QUELLE PROBLEMATIQUE POUR UN ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES EN TROISIEME ?

Yves DUCEL, Bruno SAUSSEREAU
Irem de Besançon,
Université de Franche-Comté

Notre expérience de la formation continue des enseignants montre que, chez beaucoup de collègues, enseigner les probabilités signifie faire calculer des fréquences et faire observer, par manipulations concrètes ou par simulation informatique, « que la fréquence se stabilise au cours d'un grand nombre d'essais successifs ». Sans nier la place que cette observation peut avoir dans un enseignement du calcul des probabilités [1], ni qu'elle est la source même de l'efficacité de la théorie probabiliste dans notre prévision des phénomènes aléatoires, il n'en demeure pas moins qu'elle présuppose de la part des élèves de manipuler des concepts (hasard, phénomène aléatoire, expérience aléatoire, événements, …) qu'il convient donc de mettre en place en amont tout en leur donnant du sens.

Les probabilités sont apparues, cette année, pour la première fois dans les programmes du collège. Les élèves sont donc amenés pour la première fois à travailler explicitement sur des situations où intervient le hasard. Aussi plus qu'un calcul des probabilités, l'enseignement des probabilités en collège doit être pensé en premier lieu comme une réflexion sur l'aléatoire.

La matière même de cet article est issue d'un travail sur la mise en œuvre des nouveaux programmes de collège en probabilités, effec-

* Le texte de cet article est issu d'une conférence tenue par Yves Ducel dans le cadre des Journées interacadémiques de mathématiques organisées par l'académie de Nantes à Saumur le 10 décembre 2008.

1 Pour un développement de cette question, on pourra se reporter au document d'accompagnement des programmes : *Ressources pour les classes de 6°, 5°, 4° et 3° du collège, Probabilités au collège*, mars 2008, eduscol.education.fr/D0015/

tué actuellement dans le cadre des groupes de travail « Statistique et Probabilités [2] » et « Collège [3] » de l'IREM de Franche-Comté. Conduite également en concertation avec les inspecteurs pédagogiques régionaux de mathématiques de l'académie de Besançon [4], cette réflexion a donné lieu à une co-intervention avec Bruno Saussereau lors de la journée académique sur les nouveaux programmes de collège organisée par l'Inspection dans différents collèges à l'intention des professeurs de classe de troisième de l'académie de Besançon en octobre 2008.

I. — Pourquoi, et dans quel but, enseigner les probabilités ?

Dans son rapport au ministre de l'Éducation nationale, J.P. Kahane écrivait en 2000, au sujet de l'introduction de la statistique dans les programmes de collège et des probabilités en lycée :

> « Pour comprendre l'actualité, une formation à la statistique est aujourd'hui indispensable ; c'est une formation qui développe des capacités d'analyse et de synthèse et exerce le regard critique. Le langage élémentaire de la statistique (avec ses mots tels que moyenne, dispersion, estimation, fourchette de sondage, différence significative, corrections saisonnières, espérance de vie, risque, ...) est, dans tous les pays, nécessaire à la participation aux débats publics : il convient donc d'apprendre ce langage, ses règles, sa syntaxe, sa sémantique ; l'enseignement de la statistique étant, par nature, associé à celui des probabilités, il s'agit en fait d'une *formation à l'aléatoire*. » [5]

En effet, il est désormais commun de constater que :

- — La culture statistique est indispensable pour développer l'esprit critique du citoyen.
- — La place de la statistique s'est largement étendue dans les programmes du lycée et du collège.
- — La statistique descriptive n'est plus suffisante à la compréhension du discours statistique.
- — Les notions de risque et de sondage sont désormais très présentes dans le discours médiatique.
- — Des notions élémentaires de statistique inférentielle doivent désormais faire partie de la culture du citoyen.
- — La statistique et les probabilités sont intimement liées dans les applications concrètes des théories sur l'aléatoire.
- — La formation à l'aléatoire est déjà présente au niveau du collège dans de nombreux pays européens.

Le rapport étroit au réel des théories statistiques et probabilistes pose la question de la finalité d'un enseignement de ces deux disciplines, et surtout celle de l'enseignement en

2 Composition du groupe « *Statistique et probabilités* » : Yves Ducel (Université de Franche-Comté), Jean-Pierre Grangé (Lycée Pergaud, Besançon), Françoise Larnaudie (Lycée agricole Granvelle, Dannemarie-sur-Crête), Bruno Saussereau (Université de Franche-Comté).

