l'équation du premier degré.

Ce faisant on n'a pas respecté la gestion correcte de ce qu'on pourrait appeler une **unité de pensée** d'une part et des **ruptures** de l'autre. Dans la résolution des problèmes, l'unité de pensée à l'école élémentaire — ainsi qu'au début du collège — est résumée dans le **sens des opérations ;** elle se traduit par une solution qu'on appelait jadis "arithmétique". Ensuite, au collège — l'unité de pensée, en rupture avec la précédente — est résumée dans les **équations algébriques**. Dans le calcul littéral que leur résolution mobilise, la lettre "x" représente une valeur inconnue avec laquelle on travaille et pousse le calcul comme si elle était connue. Ce n'est que plus tard que la lettre pourra désigner une variable, dans une approche fonctionnelle. Pour le moment il ne s'agit pas non plus de calculer pour calculer, comme lorsqu'on simplifie une expression à évaluer pour différentes valeurs de la lettre "x" [1]. C'est à une solution dite "algébrique" des problèmes que les équations algébriques sont associées.

La gestion de la transition est délicate. La nouvelle façon de penser n'efface pas la première. En revanche il n'y a lieu de s'y intéresser dans l'enseignement que pour en escompter des stratégies plus efficaces, qui seront alors privilégiées. Bien sûr le coût de l'enseignement de cette nouveauté, de la rupture avec ce qui précède, doit être discuté. On pourrait imaginer qu'on y renonce pour le collège, comme c'était le cas pour le Certificat d'études primaires. En revanche, dès lors qu'on introduit la pensée algébrique avec le calcul correspondant, on ne peut pas accepter de s'arrêter là, laissant l'ancien mode de pensée seul pour la résolution des problèmes du premier degré.

L'exigence locale d'une unité de pensée a une traduction didactique — Aline Robert parle à ce sujet de référent — mais c'est avant tout un concept de nature épistémologique. Souvent un mode de pensée donné va correspondre à une période dans la construction des Sciences et on rejoindra peut-être à l'occasion une approche historique, mais ce n'est pas de ce côté qu'on cherchera une éventuelle légitimité.

Dans ce qui suit, on a cherché non pas à décrire la totalité des contenus, mais à poser quelques repères, pour dégager des **fils de progression** correspondant à des modes de pensée cohérents. On n'y a fait apparaître que ce qui a un **rôle structurant**, ce qui est un **élément constructif**, dans la constitution d'un **bagage scientifique**. Cela n'interdit pas d'aborder certains sujets en amont de ce qui aura été indiqué, à condition de ne pas se tromper. Cette façon d'en parler, avant terme en quelque sorte, aussi utile qu'elle puisse être à la vie courante le cas échéant, ne doit pas perturber le rôle structurant attendu de l'enseignement ; mais elle pourra bien sûr venir *en illustration*, *en application* du corpus principal. Pour être clair et à titre d'exemple $1 + 1 = 2$ fait bien partie de ce dernier alors

1 Ce dernier exercice serait à la mode : il permet à la fois de forcer l'utilisation des machines et d'appliquer le triptyque observer/conjecturer/démontrer dont Rudolf Bkouche se plaît à dénoncer le ridicule. En fait il dénature le sujet.

qu'en est exclu tel autre sujet sur lequel les émissions de vulgarisation de la télévision sont en concurrence avec l'école.

La géométrie plane.

Au début de la géométrie, le seul mode de pensée qui corresponde à une première entrée dans la Science est celui de la géométrie des anciens Grecs, du livre I d'Euclide plus précisément, sachant qu'il ne s'agit pas d'y rechercher des références absolues. Disons, de façon schématique, que la géométrie part du problème physique de la superposition par déplacement des corps solides, au moins des corps plans et en particulier des triangles.

Ce faisant on écarte toute idée de transformation du plan ou de l'espace, notamment les symétries axiale et centrale qui sont toujours à la base de l'enseignement des premières classes du collège, même si beaucoup d'enseignants n'en font plus aujourd'hui leur unique credo. Entendons-nous bien : il n'est pas interdit de parler des symétries d'une figure ; mais ce n'est pas un élément constructif et cela ne peut venir qu'en application du reste. En revanche est vraiment étranger au mode de pensée dont on cherche à préserver l'unité tout ce qui relève des transformations agissant sur des points quelconques du plan ou de l'espace ; a fortiori toutes les propriétés que peuvent posséder ces transformations, lesquels remplissent abondamment les fameuses boîtes à outils, arsenal toujours privilégié de beaucoup de formateurs pour présenter des modèles de raisonnement.

En clair, la géométrie plane commence ainsi, comme c'était le cas il y a un demi-siècle en France, à ceci près qu'on ne dit pas dans quelle classe du collège se fait le commencement. On noterait qu'il se faisait plus tard hors de nos frontières.

1) les cas d'égalité des triangles,
2) le parallélisme et le théorème de Thalès,
3) le triangle rectangle

et tout ce qui va avec.

Mieux vaut ici parler de cas d'égalité comme jadis, mais pas comme Euclide. Le terme d'isométrie présente beaucoup d'inconvénients. Il fait entrer dans un autre mode de pensée, celui des transformations, et mieux vaut le réserver au moment où la rupture aura été faite, avec la théorie des ensembles comme support, donc probablement après le lycée. Il s'agit, dans le sens mathématique moderne, d'une conservation des longueurs. Pour une transformation, c'est clair pour une figure, comme le triangle, c'est ambigu : les longueurs des côtés ? Pourquoi pas aussi des médianes ou des hauteurs ? Même si l'on inclut les angles, l'égalité n'est pas, a priori, celle des côtés et des angles mais la superposabilité. Si l'on ne retient que les côtés, c'est mettre dans la définition le troisième cas d'égalité.

