
L'APPRENTISSAGE DU 3D A L'ECOLE

*Des situations d'apprentissage
à la formation des enseignants*

Jacques DOUAIRE,
Equipe ERMEL INRP, DIDIREM
Fabien EMPRIN, Claude RAJAIN,
Equipe ERMEL, INRP,

L'apprentissage de la géométrie à l'école élémentaire pose plusieurs questions : Quelle est la nature même du savoir mathématique enseigné à ce niveau où coexistent des preuves basées sur la perception, sur la mesure mais aussi sur des raisonnements ? Comment les élèves peuvent-ils mobiliser des compétences spatiales qui se sont développées au long de la maternelle ? Quelles progressions privilégier, en particulier quelle articulation entre un travail sur les objets de l'espace et celui sur des figures du plan, mais aussi entre l'acquisition des propriétés des objets et celles des relations (parallélisme...) ? Quels problèmes proposer, pour que cet enseignement permette une réelle disponibilité des savoirs et ne soit pas, comme c'est trop fréquemment le

cas à l'école élémentaire, réduit à celui d'un vocabulaire et de tracés ?

Dans le cadre de deux recherches successives concernant le cycle 3 de l'école primaire¹, l'équipe ERMEL (INRP), a cherché à répondre à ces questions en explicitant notamment les significations des concepts (objets ou relations) et en développant des dispositifs d'enseignement fondés sur la résolution de problèmes. L'analyse du savoir mathématique, celle des compétences des élèves, l'élaboration de

¹ Recherches « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 » (1998/2001), puis « Rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3 » (2001/2004). L'équipe est formée par des Professeurs d'IUFM et des Maîtres-Formateurs d'une dizaine d'académies.

situations d'apprentissages et leur expérimentation plusieurs années de suite dans une soixantaine de classes, ont abouti notamment à un ouvrage destiné aux enseignants et aux formateurs².

Toutefois, l'utilisation par les enseignants de ces résultats, et dispositifs d'enseignement suppose qu'ils puissent faire des choix favorisant une réelle activité mathématique des élèves garantie notamment par la prise en compte des connaissances initiales des élèves et par la mise en œuvre de problèmes. La question se pose donc de l'appropriation par les enseignants des produits de la recherche et par là même de cette recherche comme outil de formation pour les enseignants.

Nous proposons dans cet article une réflexion sur la formation des enseignants qui s'appuie sur des travaux menés dans les classes et en formation sur le thème des solides. C'est pourquoi cet article débute par deux chapitres précisant, pour le premier, quelques éléments des problématiques de la recherche sur laquelle nous nous appuyons et pour le second les questions spécifiques liées à l'apprentissage des solides. Dans la troisième partie nous utilisons ces éclairages pour nourrir notre réflexion sur la formation.

I. — Articulations des apprentissages géométriques avec les connaissances spatiales des élèves

I – 1 Les connaissances spatiales

Les connaissances spatiales concernent l'espace sensible ; elles permettent à l'enfant

² Ces résultats sont publiés dans: « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 » (2006, Hatier ed. 609 p.), ouvrage destiné aux enseignants et aux formateurs.

de maîtriser ses rapports usuels avec cet espace, rapports qui sont contrôlés par la perception. Liées à l'expérience, elles s'acquièrent à l'école depuis la maternelle (repérage, positions relatives d'objets, parcours...), mais aussi pour certaines d'entre elles en dehors de tout enseignement. Les connaissances géométriques portent sur des objets idéaux, mais qui ont des représentations dans l'environnement familier des élèves. La géométrie entretient donc des liens complexes avec l'espace physique qui nous entoure : modélisation de l'espace sensible et théorie mathématique composée d'un ensemble d'énoncés. Ce double aspect est présent dans la géométrie enseignée au cycle 3 : les élèves peuvent élaborer ou utiliser des modélisations de situations spatiales à l'aide de dessins ou de tracés, cette modélisation pouvant ou non s'appuyer sur des relations géométriques

En outre, quand des objets théoriques sont représentés par l'élève sur sa feuille de papier, ou quand il schématise des objets du monde sensible, l'élève de l'école élémentaire travaille dans un domaine bien particulier. Il s'agit d'un espace que l'élève contrôle, en partie du moins, par la perception et qui est constitué à la fois d'un ensemble d'objets spatiaux, d'un ensemble de représentations d'objets de l'espace sensible et d'un ensemble de représentations des objets théoriques. Dans certains cas, ce domaine, que nous appelons le domaine spatio-graphique pourra être alternativement le « papier-crayon » et l'écran de l'ordinateur (ce dernier pouvant avoir des caractéristiques spécifiques).

Nous proposons un travail effectif dans l'espace sensible qui permet d'y développer des significations importantes des concepts géométriques (par exemple, le contrôle d'un alignement par la visée). Certains problèmes

peuvent être résolus par une modélisation sur la feuille de papier, que cette modélisation soit à la charge de l'élève ou fournie par le maître. Les connaissances géométriques sont alors enrichies en devenant des outils nécessaires à la résolution de problèmes spatiaux. Des activités sont proposées dans l'espace usuel (de la cour ou de la classe) de façon à confronter les élèves avec les connaissances particulières se rapportant à la maîtrise de ces espaces. Toutefois si le recours au méso-espace³ ne constitue pas pour nous la seule approche préalable à l'étude des notions géométriques, les problèmes posés dans les différents types d'espace permettent d'appréhender les différentes significations des notions géométriques.

I - 2 Objets et relations

Les constituants des savoirs géométriques sont notamment les objets et les relations :

Les « objets » : un point, un segment, une droite, un rectangle, un pavé... termes qui peuvent désigner aussi bien des objets théoriques que des objets matériels existant dans l'espace sensible, ou qui peuvent être spécifiques de la théorie (segment) ou de l'espace (trait, bord).

Une simple étude d'un objet spatial ne sera pas très riche si les relations entre les éléments le composant ou entre cet objet et d'autres n'interviennent pas dans la résolution de problèmes. Par exemple, au cycle 3, un cube peut être étudié du point de vue :

- de ses faces, de ses arêtes, de ses sommets, des relations que ces objets entretiennent entre eux dans le cube ;

3 L'espace sensible est décomposé par R. Berthelot et M.-H. Salin en micro-espace (espace des interactions liées à la manipulation des petits objets. Le sujet est extérieur à l'espace), le méso-espace (espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue.) et le macro-espace.

- de ses relations avec d'autres objets, qui ne sont pas des cubes (d'autres polyèdres par rapport à leur nombre de faces), ne sont pas des polyèdres, ou sont d'autres cubes que le cube étudié (comparaison des faces, des arêtes...).

Aussi, nous avons fait le choix d'organiser les apprentissages en entrant dès le CE2 par les relations, parce que nous estimons que c'est un moyen d'inciter les élèves à passer :

- d'une reconnaissance globale de l'objet à une analyse des relations entre ses éléments lors de la résolution de problèmes, ce que la simple description des objets perçus n'induit généralement pas ;
- du spatio-graphique au « théorique » parce que l'évidence spatiale est moins présente et que les raisonnements fondés sur des propriétés sont nécessaires.

Le terme "relation" est pris dans son sens habituel en mathématiques et désigne des liens de la théorie pouvant exister entre les objets. Pour chaque relation, nous distinguons plusieurs significations qui peuvent faire appel à des propriétés du domaine théorique. Prenons l'exemple du parallélisme. Deux droites distinctes sont parallèles dans le plan :

- si elles n'ont pas de point commun (incidence) ;
- si leur écart est constant (distance) ;
- si elles ont la même direction ou si elles ont la même orientation par rapport à une droite donnée (angle) ;
- si elles ont une perpendiculaire commune (perpendicularité) ;
- si l'une est l'image de l'autre par une translation ;
- si elles sont supports de côtés opposés d'un quadrilatère familier...

Nous ne pensons pas qu'il suffise de résoudre des problèmes relevant de chacune des significations d'une relation (et encore moins d'une seule !) pour garantir le niveau de maîtrise d'une relation attendu au cycle 3. C'est pourquoi il nous a fallu compléter l'étude de ces significations, en proposant, essentiellement au CM2, des problèmes de synthèse qui sollicitent plusieurs de ces relations ou qui sont relatifs aux propriétés des objets ; mais cet apprentissage suppose aussi de découvrir et de stabiliser, au cours de l'étude d'une relation, un vocabulaire spécifique, des propriétés, des techniques instrumentales, qui sont rencontrés ou institutionnalisés selon les situations.

Si l'ensemble des situations d'apprentissage que nous proposons est organisé autour des relations pour les deux premières années du cycle, cela ne veut pas bien sûr dire que les objets du plan sont oubliés. Les propriétés des objets sont analysées au CE2 et au CM1 dans le cadre du travail sur les relations et ils sont étudiés, pour eux-mêmes, plus systématiquement au CM2. En effet, nous pensons que les différents savoirs concernant les objets et les relations ne peuvent être appris indépendamment les uns des autres.

I - 3 *La question de la validation*

Au cycle 3, plusieurs types de preuve peuvent coexister en fonction de la situation : la validation pratique (par exemple, plier ou déplacer deux figures pour vérifier qu'elles sont superposables), le recours à des mesures, le recours à des raisonnements pour établir des preuves. La simple perception, ou le recours à une validation pratique ne remettent pas toujours en cause des procédures erronées pouvant aboutir à des productions apparemment satisfaisantes ; en effet, les élèves en restent

parfois à l'évidence de la perception visuelle ou interprètent des erreurs comme n'étant que des imprécisions de mesure ou de tracé. De plus, une production erronée peut être seulement le résultat de difficultés techniques de tracés malgré un recours explicite à des connaissances appropriées.