3 Composition du groupe « *Collège* » : Sabine Bouveret (Collège, Scey-sur-Saône), Sylvie Dontenwill (Collège Gérôme, Vesoul), Christine Grandjean (Collège Entre-Deux-Velles, Saône), Philippe Sabiri (Collège Aigremont, Roulans), Patrick Walter (Collège Boulloche, Bart).

4 Chantal Geoffroy et Geneviève Loridon (IA-IPR de mathématiques, académie de Besançon).

5 Kahane J.P. (dir.) : *Rapport au ministère de l'Éducation nationale : L'enseignement des sciences mathématiques*, 2002, page 52.

collège des probabilités. En complément à la citation précédente, J.P. Kahane poursuivait une page plus loin :

> « L'objectif d'une initiation aux probabilités et à la statistique aux niveaux collège et lycée est d'enrichir le langage, de repérer des questions de nature statistique, de définir des concepts qui fonderont un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace. » [6]

C'est bien à « fonder un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace » que devront s'attacher les activités pédagogiques proposées dans le cadre d'un enseignement des probabilités. Les élèves devront donc être confrontés à une démarche de modélisation dont le but sera de leur faire réaliser que la mathématique nous aide à comprendre le monde et à agir sur lui.

Le fil conducteur de cette démarche est à l'exemple de celle du gestionnaire chargé de l'approvisionnement des stocks qui commence par recueillir des données statistiques sur l'évolution de son stock ; à partir de ces données, il élabore un modèle probabiliste de cette évolution ; puis, à partir de ce modèle, il fait des prévisions sur l'évolution future du stock. Enfin il considérera que son modèle est « bon » si ses prévisions sont corroborées par l'évolution réelle du stock.

Nous allons donc maintenant préciser les spécificités de cet enseignement au niveau du collège en considérant son contexte, puis nous dégagerons les objectifs qu'on peut lui assigner. Enfin, nous nous essaierons à proposer des définitions pour les concepts introduits au collège ainsi qu'une démarche à mettre en œuvre dans l'analyse des situations aléatoires.

II. — Le contexte de l'enseignement des probabilités en collège

Avant d'étudier plus en détail les objectifs de cet enseignement, examinons le contexte dans lequel il s'exerce au collège. Grosso modo nous devons prendre en compte trois aspects de ce contexte :

— Le contexte institutionnel : les nouveaux programmes.

— Le contexte culturel.

— Le contexte pédagogique.

Le contexte institutionnel :
les nouveaux programmes

Commençons par citer la partie des programmes du collège (version [7] août 2008) consacrée aux probabilités :

> Connaissances : 1.4. Notion de probabilité
> <u>Capacités</u>
> Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité.
> Calculer des probabilités dans des contextes familiers.
> <u>Commentaires</u>
> La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loterie, urnes, etc. ...).
> La notion de probabilité est utilisée pour

6 Kahane J.P. (dir.) : *Rapport au ministère de l'Éducation nationale : L'enseignement des sciences mathématiques*, 2002, page 53.

7 « Programmes du collège, programmes de l'enseignement des mathématiques », *Bulletin officiel spécial*, N°6, 28 août 2008, Ministère de l'Éducation nationale, page 34.

modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves*.

Les programmes distinguent deux aptitudes dans les capacités exigibles des élèves. D'une part les élèves doivent acquérir le sens des concepts introduits et développés, d'autre part ils doivent être capables de les mettre en œuvre à travers des calculs élémentaires. Les concepts introduits devront être abordés à partir d'expérimentations, ce qui suppose la manipulation physique de situations réelles concrètes. Par ailleurs ces concepts devront être construits en se confrontant à des situations réelles familières pour donner du sens aux notions qui seront ensuite institutionnalisées à travers un vocabulaire précis qu'il conviendra de définir au fur et à mesure des activités proposées.

Le contexte culturel

Les expérimentations et les situations familières recommandées par le programme ne manqueront pas d'interagir avec le contexte culturel de l'élève qu'il est nécessaire de prendre en compte et d'exploiter. En particulier, dans la conduite des activités de classe, il conviendra d'avoir présentes à l'esprit plusieurs remarques :

— Dans la vie de tous les jours, les élèves sont régulièrement confrontés à des situations relevant du hasard (jeux, loterie, ...).

— Le vocabulaire concernant le hasard est très fréquent dans le langage de tous les jours.

— Dans certains jeux, les élèves tentent quelquefois de mettre en place des stratégies pour «conjurer le sort» et cherchent à maîtriser le hasard.

— Il existe des représentations ou des attitudes, plus ou moins conscientes, face au hasard. Celles-ci sont influencées notamment par le milieu socioculturel de l'élève (religion, culture d'origine, ...).