Par ailleurs il ne semble pas que l'on doive insister sur les problèmes de construction de figures, ni s'en servir comme motivation [2]. La démarche fondatrice de la géométrie, comme celle de la science en général, est dite hypothético-déductive : partant de propriétés posées en hypothèse, on en obtient d'autres par déduction. C'est l'analyse d'une figure ayant des propriétés données qui

2 Les tracés simples, comme celui d'une médiatrice, ne sont pas visés. L'élève doit apprendre à dessiner et à tracer. Il faut donner à la géométrie un support concret. En revanche faire des constructions pour apporter du grain à moudre aux logiciels de géométrie dynamique ou au triptyque observer/conjecturer/démontrer serait dénaturer le sujet.

reste l'élément essentiel du raisonnement. On s'appuiera éventuellement sur cette analyse pour discuter de l'existence et de l'unicité d'une telle figure, mais on ne s'intéressera pas spécialement à la construction en elle-même, comme pour définir une séquence précise d'opérations codées réalisant cette construction. La question se pose explicitement à celui qui veut produire une belle figure pour l'exposer, donc le cas échéant au professeur ; ce n'est pas ce qu'on demande aux élèves.

Il est vrai que le problème fondateur de la superposition des corps solides est essentiellement le même que celui de la caractérisation d'une topographie donnée par un certain nombre de mesures. Qui dit caractérisation dit implicitement possibilité de reconstruction. Il n'y a donc pas une différence énorme entre chercher à superposer et chercher à construire. Mais de même qu'on ne visera pas, pour le moment, le détail du processus de superposition, on n'insistera pas, non plus, sur la manière d'effectuer la construction.

A fortiori l'exercice dit des "figures téléphonées" qui semble occuper aujourd'hui la charnière entre l'école et le collège est à évacuer définitivement. C'est un parfait exemple de confusion entre les modes de pensée. On trouve en effet la trace des mathématiques axiomatiques dans l'emploi d'un langage officiel, prétendument correct si l'on préfère, qui caractérise un mode de pensée ultérieur à celui de la géométrie traditionnelle. En même temps on ne dispose d'aucun outil, ce qui place l'exercice très en deçà. La confusion est révélatrice d'une transposition didactique comme on en constate tant.

La suite est un peu floue en ce qui concerne l'ordre exact des chapitres. Disons que cette suite viendra s'asseoir solidement sur le bloc des trois premiers chapitres précédemment proposés.

4) Tôt ou tard il faudra parler de rotations, de symétries axiales, de projections orthogonales. Il ne s'agit pas d'employer un discours savant mais de dire simplement comment on fait tourner un point M autour d'un centre donné d'un angle donné, comment on prend son symétrique par rapport à une droite donnée, ou comment on prend sa projection orthogonale. On aura, par exemple, besoin de vérifier qu'en faisant tourner un parallélogramme (ou en le projetant) on obtient encore un parallélogramme (aplati). On introduira les angles orientés à cette occasion.

Cependant on n'entre pas, pour le moment, dans le monde des transformations, lequel commence quand on les compose et se précise quand on en fait des groupes. Il s'agit simplement de donner un peu plus de sens au mouvement qui est à la base de la superposition des figures, dont les triangles. Le discours revient ainsi sur lui-même pour se préciser, mais sans rupture du sens.

Peu à peu la géométrie va s'algébriser. On aura de moins en moins recours à la figure, dans laquelle la disposition des divers éléments peut restreindre sournoisement le champ de validité du raisonnement, pour faire de plus en plus appel à un calcul obéissant à des règles précises. Il n'apporte pas un surcroît de rigueur, mais une plus grande efficacité, et *in fine* diminue surtout les risques d'erreur. Pour le moment le calcul reste en effet toujours fondé sur la géométrie primitive, contrairement à ce qui se passera plus tard. C'est la raison pour laquelle on doit probablement parler d'évolution plutôt que de rupture.

5) On introduit les vecteurs, appelés aussi vecteurs libres, non pas comme des classes de vecteurs liés équipollents, mais plutôt, à la manière de Wessel [3] notamment, par leur effet en projection sur des droites. On construit les opérations sur ces derniers. C'est d'abord l'addition, à laquelle on demande d'être conservée en projection. C'est ensuite la multiplication par un scalaire, avec la distributivité par rapport à l'addition, qui s'appuie bien sûr sur le théorème de Thalès.

Avec les vecteurs on a la décomposition dans une base et la représentation d'un point par ses coordonnées. Ainsi s'ouvre une perspective nouvelle : celle de la géométrie dite "analytique". Avec, plus tard, les barycentres ou les produits scalaires on découvrira une palette de stratégies nouvelles qui vont entrer en concurrence avec celles de la stratégie traditionnelle et qui ont toutes en commun d'être plus algébriques.

6) On introduit en même temps que les vecteurs la similitude des triangles. La définition pose un petit problème car on ne peut pas la faire reposer sur une propriété physique comme on l'a fait pour l'égalité : on ne trouve pas l'agrandissement ou la réduction dans la nature. On peut décider, à la manière d'Euclide, d'en prendre acte en assumant un choix abstrait : deux triangles sont semblables s'ils ont des angles égaux et des côtés proportionnels. On peut tenter d'illustrer ce choix par la reproduction des figures en changeant d'échelle ; on noterait que le changement d'échelle est implicite dans les constructions sur papier ou ailleurs.

On peut aussi dire qu'un triangle est semblable à un autre s'il est égal à un homothétique de cet autre. Même si l'on s'y prend ainsi, il n'est pas question d'étudier l'homothétie comme transformation. Il s'agit seulement de constater qu'on passe toujours par la situation de deux triangles ayant en commun un sommet et les droites portant les côtés qui en partent et ayant des côtés opposés parallèles. On retrouve la multiplication d'un vecteur par un scalaire, donc une situation d'homothétie, pour ne pas parler, comme on le fait trop souvent au lycée, d'une "figure de Thalès".