L'objectif ne nous semble pas tant d'éliminer le recours à la validation pratique que de permettre aux élèves d'appréhender des processus de preuve s'appuyant sur des raisonnements et de percevoir les différences entre ces preuves. Ceci peut nécessiter l'organisation de débats argumentatifs entre les élèves pour discuter de la validité des réponses obtenues.

Il nous paraît donc utile de différer la validation pratique et de commencer la phase de validation par un débat sur les productions. La fonction des « mise en commun » est de permettre aux élèves de formuler leurs résultats, et donc d'en prendre conscience, de préciser, à la demande, les termes employés, mais aussi de critiquer leurs solutions et celles des autres élèves, c'est-à-dire de juger par eux-mêmes de leur validité. Or ces mises en commun constituent souvent des phases délicates à gérer par les enseignants.

Notre recherche nous a donc conduits à expliciter des questions posées par cette coexistence de procédures de validation et à élucider des choix concernant la validation proposée dans les situations didactiques.

II. — Situations pour l'apprentissage des solides au cycle 3

La liste des situations proposées par l'équipe ERMEL est donnée en annexe 1, complétée par une description plus détaillée en annexe 2.

II – 1 *Analyse des composantes des objets du 3D*

Rappelons d'abord quelques termes qui permettent d'identifier les objets sur lesquels les élèves travaillent et les obstacles qui y sont associés.

D'une part, il y a les « objets spatiaux », en conservant le sens physique du terme, pour décrire tous les objets matériels en trois dimensions contenu dans l'espace sensible (ou réel ou physique). On peut en donner la définition suivante : au cours de tous les déplacements, la distance entre deux points quelconques d'un solide est constante ; en fait, il s'agit d'objets matériels rigides. Parmi ces solides, nous distinguerons les solides sociaux et les maquettes.

- Nous parlerons donc de « solides sociaux » pour les objets qui existent dans le monde social environnant : les boîtes, les emballages, les meubles, les constructions, etc....
- Parmi les « objets spatiaux », il y a ce que l'on peut désigner par le terme de « maquettes » (appelés également « solides géométriques »). Ce sont des objets très particuliers qui ne se rencontrent guère qu'à l'école (chez les architectes également, mais avec quelques nuances).

En fait, ces objets peuvent être considérés :

- soit comme des représentations d'objets mathématiques ou géométriques (le cube, le cylindre, le prisme, etc..).
- soit comme un solide social épuré des propriétés qualitatives. Pour élaborer ces objets, on a cherché à éliminer un certain nombre de propriétés, en particulier son usage, son contenu, etc. On demandera aux élèves de faire également abstraction de la matière et de la couleur.

Dans l'utilisation des maquettes, c'est le contexte qui fera la distinction :

- L'apprenti mathématicien (l'élève de 4ème) devra regarder la maquette, le moment venu, comme une représentation d'un objet théorique et s'en servira comme une aide à la démonstration.
- Par contre, l'élève de l'école primaire et de 6ème la regardera comme l'objet représentant tous les objets sociaux de même forme, donc comme une aide à l'abstraction et sa construction sera l'enjeu de nombreuses situations.

D'autre part, il y a les « objets géométriques » qui sont des objets théoriques. Ils sont définis comme une portion de l'espace géométrique ; parmi eux, nous trouverons les polyèdres, délimités par des faces polygonales tels le cube, les prismes, les parallélépipèdes, etc.

Ceci étant, N. Rouche⁴ fait une distinction entre « objets mentaux » (ou pré-concepts) et « objets idéaux ». En effet, quand notre perception fait défaut (de nombreuses situations à l'école primaire mettent en œuvre cette contrainte), il est nécessaire de *concevoir, inférer, théoriser*. C'est, en fait, être capable de *faire fi de certaines propriétés des objets sociaux*, particulièrement les propriétés qualitatives (matière, couleurs, dispositions spatiales), pour en conserver d'autres : *les formes, les régularités (symétries) et les singularités* et, surtout, en tirer des conséquences...

En fait, petit à petit, se construit tout un réseau de propriétés de ces objets, de relations entre ces objets, et de relations entre les propriétés elles-mêmes, qui prennent de plus en

⁴ « Préconcepts » : ie N. Rouche, CREM, « formes et mouvements », page 34.

plus de distance avec la réalité, mais qui conservent, *pour le moment*⁵, un certain « ancrage » dans cette réalité.

Le schéma de la page ci-contre présente les relations entre les différents objets rencontrés. A l'école les solides étudiés sont principalement des polyèdres mais les élèves rencontrent également des cylindres, des sphères se qui nous amène à parler ici de solides.

• Les relations 1 et 2

Nous pensons que les élèves doivent s'abstraire de certaines des propriétés qualitatives des solides sociaux afin d'obtenir des maquettes (relation 7). Les maquettes contribueront aussi à accéder aux objets géométriques qui sont définis théoriquement par un ensemble de propriétés qui permet d'en donner une définition en compréhension..

Par exemple, il doit être capable de désigner par le terme « cube » tous les solides qui ont six faces carrées. Ici, interviennent des propriétés « numériques », telles que le nombre de faces, de sommets, d'arêtes (d'ailleurs régies par la relation d'Euler $S + F - A = 2$ avec S nombre de sommets, F de faces et A nombre d'arêtes).

Ils doivent être capables de caractériser les solides aux moyens de ces propriétés numériques et de la nature géométrique des faces.

• Les relations 3 et 4

Il s'agit de définir les polygones comme faces des polyèdres. Cette approche a plusieurs avantages :

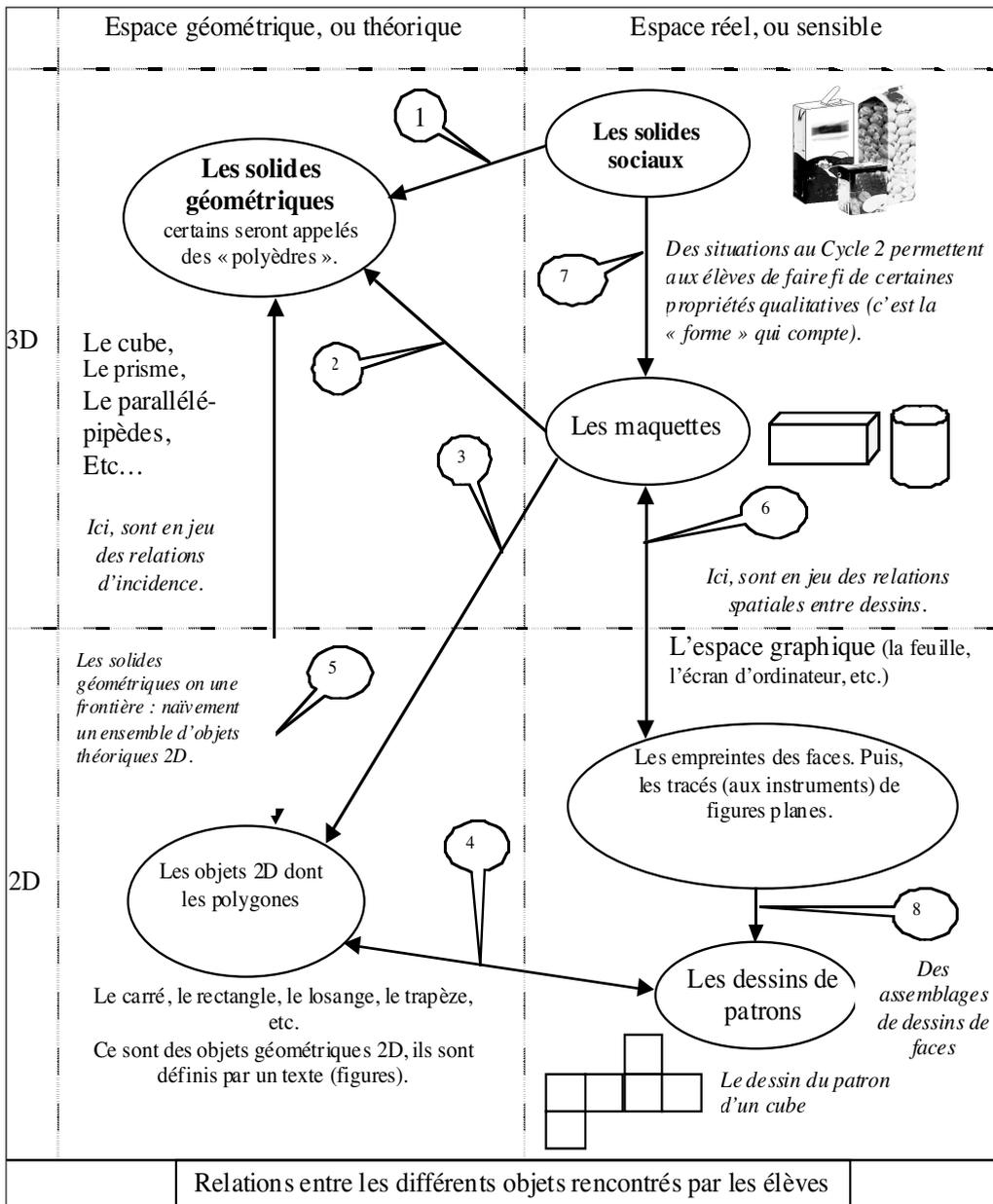
⁵ A terme, c'est la géométrie « géométrie euclidienne ». Mais, ce qui ne sera plus le cas pour « les géométries non-euclidiennes », dans lesquelles, par un point extérieur à une droite peut passer soit aucune parallèle, soit une infinité.... Certaines de ces géométries sont utilisées en « relativité générale ».