Le contexte pédagogique

Pour mettre en place les notions de probabilités, l'enseignant pourra prendre appui sur d'autres notions déjà introduites au collège, notamment sur la démarche statistique familière aux élèves. Mais l'enseignant devra aussi prendre en compte qu'au-delà de la nouveauté des concepts introduits, c'est aussi une démarche et une validation totalement inhabituelle qui va être proposées à l'élève du fait que :

— La démarche et les raisonnements utilisés en probabilité diffèrent de ceux des autres branches des mathématiques : géométrie, calculs, ...

— Le rapport au réel est beaucoup plus présent en probabilités que dans les autres branches des mathématiques (démarche de modélisation).

— La validation des affirmations qui devra être mise en œuvre n'est pas de même nature que celle mise en œuvre dans les autres branches des mathématiques.

III. — Les objectifs du collège

Compte tenu de ce contexte, nous pouvons dégager trois grands objectifs à l'enseignement des probabilités en collège, à savoir :

— Développer une réflexion générale sur l'aléatoire (à nombre restreint d'issues).

— S'interroger sur la mathématisation du hasard et sur sa finalité.

— Introduire et faire fonctionner quelques concepts probabilistes.

Suivant les activités proposées, et suivant leurs positions dans la progression pédagogique, ces trois objectifs seront plus ou moins explicitement visés : une activité introductive aux probabilités travaillera surtout le premier objectif en débordant sur le second, alors que les activités de réinvestissement mettront plutôt l'accent sur le troisième.

Développer une réflexion générale sur l'aléatoire

Un premier aspect de cette réflexion va consister à exploiter le contexte culturel de l'élève. Il s'agira donc dans un premier temps de rappeler et structurer le vocabulaire utilisé dans la vie courante, de le transposer en un vocabulaire mathématique. Cette phase visera notamment à susciter chez l'élève un questionnement du type :

— Quel vocabulaire (expression, type de phrase) j'utilise lorsque je parle d'une situation aléatoire ?
— Quelle est la signification de ce vocabulaire ? Quel est son registre linguistique ? Relève-t-il du domaine quantitatif ou qualitatif. Est-il spécifique au langage mathématique, au langage courant, ... ?

Un second aspect de cette réflexion, qui dans le temps sera travaillé en parallèle avec le premier, sera de faire émerger les représentations existantes, d'amener les élèves à les confronter, à les expliciter et, le cas échéant, à les faire évoluer. Cela se fera à travers un questionnement du type suivant qui portera sur les situations familières proposées aux les élèves :

— Quelles sont les situations que je connais où intervient le hasard ?
— Qu'est-ce qui distingue une situation où intervient le hasard d'une situation où il n'intervient pas ?
— Qu'est-ce qui me permet d'affirmer qu'une situation dépend du hasard ? Qu'est-ce que le hasard ?
— Comment est généré le hasard dans les situations que je connais ? Dans celle qu'on me propose ?
— Est-ce que je peux trouver des ressemblances, des analogies, entre des situations aléatoires *a priori* différentes ?

S'interroger sur la mathématisation du hasard et sa finalité

Cet objectif aura pour ambition de développer et de mettre en œuvre une démarche de modélisation et de validation à partir de l'analyse de situations réelles. Les activités visant cet objectif devront inciter à développer chez l'élève le questionnement suivant :

— Dans quelles conditions les nombres et le calcul interviennent dans l'étude d'une situation aléatoire ?
— Quelle est la finalité du calcul des probabilités ? Dans quelles circonstances l'utilise-t-on ?
— Quel sens donner à la phrase «J'ai deux chances sur trois d'observer A» ?
— Quelle démarche suis-je amené à mettre en œuvre pour avoir des informations sur la situation qu'on me propose ?
— Est-ce que je peux énoncer des règles simples sur les nombres qui interviennent dans une situation aléatoire ?
— Comment puis-je valider, ou vérifier, mes affirmations ?

Introduire et faire fonctionner quelques concepts probabilistes

Les activités visant à atteindre les deux objectifs précédents devront déboucher sur l'institutionnalisation des concepts et outils qui seront utilisés par la suite. Concrètement, il semble raisonnable au collège de se limiter à :

— Mettre en place les concepts d'*expérience aléatoire*, d'*événement*, de *probabilité* et de leur donner du sens.
— Introduire et faire fonctionner le vocabulaire standard des probabilités, le comparer à celui du langage courant.
— Établir et faire fonctionner des règles simples de calcul sur les probabilités.
— Élaborer des techniques de validation des affirmations.