Le travail sur les vecteurs se prolonge alors tout naturellement, principalement dans deux directions qui vont faire évoluer très sensiblement la géométrie et préparer la rupture avec la suite :

7) celle du produit scalaire

8) et celle du calcul barycentrique.

9) Surtout la connaissance des vecteurs et des rotations permet d'introduire les nombres complexes par la géométrie, à la manière de Wessel déjà cité. On se place dans un plan dans lequel on se sera donné une origine représentant le nombre 0, un vecteur unitaire représentant l'unité 1 — la droite qui le porte représentant alors les nombres réels — et un autre orthogonal au premier qui sera noté i. L'addition étant celle des vecteurs, la multiplication obéira à la règle des proportions, en longueur et en déviation. On obtient toutes les règles de calcul, l'écriture $a + ib$ comme l'écriture $e^{i\theta}$. On pourra utiliser le calcul complexe librement en géométrie sans avoir à effectuer un passage permanent et dans les deux sens entre points et nombres, sans parler d'affixe et d'image [4].

3 Caspar Wessel, mémoire à l'Académie royale des sciences et des lettres du Danemark, 1797.

4 Dans tel exercice d'un sujet du baccalauréat S, on introduit un repère orthonormal direct (O; u; v) dont on ne se sert jamais, on emploie six fois le mot "affixe" et utilise le mot "image" dans le sens qu'il a pour les transformations et non pas en liaison avec l'affixe; il y aurait plus simple.

Dès que, explicitement ou non, on aura choisi dans le plan deux vecteurs unitaires orthogonaux 1 et i, on pourra considérer par exemple le vecteur $i\,\vec{u}$ sans craindre la réprobation.

L'utilisation du calcul complexe en géométrie amène à composer des similitudes. Cela peut se faire dans le cadre de la géométrie traditionnelle sans qu'il y ait besoin de la notion de groupe ; on le faisait en terminale il y a quelques décennies avec les isométries de l'espace. Quand faut-il commencer à composer ? C'est à discuter. En tout cas on ne considèrera que certaines transformations particulières, ne cherchant pas à donner une définition ensembliste générale.

10) Plus tard, à l'université sans doute, c'est en rupture complète avec cette approche qu'on partira du corps **C** des nombres complexes introduit — sans utiliser le vocable — comme une extension algébrique du corps **R** de nombres réels. Ensuite on y développera la géométrie *in situ*, avec un produit scalaire, des rotations puis des angles, le tout venant immédiatement sans effort ni présupposé. On retrouvera les formules d'addition des lignes trigonométriques comme de pures conventions d'écriture.

Ensuite on s'intéressera, à peine plus généralement, à la géométrie d'un plan vectoriel euclidien — i.e. muni d'un produit scalaire. Enfin on passera à la géométrie d'un espace vectoriel euclidien de dimension n.

11) En même temps la géométrie nouvellement revue, sous ses formes vectorielle, affine, projective ou métrique, reposera sur la considération de groupes de transformation, qui sont les groupes linéaire, affine, projectif ou orthogonal.

En résumé ce sont deux modes de pensée qui se succèdent, l'un inspiré par la géométrie d'Euclide et l'autre par l'ouvrage élémentaire de Dieudonné et le programme de Klein. Dans tout cela on notera qu'il n'y a pas la place pour enseigner les présentations axiomatiques de la géométrie traditionnelle. Ce serait semer le désordre dans un paysage déjà difficile à décrypter.

On a omis dans ce qui précède des questions comme les coniques ou la polarité par rapport à un cercle. Elles figurent dans la progression des deux côtés de la rupture.

D'un côté on donne des coniques une définition bifocale ou par foyer et directrice, jusqu'à l'obtention de leur équation dans des axes adaptés. De l'autre on s'intéresse aux formes quadratiques dans le plan, dont on établit le classement projectif, affine puis métrique. D'un côté la polarité par rapport à un cercle part de la puissance d'un point. De l'autre côté on trouve l'orthogonalité pour une forme quadratique non positive.

La géométrie dans l'espace.

La géométrie dans l'espace est un sujet difficile. La raison la plus évidente de cette difficulté réside dans le délicat problème de la représentation des figures de l'espace. C'est là qu'un contresens majeur alimente les propositions qui fleurissent aujourd'hui. A voir nombre d'activités présentées, on pourrait s'imaginer qu'il faille obligatoirement partir de représentations géométriquement exactes pour asseoir le raisonnement. Or on ne peut rien comprendre à ces représentations sans en démonter le principe, ce qui suppose que l'on sache déjà raisonner avec l'espace.

1) Il faudra donc impérativement partir de représentations suggestives, qui sont juste là pour aider la pensée et sur lesquelles on ne peut rien lire directement. Certes, quelques conventions simples aideront à la compréhension du dessin : différence entre des droites se coupant et des droites passant l'une devant l'autre, figuration d'une droite rencontrant un plan par la transition entre un trait plein et un trait pointillé, figuration d'une droite incluse dans un plan par sa limitation aux bords du parallélogramme figurant le plan etc. Cependant ces conventions ne sont pas impératives et elles ne remplacent pas l'énoncé de propriétés prises en hypothèse ou déduites par raisonnement. Jamais il ne doit être demandé de tirer quoi que ce soit de la lecture d'un dessin.

On comprend assez facilement les réticences que manifestent certains à aborder la question de cette façon. D'abord le dessin s'affranchit complètement des exigences de rigueur à la mode. Ensuite il n'est plus possible de proposer des exercices où il n'y a pas d'énoncé à lire. Pour ces deux raisons on a créé des exercices de construction d'intersections de solides avec des plans. On les oubliera parce qu'ils ne relèvent pas du mode de pensée, abstrait indiscutablement, dont on recherche l'acquisition par les élèves. Ces problèmes d'intersection sont d'abord sans intérêt réel ; ensuite ils tendent à transformer le raisonnement en recettes.