— on diminue l'émergence des phénomènes liés à la présentation exclusive dans la feuille de papier, telle que la reconnaissance de figures par leur aspect dans une certaine position (représentation « prototypique»). Il est clair que, outre ce procédé, bien d'autres contextes seront nécessaires pour accéder à des connaissances théoriques stables sur les polygones et leurs propriétés géométriques (le dessin « à main levée », mais également le contexte informatique à partir de logiciels comme CABRI ou DECLIC).

— dans cette approche, la figure plane n'est pas vue comme un ensemble de traits. En effet, la face du polyèdre a une frontière sans épaisseur, on se rapproche de la notion de ligne d'épaisseur nulle (une dimension). Il peut y avoir deux types d'empreintes, permettant de faire le lien avec les polygones : celle qui est obtenue en imprimant de la pâte ou du sable et celle obtenue par le tracé du contour.

• Les relations 5 et 6

Les relations d'incidence sont, d'une part, les relations métriques entre les différentes faces du solide et, d'autre part, les degrés des sommets (nombre d'arêtes jointes par un sommet). Pour accoler deux faces, les côtés concernés doivent être de même longueur. Il est à remarquer qu'avant de devenir des relations géométriques, elles sont d'abord des relations spatiales dans des dessins (relation 8) : d'abord des empreintes, puis des dessins de faces obtenus avec des gabarits, puis aux instruments, puis des dessins associés pour devenir des assemblages, puis le dessin devient d'un seul tenant pour devenir le dessin d'un patron. C'est par l'intermédiaire de plusieurs situations d'anticipation que l'élève est amené à réfléchir, à inférer des propriétés, à les concevoir



sans la présence explicite des dessins que ces relations spatiales deviendront des relations théoriques, appelées « relations d'incidence ».

L'élève doit être capable d'identifier les faces accolées dans un solide et de déterminer que pour cela les côtés concernés sont nécessairement de même longueur. Pour réaliser un patron, l'élève peut plier et déplier mentalement le solide (effectuer des rotations axiales dans l'espace « en acte », c'est-à-dire sans l'interpréter comme tel mathématiquement) ou encore mettre en œuvre les relations d'incidence de façon théorique.

Le travail sur les solides s'appuie donc principalement sur le travail autour de l'approche des solides par leurs propriétés mathématiques et sur les relations d'incidence. L'approche des polyèdres par les polygones intervient dans le travail sur les patrons sans être un axe spécifique de notre travail.

Parallèlement à cette analyse sur les relations entre objets se pose également le problème de la représentation des objets. C'est grâce aux procédures employées par les élèves que nous allons déceler si les représentations qu'ils ont des objets sont de l'ordre du spatial (carré comme ensemble de « traits ») ou de l'ordre du géométrique (carré comme ensemble des propriétés qui le définissent). Par exemple, si un élève utilise les propriétés d'une figure pour résoudre un problème lorsque la situation n'incite pas à y faire appel, on peut penser que l'élève voit cet objet par ses propriétés géométriques.

II – 2 *Un point sur les représentations des objets 3D : enjeux et difficultés*

La question fondamentale est : comment représenter les solides, c'est-à-dire le passa-

ge du 3D au 2D, puis à l'espace graphique (qui peut être la feuille de papier, mais également l'écran d'ordinateur) moyennant une similitude (problème de l'échelle de réduction ou d'augmentation qui est nécessaire afin de « faire entrer le grand dans le petit »).

Divers types de représentations sont à notre disposition et ont été inventées pour résoudre des problèmes de modélisation différents (contextes et statuts différents) : la perspective cavalière, et ses dérivées, la perspective centrale, le système « 3 vues », la représentation topologique (similaire au plan du métro), etc.

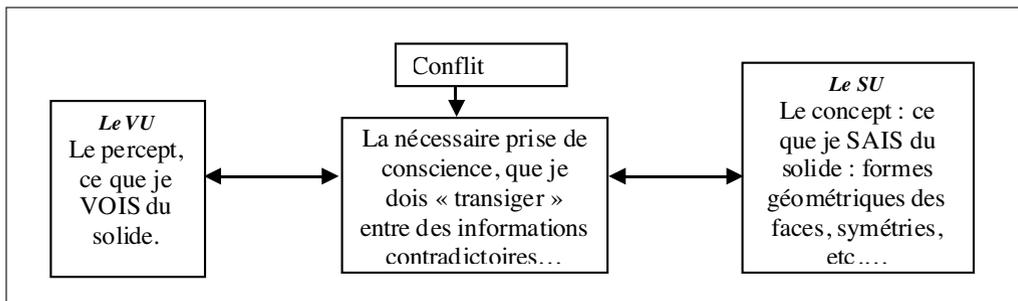
Il est important de prendre conscience que, dans le passage judicieux de l'objet à sa représentation, il est nécessaire de faire des choix entre les informations à conserver et celles à occulter : c'est le conflit entre le VU et le SU⁶.

Ce conflit est observé dans les dessins d'élèves, par exemple dans la représentation d'une pyramide à base rectangulaire, chez un élève de collège et même de lycée :

II - 3 *Nos idées forces au sujet du contenu :*

— Les relations « numériques » ainsi que les caractéristiques des faces servent de passage entre les « objets spatiaux » et les « objets idéaux » (même si ceux-ci restent un horizon à l'école primaire). En effet, elles permettent de caractériser les solides par des propriétés indépendantes des aspects matériels (tels que la couleur ou l'apparence, etc.)

6 Pour plus de commentaires sur ce point délicat des représentations, voir : F. Colmez et B. Parzysz, (1993), « Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 à la seconde. », in « Espace graphique et graphisme d'espace », Eds la Pensée Sauvage, p. 35-55.



- Les maquettes et leur construction dans des situations fortement « anticipatrices » permettent la construction « d'images mentales ».
- Le vocabulaire est un outil de communication et il participe au processus de conceptualisation. Il se construit petit à petit en proposant des problèmes de communication dans lesquels il est nécessaire de mettre à distance le langage social.
- La représentation n'est pas une priorité, mais il est possible de la mettre à l'œuvre dans des situations de communication afin de commencer à gérer les difficultés signalées ci-dessus.
- Le travail sur les patrons permet de proposer des problèmes intéressants (par exemple : puisque le patron utilise le minimum de faces, il correspond à un minimum de papier utilisé).

II - 4 Nos idées-forces au sujet des situations :

- C'est en résolvant des problèmes spatiaux bien choisis que les élèves construisent des propriétés géométriques. Réciproquement la construction des propriétés géométriques permet de résoudre des problèmes spatiaux.
- C'est dans ces problèmes que les élèves sont amenés à approcher les concepts

d'objets mathématiques en épurant les objets physiques de leurs propriétés qualitatives.

- Le travail sur les relations d'incidences et la notion de patron constitue l'ossature des situations.
- Une approche de la représentation plane des objets 3D par la prise en charge du conflit entre le « VU » et le « SU ».

Pour ceci, trois types de situations :

- Des situations d'action (pour résoudre des problèmes spatiaux).
- Des situations de communication ou de description.
- Des problèmes ouverts...

III. — Analyse d'une utilisation de notre recherche en formation initiale

L'enjeu de cette partie est de mener une première réflexion basée sur notre expérience de formateurs dans l'utilisation des travaux de l'équipe ERMEL concernant les objets 3D. Nous commençons par présenter des éléments du dispositif de formation proposé aux enseignants stagiaires du premier degré (PE2) en développant particulièrement un exemple de situation puis nous menons une rapide ana-

lyse quantitative puis qualitative des travaux qu'ils soumettent pour montrer l'acquisition de compétences professionnelles.

III – 1 *Deux exemples de situation de formation*

Notre présentation se base sur une formation PE2 qui s'est déroulée en 2006-2007 à l'IUFM de Champagne Ardenne, site de Châlons en Champagne. Elle concerne environ 50 stagiaires. Le premier module de formation en didactique des mathématiques a pour objectif de travailler sur « la situation d'apprentissage ». Le ou les thèmes sur lesquels porte ce module ont été laissés au choix des formateurs de chaque site. L'évolution de la formation des PE2 et en particulier le Stage Filé (SF) ont amené les formateurs à choisir de faire porter ce premier module sur la géométrie. En effet, la répartition des différentes disciplines d'enseignement entre stagiaire et directeur déchargé amène les stagiaires à enseigner principalement la géométrie durant ce SF. Le fait que le site IUFM concerné n'ait que deux classes de PE2 en formation exclut un regroupement des stagiaires par cycle, le module n'est donc pas attaché à un cycle.

Le choix de commencer par le travail sur le 3D est guidé par deux idées : la première est pragmatique et stratégique : plus les stagiaires sont formés tôt dans l'année plus ils ont de temps pour fabriquer et récolter le matériel nécessaire au travail dans l'espace et pour mettre en œuvre cette partie du programme souvent reléguée à la fin de l'année ; la seconde est l'idée que l'introduction des objets 2D comme face des objets 3D évite que les élèves ne reconnaissent les figures planes que quand elle sont dans le « bon » sens, le carré bien à plat, le losange sur sa pointe... Enfin, les formateurs ont choisi d'aborder la situa-

tion d'apprentissage en commençant par les situations de communication au sens de Brousseau (1986). Ce type de situation est apparu, d'expérience, comme plus propice à une réflexion sur les situations d'apprentissage que les autres types de situations (action ou validation). Lors d'années antérieures la situation d'apprentissage a été introduite au travers de situations d'actions. Les travaux rendus par les stagiaires montraient alors qu'ils avaient du mal à ne pas intervenir et interférait beaucoup dans le travail de l'élève. Ils avaient également des difficultés à assurer le réel dévotion de la tâche ; ceci est problématique car la situation d'action est basée sur l'idée de rétroaction, c'est-à-dire que la situation renvoie elle-même à l'élève s'il a réussi ou non, dans ce dernier cas il doit alors remettre en cause ses stratégies pour réussir.