IV. — Une activité pédagogique pour introduire les notions

Nous allons maintenant proposer des pistes de travail pour atteindre ces objectifs. Pour cela nous présenterons une activité pédagogique utilisée dans la Journée Collège de l'académie de Besançon pour sensibiliser les professeurs à la problématique d'un enseignement de probabilités.

Mais avant d'aller plus loin, quelques précautions d'usage. L'activité présentée s'adresse à des enseignants en formation et est conduite, par moments, comme elle pourrait l'être devant des élèves. Elle vise à illustrer le propos et à susciter les questions. Les consignes s'adressent aux professeurs présents à la journée « Collège ». Elles doivent être remaniées en cas de conduite de l'activité dans une classe, pour tenir compte de la progression pédagogique, des connaissances des élèves et des réactions des élèves. Telle qu'elle est proposée ci-dessous, cette activité se veut surtout un guide de travail pour l'élaboration d'activités similaires : lancer de pièce de monnaie, lancer de dé, roulette de jeu, ...

La situation et les réactions des enseignants

L'activité s'inspire de la situation dite de « la bouteille » initialement proposée par Guy Brousseau [8] avec un tout autre objectif au niveau de l'école élémentaire.

Le cadre de l'activité est le suivant : les professeurs sont répartis en groupes de trois ou quatre. Chaque groupe possède une bouteille opaque, contenant des billes, une ouverture laisse apparaître une seule bille à la fois quand on retourne la bouteille. Personne ne connaît *a priori* le nombre de billes, ni les couleurs des billes de la bouteille, et les contenus des bouteilles peuvent être différents quant au nombre et à la couleur des billes. Enfin, les couleurs des billes de l'ensemble des bouteilles ne sont pas connues.

L'intérêt *a priori* de cette activité réside justement dans le peu d'informations sur la situation elle-même qu'en ont les acteurs. En particulier, ce peu d'informations empêche les raisonnements faisant référence à une quelconque équiprobabilité. De plus, les issues n'étant pas *a priori* connues il est nécessaire de faire des choix - et de les expliciter - pour initier le processus de modélisation de la situation. Enfin, comme cette activité s'avère plutôt déstabilisatrice, elle favorise une réflexion sur la finalité attendue d'un calcul des probabilités, et sur ses conditions de mise en œuvre.

Au cours de l'activité, les enseignants devaient exécuter quatre consignes données ensemble dès le début de l'activité :

— Quels objectifs voyez-vous à un enseignement des probabilités au collège ?

8 Brousseau G., Brousseau N., Ginger W. : « Une expérience de premier enseignement des statistiques et de probabilités «, article publié en anglais dans *The Journal of mathematical behavior of children* (2001).

— Imaginez une activité permettant d'introduire les probabilités en classe de troisième.
— Précisez quels objectifs vous viseriez à travers cette activité.
— Notez le vocabulaire naturellement utilisé dans vos échanges et ayant trait, selon vous, au registre linguistique de l'aléatoire.

Comme attendu, la première consigne a montré la difficulté d'assigner des objectifs spécifiques à l'enseignement des probabilités en collège. Les objectifs énoncés reproduisaient ceux de l'enseignement en lycée, notamment en proposant dès le début de l'activité, et sans analyse préalable de la situation proposée, des calculs de fréquence pour un certain nombre d'essais.

L'ignorance du contenu des bouteilles a perturbé certains enseignants pour qui il ne pouvait y avoir d'activité probabiliste sans situation d'équiprobabilité : « Ce ne sont pas des probabilités car on ne connaît pas le contenu », « On ne peut rien faire car on ne sait pas s'il y a équiprobabilité », « Ce ne sont pas des probabilités, mais des statistiques ». En particulier, l'apparition au cours des essais d'une bille de couleur non prévue initialement, conduisait certains à reconsidérer le cadre de la modélisation et ainsi à s'interroger sur les conditions d'une modélisation en probabilités. Plus généralement, cette situation a suscité de nombreuses questions et des échanges sur la finalité d'un enseignement des probabilités.

Enfin, nous avons pu aussi remarquer que le vocabulaire relatif au registre de l'aléatoire, utilisé par les enseignants durant l'activité, était très riche, alors même que la part du vocabulaire noté, comme le demandait la consigne, était plutôt réduit. Ce qui laisse penser que le registre linguistique de l'aléatoire n'est pas toujours clairement identifié.