2) La géométrie dans l'espace commence avec l'incidence et le parallélisme des droites et des plans et il se poursuit avec l'orthogonalité de ces figures, laquelle nous ramène aux cas d'égalité.

Cette géométrie ne peut être abordée, dans le savoir structurant, qu'au lycée. Sans doute n'est-elle pas accessible à tous. Cela ne veut pas dire qu'il ne faille pas considérer des objets de l'espace avant. On doit même le faire dès l'école élémentaire, et calculer des volumes par exemple. Là il ne s'agit pas d'une initiation à la géométrie comme science. En revanche le calcul de surfaces et volumes donne du sens aux opérations, au même titre que les petits problèmes de négoce ou que les exercices élémentaires de sciences de la nature. Il a donc toute sa place aussi bien à l'école qu'au collège, voire au-delà.

On ne cherchera pas à faire travailler les élèves sur des patrons du genre que l'on propose pour un parallélépipède ; construire une boîte en bois se fait en clouant des planches rectangulaires, pas par pliage ; même pour une boîte en carton, on économise la matière et on colle des rectangles ; pour une robe on procède à des coutures plutôt que des pliages. Mieux vaut présenter des solides réels et faire jouer les élèves avec. C'est même la seule activité à retenir pour s'accoutumer aux représentations suggestives dont on a parlé.

3) Après avoir travaillé sérieusement la géométrie dans l'espace, on peut alors raisonnablement s'intéresser aux représentations planes comme la perspective, qui sera parallèle pour commencer, et fuyante ensuite. Le risque est grand de voir la perspective fuyante s'introduire dans le tronc commun futur alors que la géométrie dans l'espace n'y serait plus. Déjà, en série L, cette perspective est enseignée non pas comme un prolongement de la géométrie dans l'espace, ce qui serait d'ailleurs ambitieux, mais comme une technique de dessin, dont on apprend quelques règles à appliquer sans chercher à les comprendre. On l'admettrait dans un enseignement professionnel, encore qu'il y a aujourd'hui des outils

de conception assistée qui rendent ces techniques obsolètes.

Il y a deux conditions pour que la perspective fuyante puisse être un prolongement naturel de la géométrie plane ou dans l'espace. D'abord que l'on ait maîtrisé la vision dans l'espace, jusqu'à être capable de se représenter la scène dans laquelle l'observateur regarde le paysage à travers un écran. Ensuite que l'on dispose des éléments de géométrie projective plane, tels que division harmonique, faisceau harmonique et si possible birapport, qui permettent de travailler sans référence constante à la scène précédente. Il y a quelques décennies, l'enseignement de la géométrie du lycée apportait une partie de ces certains éléments. C'est au moins à ce prix qu'on pourra parler utilement de perspective.

En attendant on peut très bien utiliser l'espace comme un outil de démonstration en géométrie plane, pour des propriétés d'incidence à la Desargues. On relie le plan à l'espace par une projection, parallèle ou centrale, conservant ces propriétés, et on relève les points d'une figure plane en respectant l'appartenance à certains plans ou certaines droites.

Terminons sur un point particulier. On pourrait être tenté de saisir l'occasion de la géométrie dans l'espace pour introduire un peu systématiquement le vocabulaire de la théorie des ensembles, puisque les situations d'intersection y sont plus variées qu'en géométrie plane. Mieux vaut y renoncer cependant. On parlera bien sûr d'un point sur une droite, d'une droite passant par un point ou de deux droites sécantes, mais aussi bien parlera-t-on d'un point commun à deux droites, d'une droite contenue dans un plan ou de l'intersection de deux plans etc. Cependant rien n'oblige à y voir la théorie des ensembles, à distinguer par exemple appartenance et inclusion [5]. D'ailleurs il s'agit bien d'une théorie, pas d'un langage. Son introduction dans l'enseignement ne doit intervenir qu'après la rupture qui fait de l'algèbre le nouveau point de départ. Pour le moment donc, loin de toute intention normalisatrice, on devrait présenter la terminologie, dans sa grande variété, comme un témoignage de richesse linguistique. D'ailleurs autoriser une expression souple pour désigner un concept précis est fait courant en mathématiques.

Les fonctions.

Au départ une fonction est une variable qui dépend d'une autre. C'est ainsi qu'on voit les fonctions en géométrie, en mécanique, en physique : la surface d'un triangle de base donnée dépend de la hauteur, la position d'un mobile dépend du temps, la force d'attraction entre deux masses dépend de la distance mutuelle etc. C'est aussi le cas pour les premiers exemples rencontrés au collège : la masse de fil de cuivre de section donnée dépend de la longueur par exemple.

Etudier des fonctions, c'est d'abord envisager et exprimer différents modes de dépendance : proportionnelle, affine, proportionnelle au carré, inversement proportionnelle etc. On exprime ces dépendances par $y = ax$, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = a/x$, etc. Il est donc tout à fait indiqué de parler de la fonction $y = ax + b$ et d'en étudier les propriétés.

On introduit en revanche une confusion totale dans la pensée si l'on veut traduire la notion abstraite de fonction telle qu'elle est considérée dans Bourbaki, laquelle repose princi-

5 Les deux façons de s'exprimer continuent d'ailleurs de cohabiter lorsqu'on pratique le langage ensembliste.

palement sur la considération d'un graphe. C'est ce qu'on fait lorsqu'on présente les tableaux de valeur ou les courbes représentatives comme des procédés *définissant* des fonctions.