L'expérience montre que les stagiaires ne laissent pas l'élève se confronter à la tâche ils lui donnent des indications sur la manière de la réaliser dès la consigne ou en cours d'activité. La façon de rendre les élèves responsables de leur tâche (la dévotion de la tâche) est assez subtile dans les situations d'action, elle nécessite d'avoir une certaine « confiance » en la situation elle-même ainsi qu'en ses effets. Il est donc logique qu'il soit difficile pour les débutants de s'approprier correctement cette démarche. Les situations de communication sont apparues plus usuelles et plus facilement appréhendables.

Le second choix a été de faire une présentation à rebours par rapport au fil des apprentissages : travailler les conceptions attendues à la fin du cycle 3 et les problématiques associés puis amener les stagiaires à s'interroger sur les situations qui préparent et amènent les élèves à ces conceptions en reculant dans les cycles jusqu'à l'école maternel-

le. Le travail porte en premier sur la caractérisation des polyèdres : savoir qu'un polyèdre est caractérisé par son nombre de faces, la nature de ses faces, son nombre d'arêtes, son nombre de sommets et la puissance de ses sommets ; mais aussi sur la connaissance de problématiques clefs : le concept de patron et ses difficultés spécifiques (caractéristiques du patron par même nombre de faces et même nature des faces que le solide, non unicité du patron, problème des relations d'incidence⁷, questions liées à la présentation du patron d'un seul tenant, faces « attachées » par des côtés complets...) et enfin sur la problématique du VU et du SU qui apparaît lors de la représentation plane des objets 3D. Avec un public de PE2, non spécialiste des mathématiques, le choix de faire émerger ces questions et ces définitions en leur faisant vivre des situations proches de celles des élèves s'est imposé comme pertinent. Nous utilisons donc des situations de la programmation ERMEL CM2 telles qu'elles sont présentées dans l'ouvrage et des situations que nous transposons pour les rendre plus problématiques. Une fois ce travail fait, nous reprenons à rebours les différents éléments qui permettent d'arriver à ces situations.

L'exemple choisi ici et l'analyse qui en est faite, principalement empirique, n'est pas issue de travaux de recherche (en particulier, elle ne se situe pas dans le cadre du travail de l'équipe ERMEL) et doit être considérée comme une expérience de formateurs. Ainsi l'enjeu n'est ni de proposer un modèle ni même de tirer des généralités de cette expérience mais de présenter une expérience et d'en analyser quelques effets dans les travaux des stagiaires.

⁷ C'est la relation qui lie deux faces qui « s'assemblent » lors de la reconstitution du solide

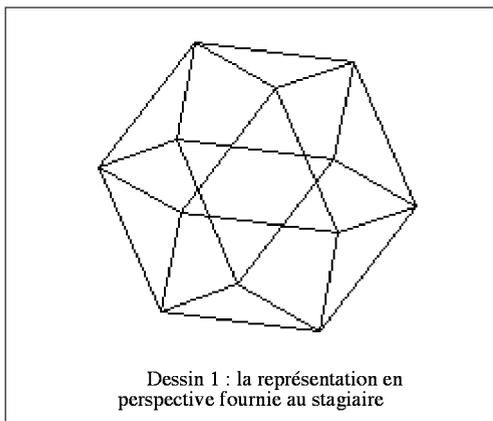
⁸ Le matériel est constitué de pailles de différentes longueurs qui sont reliables par des sommets de différentes puissances (2, 3, 4 et 5).

III-1.1 *Un exemple de formation par homologie – la situation « communiquer le solide »*

Nous explicitons le processus de formation aux stagiaires en développant l'idée de situations « pas de côté ». Nous les invitons à résoudre le problème dans un dispositif analogue à celui proposé aux élèves, La situation peut être plus ou moins adaptée de la situation « communiquer le solide » se trouvant dans (ERMEL - 2006). Une fois le travail réalisé, les stagiaires font à nouveau un pas de côté pour revenir en position d'enseignants et analysent la situation vécue, les procédures mises en œuvre. Le travail se termine par l'analyse de la situation en termes d'enjeu didactique, de compétences travaillées et de type de situations d'apprentissage. Elle peut alors déboucher sur la construction de situations pour les élèves. Dans l'exemple que nous présentons, les concepts didactiques en jeu sont principalement l'opposition entre le VU et le SU tiré des travaux de Colmez et Parzys (1993).

La situation proposée aux stagiaires est la suivante : un stagiaire est derrière le tableau avec une vue en perspective d'un solide (il s'agit d'un solide archimédien obtenu par troncature du cube : le cuboctaèdre - voir dessin 1 page suivante). Ce solide est choisi suffisamment complexe pour que les stagiaires n'en connaissent ni le nom, ni les caractéristiques. Les autres stagiaires sont répartis en groupes de quatre. Dans chaque groupe, deux stagiaires ont le matériel « solide avec pailles »⁸ de Fernand Nathan et deux autres ont le matériel « Plot »⁹ de l'AMPEP

⁹ Ce matériel est constitué de faces en cartons. Les formes présentes sont un carré, un rectangle constitué de deux carrés, un triangle équilatéral de même côté que le carré, un pentagone régulier également de même côté. Ces faces ont des bords qui permettent de les attacher par un élastique. Les polyèdres dans l'espace; les dossiers du PLOT. MARS 1987. PLOT APMEP d'Orléans-Tours.



d'Orléans-Tours. Les groupes doivent poser des questions fermées au stagiaire du tableau de façon à pouvoir construire le solide avec le matériel donné. Afin de mettre un enjeu supplémentaire et de limiter le nombre de questions, une contrainte supplémentaire est ajoutée : Les stagiaires ont 30 points au départ. Une question fermée coûte 1 point, une question numérique 3 points, une demande de validation 5 points, une question à laquelle il n'est pas possible de répondre soit par « oui » ou « non » ou par un nombre coûte 5 points. Il faut alors réaliser le solide en conservant le maximum de points. Les questions sont posées par écrit pour garder une trace de l'activité des stagiaires.

III-1.2 *Quels enjeux pour la situation de formation proposée ?*

Lors des mises en œuvre de cette situation, il apparaît invariablement des erreurs dans l'appréhension de la perspective par le stagiaire derrière le tableau. Il n'envisage pas que lorsqu'il voit un rectangle sur sa feuille, il peut s'agir d'un carré dans l'espace. Il en est de même pour les triangles isocèles des-

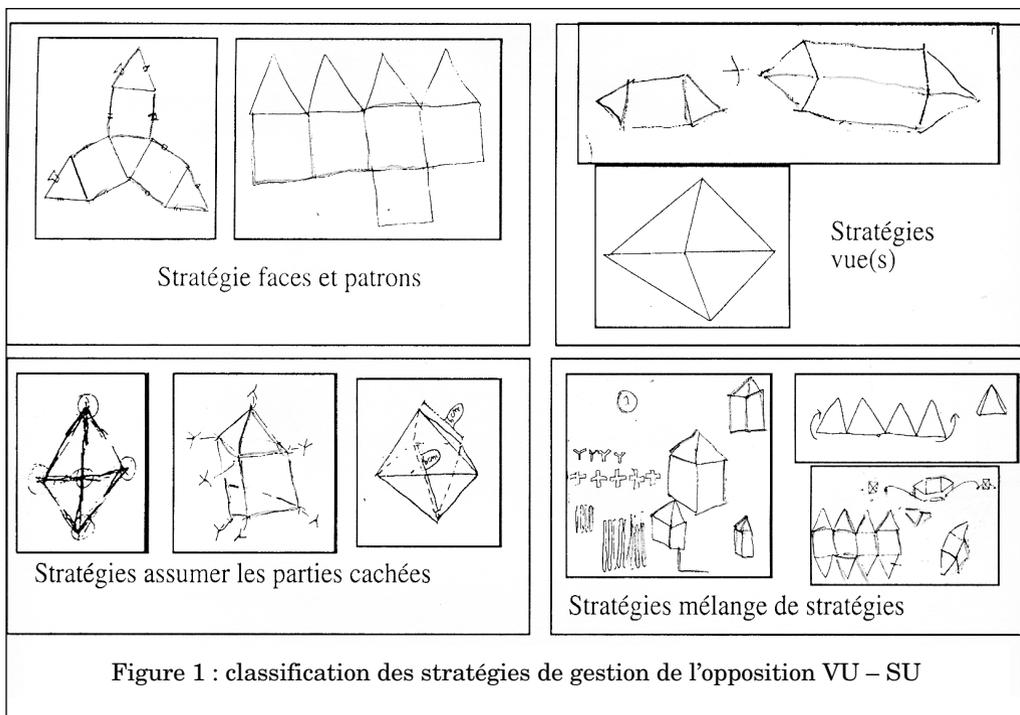
sinés qui peuvent être en fait des triangles équilatéraux dans l'espace. Alors qu'avec le matériel Fernand Nathan il est possible de construire un solide avec des rectangles et des triangles isocèles, cela est impossible avec le matériel plot qui ne contient que des carrés et des triangles équilatéraux. Les stagiaires sont donc confrontés à une impossibilité de construction et à un blocage de la situation. Cela amène l'émetteur à modifier des réponses. Cette situation met donc en lumière l'opposition entre le VU et le SU. Le stagiaire voit que ce sont des rectangles mais sa connaissance des solides et de la perspective doit l'amener à identifier que ce peut être la représentation en perspective de carrés dans l'espace. Au travers de cette situation, les stagiaires sont amenés à réfléchir à la notion de situation de communication, au rôle des variables didactiques (ici principalement le choix du solide pour l'émetteur et la façon dont il y accède, celui du matériel pour le récepteur et le type de communication).