Les réactions des enseignants en formation face à cette activité ont donc été l'occasion de :
— rappeler l'utilisation concrète des probabilités dans différents domaines : médecine, économie, gestion, industrie, ...
— réaliser qu'il faut délimiter complètement le cadre de la situation aléatoire étudiée.
— comprendre le rôle joué naturellement par le langage courant dans les échanges.
— préciser les objectifs à assigner à l'enseignement des probabilités au collège.
— comparer ces objectifs à ceux du lycée pour mettre en évidence la spécificité du collège.

Les étapes d'un travail sur l'aléatoire

En particulier la discussion a permis de souligner l'importance méthodologique de quatre étapes qu'il est utile de baliser dans toute activité sur l'aléatoire :
— Préciser de quoi on parle (*l'expérience aléatoire*).
— Préciser sur quoi on travaille (*la famille des événements*).
— Préciser avec quoi on travaille (*le choix de la probabilité*).
— Mettre en œuvre les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé (*le calcul des probabilités*).

Bien sûr, suivant la place de l'activité proposée dans la progression pédagogique et suivant aussi l'objectif visé par l'enseignant, certaines de ces étapes seront plus ou moins développées ou exploitées.

Nous allons maintenant passer en revue, en les précisant, chacune de ces quatre étapes.

Étape 1 : *L'expérience aléatoire*

Cette étape doit permettre à l'élève :

— de se familiariser avec la situation réelle aléatoire étudiée,

— d'énoncer précisément les conditions de l'expérience aléatoire,

— d'identifier toutes les issues de l'expérience et de convenir d'une manière de les noter.

Cette étape doit se conclure par la rédaction d'un court texte (*le protocole*) décrivant les conditions de l'expérience aléatoire, la liste de toutes les issues possibles et les notations adoptées. Par exemple, dans le cas de l'expérience aléatoire de la bouteille de Brousseau, on pourrait retenir :

— *Le protocole* : On remue bien la bouteille opaque. On la retourne une seule fois et on s'intéresse à la couleur de la bille qui apparaît au goulot.

— *La liste des issues* retenues : Noir / Bleu / Vert / Autres couleurs.

— *Les notations utilisées* pour les issues : n, b, v, a.

Notons que cette étape sera surtout à développer dans les premières activités proposées aux élèves sur les probabilités. Ensuite, elle peut être traitée plus rapidement pour les situations ultérieures. Cependant c'est une étape indispensable dans la modélisation de la situation car elle permet aux élèves de bien s'approprier les conditions de l'intervention du hasard et c'est à son niveau que se fixe le cadre probabiliste avec les notations qui seront utilisés dans les calculs.

La réflexion sur l'expérience aléatoire peut être conduite autour d'un questionnement portant sur la situation (ici la bouteille, pour une première approche de l'aléatoire) et ses conditions de réalisation, par exemple :

— Que peut-on dire de cette situation ? À quoi reconnaît-on qu'une situation dépend du hasard ? Avez-vous des exemples de telles situations ?

— Que peut-on dire de la couleur des billes de la bouteille ? Observe-t-on plusieurs billes ?

— Est-ce nécessaire de bien remuer la bouteille à chaque fois ? Pour quelle raison ? Que se passe-t-il si on ne le fait pas correctement ?

— Si nous souhaitons établir la liste des couleurs observées après avoir retourné la bouteille plusieurs fois : est-on certain d'avoir observé toutes les couleurs des billes de la bouteille ? Quelle décision pour la liste des couleurs possibles ?

Au terme du travail sur les probabilités, les élèves devraient pouvoir retenir (au moins grosso modo) concernant cette étape que :

— *Une expérience aléatoire est une expérience qui, bien qu'on la répète dans les mêmes conditions, ne donne pas nécessairement le même résultat.*

— *Les résultats qu'on peut observer en réalisant une expérience aléatoire sont appelées les issues de l'expérience aléatoire.*

— *Une liste de toutes les issues qui seront prises en compte dans l'expérience aléatoire doit être établie.*

Étape 2 : *La famille des événements*

Cette étape a pour objectif d'approfondir la compréhension de l'expérience aléatoire et sa description, en s'intéressant aux événements attachés à cette expérience. La sélection de ces événements est motivée par le contexte de la situation étudiée.

Cette étape doit notamment permettre à l'élève :

— d'imaginer des événements en relation avec l'expérience aléatoire telle qu'elle a été décrite,
— de repérer et expliciter les événements qui font partie des données connues de l'exercice, d'identifier les issues qui réalisent ces événements en référence à la liste établie dans l'étape précédente,
— de repérer et d'expliciter les événements qui sont sous-jacents aux questions posées.
— de mettre en évidence des relations entre ces événements, notamment les événements élémentaires, incompatibles, contraires.
— de convenir d'une notation pour les événements qui seront utilisés.