La notation fonctionnelle $f(x)$ n'a pas sa place dans l'initiation aux fonctions : elle relève de la théorie des ensembles. Par ailleurs cette notation n'est pas très performante en pratique. Ecrire une dérivée $f'(x)$ ou dy/dx n'est absolument pas indifférent quand il s'agit d'y mettre du sens ou d'effectuer des calculs simples.

Les limites.

Le mode de pensée qui doit présider un long moment à l'apprentissage des limites est celui de leur calcul. Dans un premier temps en effet, on ne cherchera absolument à donner un sens tant soit peu général à l'idée de limite, même pas dans un contexte très particulier. C'est même du mot "limite" qu'on cherchera à faire un usage très ... limité. En aucun cas on n'utilisera le symbole lim, sous quelque prétexte que ce soit. Même à l'université il faudra se méfier de ce formalisme, qui conjugue inefficacité pratique et risque d'erreurs.

Le principe de passage à la limite — plutôt que de limite — commence avec la considération de la dérivée. Cette notion de dérivée est centrale dans l'enseignement délivré au lycée, ce qui est parfaitement défendable. Elle figure actuellement dans toutes les séries et il est à peu près sûr qu'elle sera dans le futur tronc commun.

Quel est le sens premier de la dérivée ? C'est certainement celui de **pente**, qu'on trouvait déjà chez les Grecs avec les tangentes. En géométrie la dérivée est la pente de la tangente. L'association entre les mots "pente" et "tangente" est dans la nature des choses.

C'est la mécanique, comme celle de Newton, qui a donné à la dérivée l'importance qu'on lui connaît aujourd'hui ; en effet la vitesse est une dérivée, l'accélération en est une autre, plus importante encore. Cependant la novation n'a pas seulement résidé dans la considération des variations de la vitesse plutôt que de la position ; elle a aussi été de traiter de la même façon la variable de temps et les variables d'espace, autrement dit de faire de la vitesse une pente. C'est d'ailleurs le mot pente qui est utilisé en Physique pour désigner la dérivée dy/dx d'une grandeur par rapport à une autre, indépendamment de leur espèce.

A la pente on oppose le **taux**, qui est une dérivée logarithmique ou une pente relative, à savoir dy/ydx. Dans le taux n'y intervient que la dimension de x, alors que dans une pente interviennent celles de x et de y ; sachant que la pente est sans dimension en géométrie puisque x, y sont des longueurs.

Au moment où l'on envisage un tronc commun important, comprenant notamment la série ES, il est fondamental de bien dégager ces deux notions de pente et de taux et d'utiliser autant que possible un vocabulaire commun, lequel sera ensuite complété par divers synonymes : vitesse, coût marginal etc.

On met beaucoup trop l'accent aujourd'hui sur la problématique des limites dans la dérivée. C'est y introduire un mode de pensée qui n'aura sa vraie place que beaucoup plus tard. Il est douteux que les élèves, surtout ceux qui ne s'intéresseront pas beaucoup aux sciences, y trouvent beaucoup de sens. En revanche ils en oublieront vite que la dérivée se voit sur la courbe représentative comme une pente et que c'est un quotient de petits accroissements.

1) Pour commencer on apprendra donc à calculer une dérivée : on formera le quotient

$$\Delta y/\Delta x$$

pour $\Delta x \neq 0$ et on obtiendra la dérivée "en passant à la limite" quand Δx tend vers 0. Le résultat est noté

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$$

et les physiciens se contenteront de voir dans dx et dy des accroissements Δx et Δy suffisamment petits ; on y reviendra. En pratique c'est souvent la valeur de l'expression simplifiée pour $\Delta x = 0$. On "passe à limite" là où c'est évident, pour trouver la "vraie valeur" comme on disait.

En tout cas on se garde bien de chercher à dire ce qu'est une fonction dérivable. La seule question est de savoir si l'on peut calculer une dérivée, ce qui revient au même mais n'a pas à donner lieu à une définition quelconque.

Un cas posant problème est celui des lignes trigonométriques. On peut se servir du fait que

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

mais, pour donner de la seconde inégalité une preuve heuristique à la fois simple et convaincante, plutôt que la longueur d'arc mieux vaut considérer des aires. Il en résulte

$$\cos x \leq \sin x \,/\, x \leq 1\ .$$

Il est étonnant que les programmes actuels, qui mettent l'accent sur le "théorème des gendarmes" ne s'en soient pas saisis.

2) Dans la foulée des passages à la limite sans problème, on admet, comme tombant sous le sens, la dérivée d'une somme ou d'un produit, avec la règle de la chaîne

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

et la dérivée d'une fonction réciproque. Les puristes vont certainement hurler car on n'a pas dit que y était dérivable par rapport à x et z par rapport à y. Où est le risque ? On n'appliquera la formule pour trouver le membre de gauche que si l'on sait calculer chacun des facteurs de droite. Pour la fonction réciproque c'est pareil, sauf qu'il y a une difficulté, mais facile à cerner heureusement : on n'accepte pas les pentes infinies.

3) Une situation dans laquelle on peut aller un peu plus loin est celle des suites. On peut en effet "calculer" une limite monotone et "démontrer" le résultat suivant lequel *toute suite croissante majorée admet une limite*. Calculer signifie ici que pour une suite monotone, soit elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit on peut obtenir une après l'autre les décimales d'un nombre qui sera la limite cherchée. Il ne serait pas conforme au mode de pensée dans lequel on évolue de tenter de définir ce nombre \$l\$ par ses propriétés. On se contentera d'établir la règle "de passage à la limite" suivante : si $u_n \leq v_n$ pour tout n, on a une inégalité $l \leq k$ en passant à la limite.

4) Pour les fonctions monotones on peut parler de continuité pour dire qu'il n'y a pas de saut, ni à gauche ni à droite. Parler à ce sujet de limite ne sert strictement à rien.