Cette situation peut être considérée comme un peu « brutale » dans le sens où elle met les stagiaires en difficulté, certains peuvent même penser qu'il s'agit d'un « piège ». Certains formateurs peuvent craindre que cette situation ait des effets pervers en laissant penser aux futurs enseignants que puisqu'eux-mêmes ont eu des difficultés, la situation est impossible à mener avec des élèves. Ces questions font apparaître un biais : quand les compétences des stagiaires sont assez proches de celles des élèves (c'est le cas aussi pour les TICE), il risque d'y avoir confusion entre les savoirs professionnels qui sont l'enjeu de la formation et les savoirs d'enseignement. Le stagiaire, ayant à gérer en même temps les deux types d'apprentissages, n'arrive pas à prendre suffisamment de distance pour analyser le processus

d'enseignement-apprentissage. Dans l'exemple que nous exposons, il ne s'agit pas d'une situation à destination des élèves, elle est transposée pour les enseignants, ce qui permet de mener une réflexion, a posteriori, sur les choix de variables pour les situations d'enseignement. La situation débouche d'ailleurs sur une production par les stagiaires d'un tableau de présentation des choix possibles dans les variables de situations de communication que nous avons intitulé mille milliards de situations en faisant référence au grand nombre de possibilités de situations différentes qu'il fait apparaître. Nous donnons un exemple de productions des stagiaires en annexe 1 pour des PE2.

Une fois le tableau construit, les stagiaires analysent la situation tirée d'ERMEL nommée « communiquer le solide ». Nous nous appuyons sur des travaux d'élèves que les stagiaires classent par type de stratégie de gestion de l'opposition VU – SU : les patrons, les vues (une ou plusieurs), les parties cachées assumées et les associations de plusieurs représentations incluant par exemple le détail du matériel

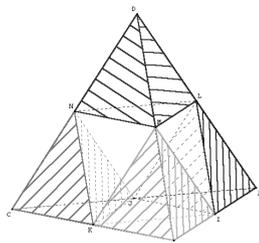
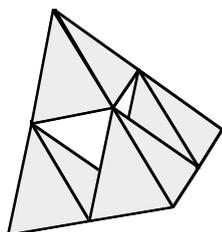
Il existe également des situations où la transposition n'est pas nécessaire, c'est-à-dire que l'on peut faire vivre aux stagiaires une situation qui est proposée aux élèves de cycle 3. C'est l'exemple que nous proposons maintenant avec la situation grand tétra.



III- 1.3 Un second exemple : une situation non transposée : grand tétra

Description de la situation proposée aux élèves de l'école primaire :

Problème : « Quatre tétraèdres posés l'un sur l'autre par les pointes, forment un grand tétraèdre avec un « trou » de forme octaédrique (cf. représentations ci-dessous). Il s'agit de construire le patron de ce solide « virtuel » afin, après découpage, pliage et collage de boucher le « trou ».



La situation se déroule en 3 temps :

- Les élèves (de l'école primaire) font un schéma (dessin à « main levée ») du patron qu'ils souhaitent réaliser.
- La mise en commun sert à débattre de la validité des propositions en utilisant des arguments géométriques et spatiaux : le nombre et la forme de faces, les pliages éventuellement impossibles, etc. (c'est ce

que l'on peut appeler une « validation théorique »).

Les productions sont rangées dans trois colonnes : « on est certain que ça marche », « on est certain que ça ne marche pas », « on est pas sûrs ». Puis, on essaie de modifier les assemblages, les dessins sont à « main levée » mais il est possible de découper/plier et de vérifier si l'assemblage fonctionnera ou pas (l'objet obtenu est approximatif, mais c'est suffisant pour forcer l'adhésion ou le refus), ainsi que de le modifier dans les cas où l'on était pas certain de sa pertinence.

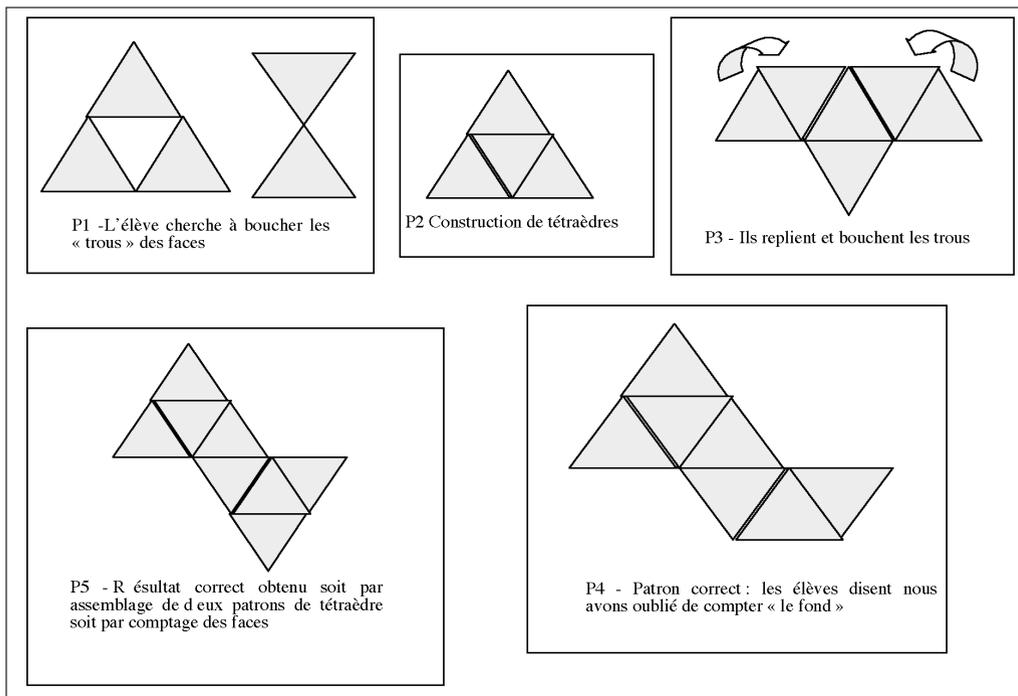
- Puis, quand tous les élèves se sont mis d'accord, ils recopient « au propre » (dessin rigoureux et précis) leur assemblage (éventuellement un patron) avec un gabarit. Puis, enfin, ils découpent, plient, collent et bouchent le trou (c'est ce que l'on peut nommer une « validation pratique »).

La spécificité de la situation :

- Situation de synthèse autour de la notion de patron,
- Mise en commun (validation théorique et argumentation) préalable à la validation pratique,
- Utilisation du schéma (dessin « à main levée »).

Les objectifs de la situation sont :

- Par la résolution d'un problème, être capable de se construire des « images mentales » d'un solide virtuel (le « trou »).
- Mettre en œuvre à bon escient le dessin « à main levée » afin de mener une réflexion d'ordre géométrique (théorique) sur la confection d'un assemblage pertinent de faces permettant de réaliser un solide. Le dessin précis (aux instruments) est momen-



tanément inutile, il relèvera ensuite d'un autre enjeu, celui de réaliser finement la maquette qui bouchera le « trou », ceci au moyen de gabarits.

Remarque : pourquoi des gabarits ? On pourrait demander de construire le patron aux instruments (c'est possible dans certains cas). L'activité serait alors plus contraignante et, pour des élèves de CM1, des problèmes dans l'utilisation des instruments apparaîtraient, ce qui, peut-être, contrecarrerait l'enjeu final, celui d'une validation pratique dans le fait de boucher exactement le « trou ».

Il est évident que l'obtention d'un dessin précis est utile mais, alors, on perçoit que

l'objectif est différent, il est nécessaire que les élèves en prennent conscience.

Ceci dit et afin qu'aucune ambiguïté ne s'installe, il est important de noter que le dessin précis pourra également servir ultérieurement à faire de la géométrie. En effet, dans certains problèmes complexes où le dessin « à main levée » n'est pas suffisant, il s'avère qu'un tel dessin devient utile, afin de bien visualiser les relations entre les sous-figures, c'est alors une aide certaine à la démonstration.

Mais, l'enseignement précoce et surtout « intensif » de ce type de dessin risque d'ériger des obstacles résistants à la construction des

relations géométriques car l'injonction qui en résulte est souvent essentiellement spatiale...

Les variables didactiques de la situation sont donc :

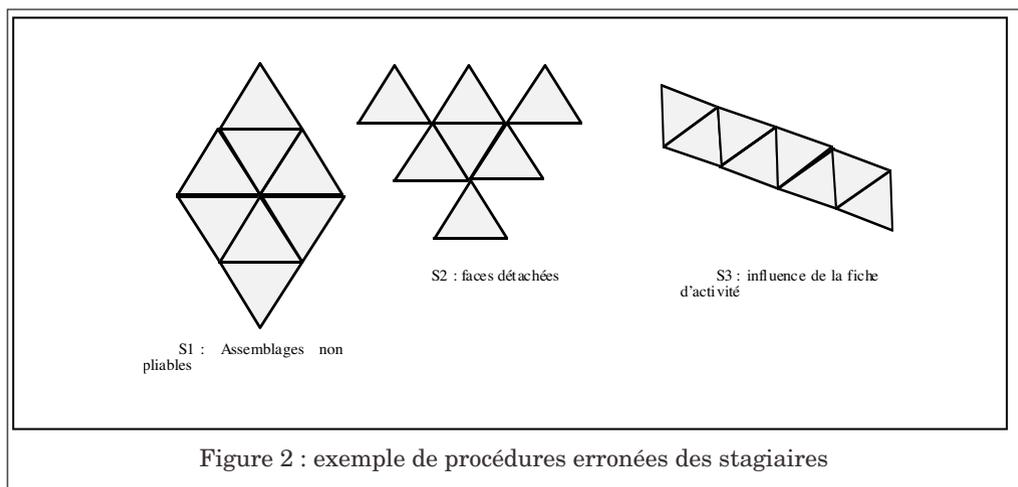
- La forme du « trou » (au CM1 est proposée une situation dans laquelle le « trou » est plus simple : voir ci-dessous).
- Le type de dessin demandé au départ : le dessin « à main levée ». Il permet aux élèves de se centrer sur les aspects théoriques du problème et de mettre à distance (momentanément) la précision qui correspond à un enjeu plus spatial.
- La présence des gabarits (ou non).