Par exemple, pour travailler cette étape dans le cas de l'expérience de la bouteille, nous pourrions envisager des questions du type ci-dessous (Ces questions peuvent être adaptées à toute autre situation aléatoire) :

— Quelles sont les couleurs qu'on pourrait qualifier de «foncées» ? de «claires» ? Que signifie *Observer une bille foncée* ? Est-ce que je peux connaître le résultat avant de réaliser l'expérience ?
— Que signifie *Observer une bille claire (après avoir réalisé l'expérience)* ?

A ce stade on peut introduire une notation (par exemple respectivement F et C pour la première phrase et la seconde) pour ces phrases dont on dira qu'elles représentent des <u>événements</u>. On peut alors poursuivre en explicitant des relations entre les événements, qui seront également institutionnalisées :

— Est-ce que je peux observer à la fois les événements F et C en réalisant l'expérience ?
— Si je note B l'événement défini par *Observer une bille Bleue (après avoir réalisé l'expérience)*, est-ce que je peux observer les événements F et B en réalisant l'expérience ?
— Quelles issues dois-je observer pour affirmer que ces deux événements sont tous les deux réalisés après avoir effectué l'expérience ?
— Est-ce que *Ne pas observer une bille claire* représente un événement ? Si oui, est-ce un événement déjà rencontré ? (On le note $\overline{C}$)
— Est-ce que la phrase *Observer une bille rouge* représente un événement ? Quelles sont les issues qui le réalisent ? Mêmes questions avec la phrase *Avoir beau temps toute la semaine prochaine*.
— Est-ce que la phrase *Observer une bille de n'importe quelle couleur* représente un événement ? Quelles sont les issues qui le réalisent ?
— Est-ce que je peux définir d'autres événements ? Donner des exemples ?

Au terme du travail sur les probabilités, les élèves devraient pouvoir retenir concernant cette étape que :

— *Un <u>événement</u> est représenté par un énoncé (une phrase) concernant les issues de l'expérience aléatoire dont on peut dire, seulement après avoir réalisé l'expérience, s'il est vrai ou s'il est faux.*
— *Un événement se décrit mathématiquement par la liste des issues qui rendent l'énoncé vrai. Ces issues sont dites <u>favorables</u> à l'événement.*

— *Un événement dont l'énoncé n'est vrai que pour une seule issue de l'expérience est appelé un événement élémentaire.*
— *Un événement qui est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire est dit certain.*
— *Un événement qui n'est jamais réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire est dit impossible.*
— *Deux événements pour lesquels on ne peut pas trouver une même issue de l'expérience aléatoire qui les réalise sont dits incompatibles.*

Les étapes 3 et 4 qui suivent sont quelquefois menées en parallèle au cours de l'activité car elles peuvent être en interaction. Mais il convient, pour la bonne compréhension du processus de modélisation, de bien les distinguer.

Étape 3 : *Le choix de la probabilité*

A partir des données explicites de l'exercice, ou de considérations sur les conditions de l'expérience aléatoire, cette étape doit permettre à l'élève, en explicitant les raisons de son choix, d'affecter une probabilité aux événements énoncés précédemment (en général il s'agit des événements élémentaires).

Suivant les conditions de la situation étudiée, plusieurs démarches peuvent être mises en œuvre pour affecter une probabilité à chaque événement élémentaire (Voir ci-dessous). Dans le cas de l'expérience de la bouteille nous sommes *a priori* complètement démunis, aussi la seule démarche exploitable est d'effectuer une étude statistique sur la réalisation des événements élémentaires.

Étape 4 : *Le calcul des probabilités* : Cette étape permet à l'élève de calculer les probabilités d'autres événements, à partir des probabilités introduites auparavant et des règles élémentaires de calcul sur les probabilités.

Dans le cas de notre activité, où nous souhaitons introduire la notion de probabilité et les règles de calcul élémentaire sur les probabilités nous nous intéresserons simultanément aux deux étapes. Comme nous ne disposons pas du vocabulaire des probabilités, nous devons, dans un premier temps, proposer des consignes à l'aide d'expressions empruntées soit au domaine de la statistique, soit au langage courant comme « … plus de chances que… » :
— Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement F que l'événement C lorsque j'effectue l'expérience ? Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement N que l'événement F ?
— Comment «mesurer le nombre de chances» de réaliser un événement ?
— On effectue 40 fois l'expérience, quelles sont les fréquences des événements élémentaires ?