L'intégrale étant introduite heuristiquement comme une aire, comment dérive-t-on par rapport à la borne supérieure l'intégrale d'une fonction continue monotone ? On explique par un changement d'échelle la relation

$$\frac{1}{h} = \int_a^{a+h} f(t)\,dt = \int_0^1 f(a+uh)\,\mathrm{d}u$$

et l'on constate que le membre de droite est une fonction monotone de h. Supposons par exemple f croissante et dérivons la à droite en a ; on peut passer à la limite pour $h \longrightarrow 0$, $h > 0$, obtenant une valeur l qui vérifie

$$f(a) \leq l \leq f(a+k)$$

pour $k > 0$; alors $l = f(a)$ parce qu'il n'y a pas de saut.

5) Il faudra parler du comportement à l'infini, mais davantage dans le sens de son calcul que dans celui d'une quelconque définition abstraite. On insistera sur la démonstration du fait que $x\mathrm{e}^{-x}$ est infiniment petit quand $x \longrightarrow +\infty$ en le majorant, pour $x \geq 1$, par $2/x$ qui est ostensiblement infiniment petit.

Le comportement à l'infini d'une fraction rationnelle se fera en écrivant le quotient sous une forme du genre

$$ax^n \cdot \frac{1+\frac{b}{x}+\ldots}{1+\frac{c}{x}+\ldots}$$

où il n'y a plus qu'à remplacer par zéro les puissances négatives de x des numérateur et dénominateur pour conclure.

Dans le même ordre d'idées il serait cohérent de remettre au goût du jour la recherche des asymptotes.

6) La simple convergence des suites monotones permet, entre autres, de définir l'exponentielle a^x pour $a > 0$ et x réel à partir de $a^{p/q}$ pour p, q entiers. Pour dériver les fonctions exponentielle et logarithme, on insistera sur les calculs dont on s'assurera la validité, indépendamment de toute définition générale, suivant le schéma proposé par Jean-Pierre Demailly. C'est ainsi que la continuité en 0 de la fonction a^x s'établira à partir des inégalités

$$1 \leq (1+h)^{1/q} \leq 1 + \frac{h}{q}$$

pour $h \geq 0$ et q entier supérieur ou égal à 1 .

Il n'y a pas de différence énorme avec ce qui est enseigné aujourd'hui. On est un peu plus ambitieux sur les limites monotones et surtout plus réaliste en évitant de parler des autres pour ne rien dire. Ce faisant on a respecté une unité de pensée, celle du calcul en général, des majorations en particulier. Certains se révolteront, bien à tort. Tenir un discours qu'on dit correct en haut lieu mais qui ne vous dit rien est bien la pire des choses.

7) Ce n'est que plus tard, à l'université sans doute, qu'on reprendra *ab ovo* la question des limites, pour donner une définition générale et investir autant qu'il le faudra.

Les nombres et le calcul sur machine.

Un grand problème des élèves qui sortent aujourd'hui de notre système éducatif est leur inculture numérique. Dès le départ l'utilisation des calculatrices, même si elle n'est pas aussi générale que certains le souhaiteraient, a au moins eu pour effet la dépréciation du calcul mental ou posé et une moindre familiarité des élèves avec les nombres, leur taille ou leur précision, puisqu'ils ne disposent plus autant du baromètre que constituait la difficulté du calcul. En même temps la culture de la rigueur, d'une rigueur toute superficielle d'ailleurs, a fait dédaigner tout ce qui n'était pas exact. Or les calculs numériques ne le sont jamais. Aujourd'hui la notion d'erreur est complètement évacuée : on parle même de calcul approché pour ce qui est un encadrement exact ou une limite exacte.

Voici un exemple pour illustrer le propos. On veut faire calculer par une machine quelconque — calculatrice ou tableur — la dérivée en un point d'une fonction simple, la pente de $y = \sin x$ au point $x = 1$ par exemple, en prenant un quotient d'accroissements :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin(1+\Delta x) - sin\ 1}{\Delta x}$$

Comment faut-il choisir Δx ? Le calcul différentiel nous dit que l'erreur, absolue comme relative, par rapport à la dérivée exacte est de l'ordre de Δx. Supposons que l'on calcule à la précision (en virgule flottante, donc relative) $\varepsilon = 10^{-10}$. Les erreurs absolues sur le numérateur et le dénominateur étant de cet ordre, les erreurs relatives seront de l'ordre de $\varepsilon/\Delta x$. Ce sera aussi le cas de l'erreur, relative comme absolue, sur le quotient. Finalement, en ajoutant les deux causes d'erreur, on aboutit à $\Delta x + \varepsilon/\Delta x$, qui est minimum pour Δx de l'ordre de $\varepsilon = 10^{-5}$. Si l'on avait pris une différence symétrique, on aurait eu $(\Delta x)^2 + \varepsilon/\Delta x$ et on aurait choisi Δx de l'ordre de $\varepsilon^{1/3}$, soit 10^{-3} environ, pour erreur de l'ordre de 10^{-6}.

Les probabilités et statistiques.

La théorie des probabilités est connue comme difficile. Et elle précède celle des statistiques mathématiques, qui ne le sont donc pas moins.

1) Le premier mode de pensée, parfaitement représenté par Pascal, est celui d'une probabilité fixée *a priori* pour un événement donné. C'est le jeu de pile ou face *non faussé* qui impose, par sa qualification même, une probabilité égale à 1/2 pour chacune des faces.