Concernant les stagiaires en formation :

Lorsque nous faisons faire cette situation « grand tétra » les stagiaires savent ce qu'est un patron mais ne sont pas sûrs de leur définition et éprouvent des difficultés à la formuler. Les stagiaires ont des procédures proches de celles des élèves du type P3 et P4, c'est-à-

dire des assemblages qui bouchent le trou sans permettre de fabriquer un solide ou des assemblages proches du patron mais avec une face manquante (procédures décrites au paragraphe II.5). On trouve aussi des patrons avec des faces attachées par leur sommet ou des patrons non pliables comme sur le dessin qui suit. La procédure S3 vient du fait que pour faire réaliser les tétraèdres nous faisons utiliser une bande de triangles avec collage face sur face. Les stagiaires pensent à un « piège » et disent que ce qui est sur la feuille et qui n'est, somme toute, pas habituel doit servir aussi à autre chose.

Les réponses des stagiaires étant proches de celles des élèves, on pourrait penser que le niveau de connaissances des premiers est proche des seconds. Ce n'est évidemment pas le cas. Les connaissances des stagiaires sont présentes mais non suffisamment structurées pour en faire un savoir explicitable. De plus le temps laissé aux stagiaires est plus court et ils semblent s'autoriser moins de procé-



dures que les élèves (comme le découpage de faces pour reformer le solide dans le trou par exemple). La situation est donc suffisamment problématique pour faire formuler une définition utilisable mais est également utilisée pour travailler sur les choix pédagogiques et didactiques.

Puisqu'il s'agit de la même situation (en accéléré) que celle que les stagiaires pourront mettre en œuvre dans leur classe, elle est un bon support pour faire analyser les choix en termes de gestion des différents temps des situations. Le premier choix est de faire fabriquer ou non le grand tétraèdre avec un trou. Les stagiaires concluent que ce n'est pas ce qui est important dans la situation même si cela permet aux élèves de s'approprier l'objet et que cette partie du travail peut facilement être faite dans une séance antérieure. Ensuite le fait de faire dessiner à main levée est associé à deux intentions : ne pas perdre de temps avec les instruments et obtenir un patron plus proche de ce que les élèves pensent vraiment. Pour le deuxième argument les stagiaires se rendent compte que les instruments (ou un gabarit) donnent des contraintes qui empêchent l'élève de dessiner ce qu'il pense réellement.

Le travail sur la place de la mise en commun est un moment important de la formation. La mise en commun se fait sur les dessins à main levée c'est-à-dire avant que les élèves ne sachent si leur patron est correct. Cela amène les stagiaires à réfléchir sur l'enjeu de la mise en commun, ici il s'agit de trouver des arguments théoriques pour valider ou invalider un patron : il n'a pas le même nombre de faces que le solide, les faces sont attachées par la pointe... Quelle aurait été la motivation pour débattre si la mise en commun avait été faite après construction d'un patron aux

instruments, découpage pour assemblage ? Que leur patron soit correct ou non ils n'ont que peu d'intérêt à expliquer pourquoi aux autres. Les stagiaires réfléchissent donc aux enjeux et à la place des mises en commun.

Par ailleurs une réflexion sur la gestion de la classe est menée : comment faire pour traiter 24 productions d'élèves ? Les stagiaires arrivent à plusieurs conclusions : il faut faire faire les dessins à main levée sur des feuilles A4 ou A3 au feutre pour être vues de loin, une première phase consiste à mettre ensemble les dessins identiques, afficher 24 dessins fournit trop d'informations, on prend donc les dessins un par un pour regarder s'il y a déjà un dessin identique au tableau ainsi au lieu d'examiner 24 dessins ensemble on compare 1 dessin à 4 ou 5 autres. Ce qui est le plus difficile pour les PE2 est de mettre à distance la validation pratique, c'est-à-dire qu'ils sont tentés de demander aux élèves de découper et plier leur patron ce qui remplacerait alors les arguments théoriques. Cela semble dû au fait qu'ils craignent que les arguments théoriques ne permettent pas de faire un classement sans erreur.

Pour conclure cette présentation de quelques éléments de notre formation nous pouvons dire que la première situation, transposée par rapport à la situation de classe, a vocation à être un déclencheur, la seconde, identique à celle qui est faite en classe, permet de réfléchir aux choix didactiques, à la gestion de classe. Nous présentons à présent une analyse des productions que ces mêmes stagiaires soumettent dans la cadre de la validation de leur année de formation professionnelle (PE2), recueillis durant l'année 2006-2007). Ils y cherchent à montrer l'acquisition des compétences attendues d'un enseignant.

III- 2 *Le travail sur le 3D dans les travaux des stagiaires*

III- 2.1 *Le contexte*

Depuis quelques années les professeurs des écoles stagiaires ont, durant leur formation, deux types de stages : des stages dit « *groupés* » c'est-à-dire de trois semaines en pleine responsabilité dans une classe en remplacement d'un enseignant qui la plupart du temps participe à un stage de formation continue et un stage dit « *filé* » pour lequel ils assurent la classe pendant toute l'année un jour de la semaine dans une même classe (dans notre académie il s'agit du jeudi) en remplacement dans la plupart des cas d'un directeur d'école alors déchargé pour assurer son travail de direction. Ce dernier stage « *filé* » a amené les enseignants titulaires de la classe à partager le travail et à confier, dans beaucoup de cas, et surtout au cycle 3 l'enseignement de la géométrie à ce « *maître du jeudi* ».

Notre propos n'est pas ici de discuter ce choix, ni les raisons de ce choix, qui par ailleurs a des avantages pour les enseignants titulaires comme pour les stagiaires. Quoi qu'il en soit une des conséquences est que nous savons que beaucoup de nos stagiaires enseignent la géométrie. De plus nos interventions dans les séances de préparation et d'analyse de stage nous montrent que les PE2 mettent en œuvre des séances concernant le 3D. Les demandes de prêt de matériel (solides, matériel de construction avec pailles, faces emboîtables...) confirme ce constat. Nous citerons également les phrases introductrices de trois des travaux que nous avons analysés dans la suite car elles nous semblent révélatrices du contexte : « *C'est une présentation, en cours de didactique des mathé-*

matiques, d'un travail autour des solides, qui m'a donné envie de mener un projet du même type avec mes élèves de grande section. Un entretien avec la titulaire de la classe et l'insitutrice de maternelle les ayant eus en petite et moyenne section, m'a permis de m'assurer de la pertinence d'un tel projet. Elles m'ont, en effet, toutes deux déclaré n'avoir jamais mis en œuvre d'activités de géométrie autour des solides. » ou encore cette description du contexte par un autre stagiaires : « *Niveau : CE1, Effectif : 18 élèves, Notions déjà abordées par les élèves concernant les solides au cours du cycle : aucunes »* et enfin un troisième : « *Après discussion avec les professeurs des classes de CE2 et CM1, il s'avère que les élèves ont fait très peu de géométrie auparavant. En ce qui concerne les solides, seule la perspective cavalière a été travaillée. »*

Les PE2 de l'académie de Champagne Ardenne utilisent un portfolio numérique (appelé CBI – Carnet de Bord Informatisé) pour déposer des travaux qui leur permettent de montrer l'acquisition de compétences professionnelles. Cet outil est décrit et étudié par Emprin et Lagrange (2007). Notre première remarque est qu'il n'y a que sept dépôts sur une cinquantaine environ qui concernent le 3D. Cette proportion est faible au regard du constat, certes empirique, que nous venons de faire de l'importance de l'enseignement du 3D dans ce qui est dévolu aux stagiaires durant leurs stages. Ce constat est d'ailleurs confirmé par l'introduction d'un des stagiaires dans son travail : « *J'ai préparé cette séance à partir des cours, et à partir de remarques apportées par d'autres PE 2 qui avaient déjà mis en place cette situation dans leurs classes. »*

Le niveau d'enseignement auxquels les travaux sont placés est également étonnant par rapport à la formation dispensée : alors que

les travaux présentés concernent principalement le cycle 3 (de par la démarche à rebours détaillée précédemment) il n'y a que trois travaux qui concernent ce cycle sur sept.

En première conclusion « quantitative » nous pouvons donc dire qu'alors qu'un nombre non négligeable de stagiaires mènent des séances sur la géométrie de l'espace, ils ne les utilisent pas comme support pour l'évaluation de leurs compétences. Pour aller plus loin nous décrivons maintenant ces travaux et nous en proposons une analyse succincte en lien avec notre dispositif de formation.

III – 2.2 *Synthèse des six analyses de séances*

Le tableau de la page suivante récapitule les contenus de six travaux déposés dans le CBI concernant le 3D. Nous présentons à part le septième travail qui est assez différent des autres puisqu'il s'agit d'une évaluation sur les solides.

Ces six travaux sont assez pauvres en terme d'analyse, tant au niveau de la didactique que de celui des pratiques professionnelles. Ils sont révélateurs de plusieurs difficultés que rencontrent les PE2.

D'abord les stagiaires ont des difficultés à laisser du temps aux élèves pour s'approprier la consigne, pour manipuler les objets, pour faire des essais. C'est le cas des travaux 1, 2 et 5 en particulier.