A ce stade de l'activité, on demande de reporter les résultats dans le tableau ci-contre commun à toute la classe, et de le compléter. Par exemple dans une classe de six groupes, nous avons obtenu le tableau de la page suivante.

L'analyse de ce tableau permet de mettre en évidence les règles élémentaires du calcul des probabilités qu'on institutionnalisera au niveau du collège. Pour conduire l'analyse du tableau, on propose le questionnement suivant :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Bouteille	**Fréquence de** ***A*** *(autres)*	**Fréquence de** ***B*** *(bleu)*	**Fréquence de** ***N*** *(noir)*	**Fréquence de** ***V*** *(vert)*	**Somme des col. 1 à 4**	**Fréquence de** ***F***	**Somme des col. 2 à 4**	**Fréquence de** $\overline{C}$
1	10/40	0/40	18/40	12/40	1	30/40	30/40	30/40
2	17/40	5/40	0/40	18/40	1	23/40	23/40	23/40
3	7/40	9/40	5/40	19/40	1	33/40	33/40	33/40
4	3/40	19/40	6/40	12/40	1	37/40	37/40	37/40
5	0/40	7/40	31/40	2/40	1	40/40	40/40	40/40
6	9/40	10/40	13/40	8/40	1	31/40	31/40	31/40

— A-t-on les mêmes résultats d'une bouteille à l'autre ? Que remarque-t-on sur les fréquences des événements élémentaires ? Comment expliquer les différences dans les résultats obtenus ?

— Quelle fréquence trouve-t-on pour l'événement F ? Peut-on l'exprimer avec les fréquences des événements élémentaires N, B, V ? Que constate-t-on ? Est-ce que tout le monde fait le même constat ?

— On recommence les 40 essais qui ont servi à calculer les fréquences. Est-ce qu'on obtient les mêmes valeurs pour les fréquences que dans le cas précédent ? Comment expliquer les divergences constatées ?

— Alors que les bouteilles et les fréquences obtenues sont parfois différentes d'un groupe à l'autre, comment expliquer que certains calculs (somme des fréquences élémentaires, fréquence de F par rapport à celles de B, N, V) conduisent à une remarque identique pour tout le monde ?

On met ainsi en évidence que certaines valeurs du tableau (celles des colonnes 1 à 4) dépendent du hasard mais que d'autres valeurs (celles des colonnes 5 à 8) sont complètement déterminées par celles des colonnes 1 à 4. On retrouve les mêmes constatations si on remplit un tableau analogue avec les valeurs trouvées après 40 nouveaux essais. On explicite ainsi des relations élémentaires entre les fréquences. Ces relations seront transposées plus tard en des règles de calcul sur les probabilités.

A ce stade de l'activité, on peut donc introduire l'expression « probabilité d'un événement E », sa notation P(E), et poursuivre pour fixer les règles de calcul :

— Quelle valeur prendre pour la probabilité d'un événement élémentaire ?

— Quelle valeur doit-on prendre pour la probabilité de l'événement certain ? Pour la probabilité de l'événement impossible ?

— Comment écrire avec les notations des probabilités les relations mises en évidence sur les fréquences ?

Au terme du travail sur les probabilités, les élèves devraient pouvoir retenir que :

La <u>probabilité d'un événement E</u> est un nombre associé à l'événement E et compris *entre 0 et 1. Ce nombre est choisi à partir de considérations sur l'expérience aléatoire et sur l'événement E, de telle sorte que les deux règles suivantes soient vérifiées :*

— *La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.*

— *La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.*

Quelques remarques sur le choix du modèle

Quelles sont les démarches mobilisables pour choisir la probabilité à affecter aux événements élémentaires ? On dispose en gros de deux principes (principe statistique, principe logique) qui ont tous les deux leurs propres limites, même si le principe statistique a un domaine d'application plus étendu que celui du principe logique. Voici ces deux principes :

— *Un principe statistique* : On affecte comme valeur à la probabilité d'un événement A la fréquence de réalisation de l'événement A dans un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.

— *Un principe a priori* (appelé *principe de Laplace* ou *de la raison insuffisante*) : Si, dans une expérience aléatoire à nombre fini n d'issues, je n'ai pas de raison de penser qu'une issue est privilégiée par rapport à une autre, j'affecte la même valeur p à la probabilité de chaque événement élémentaire. Dans ce cas, nécessairement $p = 1/n$.