Le choix a priori n'est pas gratuit ; souvent il tient compte de symétries qu'il serait sage d'expliciter. On ne doit pas confondre l'invariance par symétrie — qui est l'invariance sous l'action d'un groupe — et l'équiprobabilité, même si la première implique souvent la seconde : quand on lance deux dés il n'y a pas équiprobabilité des paires ; mais il n'y a pas non plus, dans la nature du problème, de groupe opérant utilement sur les paires [6]. Il en est de même dans les exemples géométriques ; souvent le choix respecte aussi une invariance par symétrie, précisément par l'action d'un sous-groupe du groupe des déplacements. On ne doit pas la confondre avec l'uniformité de la loi. On peut donc à la rigueur choisir au hasard un point sur un cercle ; dans les autres cas, comme pour un point sur une droite ou dans un disque, on doit absolument spécifier la loi considérée.

2) La théorie s'installe avec la notion de probabilité conditionnelle et celle d'indépendance. Cette dernière est aussi posée *a priori* et il serait sage d'être explicite. Lancer deux dés, en même temps ou l'un après l'autre, laisse imaginer que les lancers sont indépendants. Autant le dire ; de cette façon, le modèle à considérer sera en général, à des détails cosmétiques près, unique et incontesté.

6 En revanche on traduit le fait que les faces sont interchangeables en faisant agir de deux façons le groupe S6 sur les couples de dés.

3) Lancer plusieurs fois un dé permet d'aborder l'aspect statistique et de prévoir une fluctuation que l'on constatera expérimentalement.

Le problème est que ces petites probabilités s'appuient sur l'arithmétique combinatoire. Or il s'agit d'une question difficile, qu'on ne peut pas aborder dès le berceau malheureusement.

Là encore, il ne s'agit pas d'interdire de faire des calculs, dits statistiques, sur des tableaux de valeurs. Cependant cette statistique descriptive n'est pas à voir comme une introduction aux probabilités, mais comme un prolongement du sens des opérations. On calculera des moyennes, des moyennes par paquets ; c'est une préparation aux barycentres plus qu'autre chose. En même temps on reverra les proportions, les fractions ; c'est un retour utile sur les opérations.

En revanche l'approche fréquentiste, à la mode depuis pas mal de temps déjà, n'est qu'une formule pour embrouiller tous les modes de pensée [7]. Puisqu'on ne peut pas comprendre la combinatoire de base et qu'on doit rester en deçà, faisons comme si l'on était initié aux lois des grands nombres et pensons bien au-delà.

Cela ne veut pas dire qu'il ne faille pas faire des calculs de proportions, bien au contraire. Sous l'hypothèse de l'équiprobabilité, ces calculs vont déboucher sur des probabilités. Mais commencer par maîtriser les proportions est déjà un objectif sérieux, comme facette du sens des opérations, sans plus et sans sauce fréquentiste en tout cas.

7 L'exemple du lancer de punaise est pris pour illustrer cette approche. Pourtant si l'on réfléchit, on y trouve encore à l'origine l'idée de probabilités p, 1-p. On ne les connaît pas, mais on peut faire diverses supputations ; l'expérimentation n'en est que plus intéressante après. D'ailleurs la statistique s'appuie bien sur la probabilisation les échantillons à partir d'une probabilité a priori.

Les rapports avec l'informatique.

Contrairement à ce qu'on entend souvent, l'informatique n'est pas entrée dans les programmes de l'école, du collège ou du lycée. Il ne faut pas confondre l'apprentissage de la science informatique avec l'utilisation des nouvelles technologies.

A priori l'utilisation d'une technologie dans l'enseignement n'a pas plus à être encensée qu'à être diabolisée. On a abandonné la plume d'oie pour écrire. Il n'y a pas de raison de s'interdire l'usage d'Internet.

Il y a deux technologies largement répandues aujourd'hui à l'école, le calcul sur machine et la géométrie assistée par ordinateur. Le problème n'est pas de les avoir essayées. C'est d'en avoir fait un progrès a priori et d'interdire de les remettre en cause. Or nous allons voir que, dans l'un et l'autre cas, le résultat est une désagrégation de la pensée structurante et de la cohérence des contenus.

Pourquoi apprend-on à calculer à la main ou de tête ? Pour acquérir simultanément la familiarité avec les nombres et le sens des opérations. C'est une grande unité qui se dégage à cette occasion. Le calcul mental intervient en permanence dans le calcul posé par l'appel aux tables. L'un et l'autre concourent à asseoir les principes de la numération. En même temps effectuer une opération ainsi nécessite une relation permanente avec le sens de cette opération : ajout, retrait, ajouts répétés, partage. Les ordres de grandeurs des données et du résultat sont dans la tête ou sous les yeux. Pour une division, la précision est liée à l'effort accepté. Sans oublier que mieux vaut ne pas gaspiller son énergie en se lançant dans un calcul sans réfléchir.

Certains disent qu'avec une machine, délivré de l'effort du calcul, on pourra passer plus de temps à réfléchir au sens des opérations. Certes, demander aux élèves d'effectuer à la chaîne des calculs fastidieux n'apprendra rien. La machine serait préférable dans un tel cas, mais ce n'est pas une situation d'apprentissage. A l'école la machine va désagréger la belle unité dont on a parlé, ne permettant pas à l'élève de s'approprier le calcul. On va alors délirer sur le sens des opérations en dissertant sur les multiples facettes de la soustraction ou de la division, délivrant le message qu'il y a quantité de mystères dont on ne fera jamais le tour. On notera que les programmes ne vont pas jusqu'à proposer l'usage exclusif des machines. Ils présentent les quatre calculs : mental, posé, instrumenté, approché. L'insistance sur la différentiation est bien le signe de l'absence d'unité. Comme le calcul instrumenté n'appartient pas à l'élève mais au concepteur de l'instrument, il ne peut se fondre avec les premiers ; on a alors inventé un calcul approché qui n'en n'est pas un pour faire diversion.