Ensuite les PE2 ne semblent pas être suffisamment conscients des enjeux des situations pour réagir à ce que les élèves produisent : dans le second travail le stagiaire ne saisit la chance de faire émerger l'idée que les trois objets ont les mêmes proprié-

tés mathématiques qui font qu'ils ont le même nom (sphère ou boule). De même la consigne du troisième travail : « Vous devrez poser des questions portant uniquement sur la forme. Il sera interdit de poser des questions sur la couleur des solides, leur marque... » tue une partie de la tâche. La même stagiaire met également dans sa fiche de préparation : « Le maître réintroduit ou introduit des mots de vocabulaire géométrique et les note au tableau. Les questions pertinentes posées par les élèves sont elles aussi notées au tableau. Inviter dès que possible les élèves à regarder ce tableau pour s'en inspirer. ». Plus loin elle relève des formulations des élèves et indique comment elle les a repris : « Mots utilisés par les élèves : Aplati, Grand/petit, Allongé, « A-t-il des faces plates ? » repris en « A-t-il des faces planes ? », « A-t-il des faces rondes ? » repris en « A-t-il des faces circulaires ? ». Ces stagiaires n'utilisent pas les variables didactiques des situations pour amener les élèves à se rendre compte que, dans le premier cas, ce qui fait que deux objets ont le même nom est leurs propriétés « mathématiques » et dans le second cas que le vocabulaire usuel n'est pas suffisant pour désigner sans erreur les objets mathématiques.

Le travail numéro 6, mais aussi dans une moindre mesure les travaux 4 et 5 montrent la difficulté à se détacher de l'ouvrage référence. Les stagiaires paraphrasent et reformulent ce qui est déjà écrit sans réellement montrer une appropriation des enjeux ou de réels choix personnels.

III – 2.3 *Analyse d'une évaluation sur les solides*

La stagiaire présente cinq exercices qui composent son évaluation.

N°	Niveau	Type de travail	nature de la situation	éléments d'analyse présents dans l'évaluation
1	GS	1 séance analysée	Situation de communication : toucher un objet caché (solides social)/ mime puis verbal / retrouver parmi un lot.	il manque un temps d'appropriation des objets en eux mêmes, il faut un temps de jeu libre. Difficultés à s'approprier le mime. La stagiaire conclut qu'elle aurait dû faire un exemple. Remise en cause de la consigne quand les élèves ont du mal à s'approprier la tâche: « Pourtant ma consigne méritait apparemment comme complète, mais visiblement insuffisante. » Problème matériel : "comment isoler l'élève qui touche le solide sans le perdre de vue ? Solution : je le mets assez loin mais sous mes yeux » sans envisager d'autres solutions.
2	GS / CP	8 séances présentées : 1 analysée.	Id avec ajout du modelage en troisième mode de communication	Analyse du stagiaire d'un problème qu'il a rencontré : l'élève mime une sphère et il a mis trois sphères dans le lot. Les élèves ne peuvent pas se départager donc le stagiaire arrête la situation.
3	CE1	2 séances analysées.	Situation de communication : solides sociaux vus par l'émetteur / jeu de question des récepteurs qui doivent retrouver parmi un lot	La stagiaire décrit les difficultés des élèves à utiliser le bon vocabulaire pour poser des questions, celui qu'elle a introduit elle. Pour conclure elle explicite son choix de la géométrie : « De plus, cette situation ludique, permettait aux élèves d'entrer dans l'apprentissage par de la manipulation de solides et donc, par des situations relevant plus du concret. »
4	CM1	Analyse d'une situation.	situation boucher le trou l ref. Ermel. réaliser un patron d'un solide absent avec des gabarits de faces	Le stagiaire fournit des notes pas à pas sur la séance, par exemple : introduire la séance en disant « pendant la récréation quelqu'un à coupé mon cube » incite les élèves à vouloir faire un cube pour le couper. Le stagiaire trouve trois procédures de dessin qu'il caractérise Ses conclusions sont essentiellement au niveau du temps, mise en commun longue et sur le fait que les élèves sont actifs, terme qu'il ne définit pas.
5	CM1	Analyse d'une séance.	situation habiller le solide réf. Ermel observer un solide prendre des notes sur ce solide puis rédiger un bon de commande de faces (sans le solide) pour l'habiller.	La stagiaire a prévu une différenciation, des solides simples pour les élèves en difficultés, plus compliqués pour les autres. Elle se rend compte dans l'analyse que ne sont pas simples les solides qu'elle pensait : le pavé droit qui était pour elle un solide simple a en fait des faces très proches qui sont donc difficilement discernables. Elle se plaint de la consigne qu'elle trouve trop longue et difficile à passer aux élèves. Elle termine en faisant un inventaire des procédures employées et de la trace écrite dans la mise en commun sans l'analyser.
6	CM1 / CM2	description d'une progression sur les solides	Une page est donnée avec un tableau qui est une copie du tableau de synthèse du thème 3D d'Ermel dans lequel le stagiaire a fait une sélection.	La seconde page est une paraphrase du contenu du tableau: « • Ensuite, l'activité « identifier les patrons d'un cube » va permettre aux élèves de visualiser différents patrons et de se rendre compte de l'importance des positions relatives des faces. »

Pour les exercices 1 et 2 en particulier il y a une véritable non prise en compte du travail sur la distinction VU-SU en particulier pour le solide A de l'exercice 1 qui pourrait très bien représenter un cube dans une autre perspective que la perspective cavalière. D'ailleurs les règles de perspective utilisées pour représenter les solides ne sont même pas les mêmes pour tous les solides de ces exercices. Dans l'exercice 2 il faut retrouver à quel solide correspond la phrase « 1. Mes 4 faces sont identiques » sur le dessin du tétraèdre les quatre faces ne sont pas identiques, la stagiaire ne peut donc pas savoir à quel facteur attribuer une erreur ou même une réussite. Il n'y a qu'un solide à 4 faces donc un élève peut tout à fait travailler par déduction sans savoir ce qu'est un tétraèdre et réciproquement un élève qui saurait décrire un tétraèdre s'il l'avait réellement devant lui (une maquette) peut se tromper car sur le dessin il voit quatre faces différentes.

La stagiaire demande également de tracer à main levée puis aux instruments le patron d'un prisme à base triangulaire dessiné en perspective dans l'exercice 4. Nous voyons ici l'influence du cours ou d'ERMEL où nous avons utilisé le dessin à main levée mais ici utilisé sans réel but.

La stagiaire a construit un barème et fait des moyennes mais par exercice sans définir dans le score un seuil pour lequel elle peut considérer la compétence en jeu dans l'exercice (et qui d'ailleurs n'est pas explicitement définie) comme acquise.

Elle conclut de façon générale : « Les résultats de cette évaluation sont très convenables compte tenu du faible niveau de la classe. »

III – 3. *Ce que nous apprennent ces travaux sur la formation et sur les enseignants débutants :*

Le 3D est manifestement un sujet difficile ou ressenti comme difficile par les stagiaires qui hésitent à le proposer pour mettre en évidence leurs compétences professionnelles.

Par ailleurs des concepts, objets du cours ne sont pas réutilisés dans les travaux. C'est le cas de la distinction entre Vu et le Su par exemple qui manifestement n'est pas utilisée par la stagiaire proposant le 7ème travail alors qu'elle permettrait de prendre du recul par rapport à l'évaluation proposée.

Motivation et « élèves actifs » sont associés encore fortement aux activités sur les 3D. Ceci explique aussi sans doute le fait que beaucoup de travaux concernent le cycle 2 alors qu'il n'y a pas d'ouvrage de référence proposé par les formateurs contrairement au cycle 3. Notre hypothèse est que de façon sous jacente apparaît l'idée que « à l'école maternelle et au cycle 2 on peut encore se permettre de manipuler. »

La prise de recul par rapport aux situations proposées est difficile et faible dans les travaux. Il est normal de suivre un outil, ne serait-ce que pour se l'approprier mais les stagiaires ont également des difficultés à saisir les enjeux de la démarche. Par exemple la stagiaire qui insiste sur le vocabulaire qu'elle apporte alors que les élèves s'acharnent à ne pas vouloir réutiliser ne se rend pas compte que la démarche proposée dans le cours est de choisir un lot de solides qui mette en défaut le langage courant des élèves. Il en est de même pour le PE2 qui n'a pas vu que le fait d'avoir mis trois sphères dans le lot est un choix qui permet de mettre à distance les proprié-

tés qualitatives des objets. Les analyses montrent assez peu de progrès dans les conceptions des stagiaires, sauf pour celle qui se rend compte que ce qui fait la complexité du solide pour commander des faces n'est pas là où elle croyait. Les autres sont relativement satisfaits et évoquent surtout des problèmes de consigne ou de temps.

IV. — Perspectives

La recherche actuelle conduite par l'équipe ERMEL porte sur deux objets en relation : les apprentissages géométriques au cycle 2, dans la continuité des problématiques et résultats de la recherche précédente menée au cycle 3 et l'analyse des apports de dispositifs s'appuyant sur des outils informatiques (logiciels de géométrie dynamique en particulier) dans les apprentissages géométriques au cycle 2 et au cycle 3.

En ce qui concerne la formation des enseignants, les travaux proposés à l'évaluation par les stagiaires sont en décalage avec notre ressenti d'une utilisation assez importante des situations de communication de solides en classe. Dans les validations, le domaine numérique est majoritairement traité. Il est difficile d'émettre des hypothèses basées sur un constat aussi limité, ainsi nous présentons quelques questions. En particulier, le

manque d'expertise souligné par la situation de formation les amène-t-ils à proposer des validations sur des domaines plus sécurisants ? L'appropriation des situations de communication est-elle malgré tout réelle pour les stagiaires ? Cela sous-entendrait que l'enjeu de la validation de l'année et la titularisation qui en découle conduisent à des stratégies de repli vers des domaines plus sécurisants mais que, toutefois, les situations de formation ont un réel impact sur les pratiques professionnelles des stagiaires. Enfin, quels dispositifs permettraient une meilleure prise de distance avec les dispositifs proposés par l'équipe ERMEL ?