Notons qu'on pourrait envisager d'autres démarches en fonction de la situation étudiée (par exemple les données de l'exercice, ...). En fait, la démarche sera validée par l'adéquation du modèle auquel elle conduit avec la réalité observée. Comme on le voit, la question sous-jacente au choix de la probabilité de base du modèle, se ramène à celle de la validation du choix effectué, et, en fin de compte, peu importe comment on aboutit à ce choix.

C'est surtout à partir du lycée que cette question de la validation sera développée de façon plus technique, au collège on se contentera d'une approche statistique intuitive basée sur des manipulations réelles de la situation.

Pour simplifier, on peut dire qu'un modèle est validé par l'adéquation entre les prévisions qu'il implique et les observations correspondantes effectuées sur le phénomène réel. En fonction des niveaux d'enseignement, les techniques à la disposition des élèves pour définir et vérifier cette adéquation sont :

— *Au Collège* : L'observation expérimentale de la répétition de l'expérience aléatoire et son étude statistique.

— *En Seconde / Première* : La simulation du modèle par ordinateur.

— *En Terminale* : Les tests d'adéquation à un modèle d'équiprobabilité (test d'équirépartition).

— *En post-bac* : Les outils de la statistique inférentielle (notamment les tests d'adéquation).

Terminons ce paragraphe par quelques remarques sur la modélisation probabiliste :

— Le protocole de l'expérience aléatoire et la famille des événements ne font pas intervenir le hasard.

— La famille des événements est plus ou moins riche suivant l'expérience aléatoire (pile–ou-face ; lancer de deux dés).

— Les trois premières étapes de l'activité correspondent à la mise en place du modèle.

— Le hasard en tant que tel n'est pas explicitement défini en probabilité. En fait le hasard s'exprime à travers le modèle choisi pour décrire la situation réelle, et plus particulièrement, la probabilité du modèle.

— Plusieurs modèles peuvent être envisagés pour décrire une même situation réelle.

V. — Conclusion

L'enseignement des probabilités au collège est nouveau pour les élèves. Ce qui est encore plus nouveau, c'est l'introduction de l'aléatoire qu'il suppose. L'enseignement des probabilités doit donc en priorité développer une réflexion sur l'aléatoire avant d'être en mesure d'aborder sa modélisation et d'effectuer des calculs sur les probabilités.

Cet enseignement au collège doit donc être pensé différemment de celui qui sera pratiqué au lycée. Il y a une spécificité du collège par rapport au lycée à faire valoir :

— *Au collège* : l'accent est mis sur la compréhension de l'expérimentation aléatoire avec des rudiments de mathématisation de la situation réelle.

— *Au lycée* : on étudie des expériences aléatoires plus complexes et on approfondit le travail sur le modèle, notamment en faisant intervenir la simulation par ordinateur.

L'enseignement en collège, parce qu'il est, avant tout, un premier contact des élèves avec l'aléatoire, doit prendre en compte leurs représentations préexistantes sur l'aléatoire et, éventuellement, les faire évoluer. En particulier un vocabulaire usuel en relation avec le hasard est déjà en place. Il est nécessaire de l'exploiter pour le transformer en un langage mathématique, donner du sens aux concepts introduits et établir les règles élémentaires du calcul des probabilités.

De même, cet enseignement est une des premières fois où l'élève est confronté à une démarche de modélisation dont les processus de validation lui sont inhabituels. Cette modélisation est conduite à partir d'une analyse de la situation réelle, présentée en quatre étapes qui doivent structurer tout travail sur l'aléatoire :

— Expliciter précisément l'expérience aléatoire qui servira de référence.

— Repérer, expliciter et nommer les événements remarquables par rapport au travail demandé.

— Expliciter la probabilité du modèle et en justifier le choix.

— Effectuer les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé.

Cette réflexion sur l'aléatoire au collège est la condition nécessaire pour que l'élève donne du sens aux notions probabilistes qui seront mises en place de façon concomitante. Ainsi, elle fournira à l'élève une base solide sur laquelle pourront se développer les notions probabilistes et les techniques de validation plus sophistiquées introduites plus tard au lycée.

Bibliographie

Ducel Y., Saussereau B. : *Synthèse de l'intervention «Statistique et probabilités» à la journée «Collège» de l'académie de Besançon*, http://www-irem.univ-fcomte.fr/ , octobre 2008.

Groupe « Statistique et Probabilités » (Barthélémy M.-J., Ducel Y., Grangé J.-P., Vendrely M.) : *Lois continues, test d'adéquation. Une approche pour non spécialiste*, Coll. «Les publications de l'IREM», Presses universitaires de Franche-Comté, deuxième édition, 2007.