Passons à la géométrie assistée par ordinateur, aux logiciels de géométrie dynamique comme on dit. Il y a une différence avec les quatre opérations. Pour ces dernières, la machine fait ce que l'élève n'a pas le courage de faire. C'est comme s'il volait la solution à un autre, mais sans plus. La géométrie dynamique ne fait pas ce qu'on demande à l'élève. Elle modifie fondamentalement la problématique du sujet, nécessitant un apprentissage spécifique. Elle s'appuie en interne sur des procédures totalement étrangères à la culture de l'élève auquel elle est proposée. Tout ce qu'il pouvait y avoir de commun avec la démarche scientifique dans l'enseignement de la géométrie est sacrifié. C'est beaucoup plus grave que l'utilisation paresseuse d'une machine.

La géométrie dynamique n'est pas sans intérêt. Mais à sa place, comme application des calculs analytiques en géométrie. Autrement dit à la fin du lycée, à titre de récréation.

Pour autant il n'est pas dit que l'on doive, pour enseigner, suivre indéfiniment la voie d'Euclide et celle de Descartes. Un argument très fort est qu'elles correspondent, au-delà des mathématiques, à la naissance ou à un grand pas de la science. Mais la science évolue. D'ailleurs on peut aussi s'interroger sur l'utilité d'enseigner la géométrie. On pourrait au moins s'entendre sur la nécessité de débattre en profondeur de la nature de ce qu'il faut enseigner avant d'introduire des éléments pouvant la modifier. Si la commission avait pu proposer une vision alternative de la géométrie, aussi riche, cohérente et enchâssée dans la science que celle de nos devanciers, qui intègre naturellement la géométrie dynamique, elle serait proposée ici. Peut-être d'autres y parviendront-ils.

Il y a eu quelques vagues tentatives de coloration informatique des programmes. Déjà, depuis trois ou quatre décennies, on lit dans les exposés des motifs l'importance qu'on entend donner à la démarche algorithmique. Pour autant toute formulation d'inspiration algorithmique est encore interdite au baccalauréat. On notera deux exceptions.

En série ES on a introduit les graphes dans les programmes. Seulement on n'a pas mis d'algorithmique. On dispose d'une structure de données assez riche pour en faire, mais on n'en fait pas. En série L on a introduit explicitement l'algorithmique, mais sans langage adapté ni structuration des données.

La seule façon de justifier ces nouveautés serait de les voir, non pas comme de nouveaux contenus puisqu'elles n'en sont pas, mais comme un prolongement du contenu structurant s'il y en avait un. Pour les graphes, on ne voit pas. Pour l'algorithmique de la série L, ce ne peut être qu'une façon, comme une autre sans plus, de s'exercer au raisonnement et à la maîtrise de la langue. On pourrait aussi parler au lycée des aspects très basiques de l'information, à propos des petits nombres entiers par exemple ; ce n'est qu'une façon de repenser au calcul posé, à la précision etc.

De façon générale, le mieux est encore de considérer que l'informatique n'a pas sa place dans les premiers degrés de l'enseignement.

Les rapports avec la physique.

De quelque façon qu'on retourne la chose, il n'y a pas le moindre contenu, ni dans un sens ni dans l'autre, dans une hypothétique interface entre les mathématiques et la physique ; les deux disciplines s'interpénètrent en effet largement.

Déjà, la géométrie étant une science physique, les enseignants de mathématiques enseignent encore de la physique sans le savoir. L'enseignement de la mécanique, laquelle ne fait jamais qu'ajouter le temps à la géométrie, ne leur posait aucun problème il y a quelques décennies. Leur demander de traiter la cinématique du point ne serait probablement pas absurde. Mais peu importe lequel, du mathématicien ou du physicien, enseigne une question donnée. On pourrait par exemple envisager de placer l'optique géométrique dans le programme de mathématiques si celui de physique n'en veut plus.

A l'inverse les enseignants de physique ont toujours enseigné des mathématiques. Ils démontraient les lois de Newton et de Descartes en optique, autrement dit ils écrivaient des équations réduites pour certaines involutions ou homographies. Ils résolvent depuis toujours des équations différentielles. Il est vrai que la tendance de l'enseignement de la physique est plutôt d'en retirer les aspects mathématiques, même si cela va contre l'avis de quelques physiciens éminents.

Dans une situation idéale, les contenus de l'enseignement des mathématiques et de la physique se chevauchent donc harmonieusement. A défaut il faut éviter à tout prix quelques écueils.

C'est d'abord se croire obligé de donner une coloration physique à certains exercices de mathématiques, alors qu'on ne sait pas de quoi l'on parle. Déjà le fameux chariot "fou" du baccalauréat 2004 était loin d'être convaincant. Bien souvent l'exercice tourne au grotesque. Il ne semblerait d'ailleurs pas que cela heurte les collègues physiciens ; l'idée est que chacun fait se qu'il veut dans son cours.

C'est aussi s'atteler à écrire un dictionnaire donnant la traduction de chaque terme d'une discipline vers l'autre. Il faut bien comprendre que la physique utilise le langage des mathématiques. Si l'on constate quelques divergences, c'est parce que l'enseignement de telle discipline s'est coupé de celui de l'autre et que le vocabulaire s'est mis à diverger. Il suffirait de prendre l'avis de quelques scientifiques incontestés pour y remettre de l'ordre.

Que faut-il faire alors ? Tout simplement mettre en place, en mathématiques, des contenus compatibles avec l'enseignement de la physique, ce qui suppose qu'ils auront reçu l'aval des autorités scientifiques. Les enseignants de mathématiques pourront alors enseigner tranquillement leur discipline, sans autre souci. Du côté des contenus en physique, il serait bon que l'accent soit mis sur quelques équations de base, pour permettre de s'en servir en mathématiques, facultativement et à l'occasion.