D'autre part les expérimentations, modestes, effectuées dans les recherches citées montrent qu'une sensibilisation à des tâches telles que la gestion des mises en commun est nécessaire dès la formation initiale pour que le professeur stagiaire s'interroge sur ce qui relève de sa responsabilité et de celle des élèves dans ces phases de validation, sur les fonctions de ces débats et sur les conditions pour que ceux-ci soient compatibles avec des exigences disciplinaires. Une piste de recherche porte donc sur l'analyse des conditions, relatives aux dispositifs de formation, permettant une appréhension, sinon la maîtrise, des compétences professionnelles en jeu dans les phases de validation

Bibliographie

- Altet M., 2000, L'analyse de pratiques : une démarche de formation professionnalisante ?, *Recherche et Formation*, n° 35, pp. 25-41
- Agaud Henri-Claude.,1998, *Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier -crayon et Cabri-géomètre* Thèse, Université Joseph Fourier (Grenoble-I).
- Brousseau G., 1986, « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques », *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 7 / 2, La Pensée Sauvage.
- Colmez F. et Parzysz B., 1993, Le VU et le SU dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 à la seconde, in *Espaces graphiques et graphismes d'espace, Recherche en Didactique des Mathématiques*, coordonné par Annie BESSOT et Pierre VERILLON, La Pensée Sauvage.
- Douaire J., Argaud H.-C., Dussuc M.-P., Hubert C. 2003 "Gestion des mises en commun par des maîtres debutants" *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes* (coordonné par J.Colomb, J.Douaire et R.Noirfalise, ADIREM/INRP.
- Emprin F., Lagrange J.-B. (2007), Dispositifs en ligne dans la formation des professeurs des écoles. Réflexions et échanges à partir de l'expérience de l'IUFM de Champagne Ardenne. In actes du XXXIVème colloque copirelem Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école?, Troyes juin 2007
- Equipe ERMEL, 2006, *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3* (609 p. Hatier).
- Houdement C. et Kuzniak A., 1996, Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16/3, La Pensée Sauvage.
- Kuzniak A., 1994, Paradigmes et espaces de travail géométriques, Thèse de doctorat, Université Paris VII - Denis Diderot.
- Parzysz B, 1989, Le vu et le su , *Bulletin APMEP*, n°364.
- Perrenoud P., 2002, Adosser la pratique réflexive aux sciences sociales, condition de la professionnalisation, *Conférence d'ouverture École d'été des IUFM du Pôle Grand Est* Arras, 3-5 juillet 2002, Accessible en ligne : http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/textes.html lien vérifié le 07/09/07
- Perrenoud P., 2003, L'analyse de pratiques en questions, *In Cahiers Pédagogiques*, n° 416, Accessible en ligne : http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/textes.html lien vérifié le 07/09/07
- Porcheron J.-L., 2005, Comparaison d'objets géométriques au cycle 3 de l'école élémentaire, *Repères IREM* n°58.
- Schön D.-A., 1994, *le praticien réflexif*, traduit par Heynemand J. et Gagnon D les éditions logique. traduit de «the reflexive practitioner », (1983), basic book inc. U.S.A.

ANNEXE 1

*Les situations présentées s'intègre dans un ensemble de situations concernant les différents niveaux du cycle 3, dont nous présentons succinctement les éléments essentiels dans le tableau de synthèse ci-dessous tiré de **ERMEL (2006)**. Des éléments plus détaillés sont fournis en annexe 2.*

Situations	Description rapide	Objectifs	Objets abordés	Durée
Deviner le solide (CE2)	Il s'agit pour les élèves de retrouver, parmi un lot et grâce à des questions fermées, le solide caché par un groupe d'élèves ou par l'enseignant.	Construction d'un vocabulaire de description des propriétés spatiales et géométriques des polyèdres (face, arête, sommet...).	Pavé, prismes, pyramides sont rencontrés ainsi que leurs faces.	Deux séances de 55 minutes + une séance de 30 minutes pour l'accompagnement.
Habiller un solide (CE2)	Les élèves doivent décrire les faces qui constituent la frontière d'un solide pour que le récepteur puisse les choisir dans un lot.	Caractériser un polyèdre par sa frontière, celle-ci étant vue comme un ensemble de polygones liés par des relations d'incidences.	Carré, rectangle, triangle rectangle, triangle, pentagone. Objets rencontrés : pyramides, solides complexes.	Deux séances de 55 minutes.
Construire un solide (CE2)	Les élèves doivent commander, à partir d'un catalogue, des faces pour construire un solide identique à un solide donné, caché dans un coin de la salle.	Prendre conscience que la nature d'un solide dépend du nombre et de la nature de ses faces et qu'il y a des relations d'incidences entre ces dernières.	Carré, triangle, trapèze isocèle, trapèze rectangle. Objets rencontrés : prismes, solides complexes.	Deux séances de 55 minutes.
Assemblons les faces (CM1)	A l'aide de gabarits, les élèves doivent faire un dessin permettant de reconstruire un solide donné.	Prendre conscience que n'importe quel assemblage de faces ne permet pas de construire un solide. Donner une définition du patron et se rendre compte qu'il n'y a pas unicité du patron pour un solide donné.	Objets rencontrés : pyramides, prismes, pavés, cubes. Figures planes rencontrées : pentagone, rectangle, triangles...	Deux séances de 55 minutes.
Patron de solide (CM1)	Il s'agit dans un premier temps de trouver le nombre maximum de patrons du cube différents, puis d'associer assemblages de polygones et descriptions de polyèdres.	Etre capable d'identifier si un assemblage donné de figures planes est ou non un patron d'un polyèdre.	Objet étudié : cube et patron du cube. Objets rencontrés : polyèdres complexes. Figure plane rencontrée : carré.	Deux séances de 55 minutes.
Cube tronqué	Il s'agit de construire un assemblage de faces pour faire un patron d'un cube tronqué.	Etre capable de fabriquer un patron et de déterminer si un assemblage est un patron.	Objet étudié cube par l'intermédiaire du cube tronqué. Figures planes rencontrées : carré, triangle.	Une séance de 55 minutes.

Boucher le trou 1	Il s'agit de construire un patron en utilisant des gabarits de faces. Le solide est « absent ».	Réinvestissement de la notion de patron.	Objet rencontré : pyramide.	Une séance de 55 minutes.
Patron de pavé	Il s'agit de construire avec des instruments des patrons de pavé de façon à reproduire à l'identique un pavé droit.	Réinvestissement des compétences et des connaissances autour de la notion de patron. Tracé avec des instruments.	Objet étudié : pavé droit. Figures planes étudiées : carré, rectangle.	Une séance de 55 minutes.
Boucher le trou 2	Même situation que Boucher le trou 1 mais avec un solide plus complexe.	Réinvestissement de la notion de patron.	Objet rencontré : octaèdre. Figures planes rencontrées : triangles.	Une séance de 55 minutes.
Représenter un solide	Il s'agit de communiquer par un dessin un solide de façon à ce que le récepteur le fabrique avec un matériel donné (du type pailles)	Gestion du conflit VU / SU.	Objet rencontré : polyèdre complexe.	Deux séances de 55 minutes.

ANNEXE 2

Détail des situations sur les solides

- **Devinez le solide (CE2)** : Chaque groupe d'élèves à un lot de solides à disposition. Il s'agit de trouver un solide dans ce lot à partir de questions fermées (réponse Oui/Non) posées par ces groupes (alternativement, une question par groupe) soit à un autre groupe (disposant du solide), soit à l'enseignant (qui a caché, lui-même, le solide à trouver). Un exemplaire du solide à déterminer est dans chaque lot. C'est une situation de communication (E/R).

Objectifs : Amener les élèves à décrire les solides par leurs propriétés géométriques (nombres de faces, arêtes, sommets et nature des faces) et non plus par leurs propriétés qualitatives (couleurs, matières, forme générale, etc.).

Dans le lot, l'on a placé deux solides ayant le même nombre de faces, arêtes et sommets, ils ne diffèrent que par la forme des faces. Ceci oblige les élèves, lors d'une reprise de la situation, à centrer les questions sur la forme des faces.

Des activités d'accompagnement sont prévues : des fiches ont été rédigées à cet effet.

Le choix des valeurs des variables didactiques est essentiel :

- Le choix du solide à trouver et des solides composants le lot : il s'agit de mettre en

défaut les descriptions qualitatives des élèves. Il est proposé des solides qui se ressemblent perceptivement afin d'amener les élèves à utiliser des propriétés géométriques pour les caractériser. Egalement, le choix judicieux permet d'éviter que les élèves désignent les solides par leur nom. La présence des deux solides qui sont décrits ci-dessus est également importante.

- La nature de la communication : les questions sont fermées ou non. Ce choix influe sur la précision du vocabulaire...

• **Habiller le solide** (CE2) : C'est trouver les bonnes faces d'un solide ; c'est également une situation de communication (orale, puis écrite).

L'élève décrit à un autre les faces qui constituent la frontière d'un solide, celui-ci doit alors, à partir de cette description seule, les choisir dans un lot de faces diversifiées. La validation se fait par collage sur le solide d'origine. La description se fait d'abord par oral, puis par écrit (ou par un dessin).

Objectifs : Amener les élèves à caractériser un polyèdre (objet 3D) par sa frontière (naïvement : l'ensemble de ses faces en tant qu'objets 2D).

La nature de la communication est une variable importante ainsi que, dans le cas d'une communication écrite, la taille du support pour le message : sur une grande feuille, la duplication est possible, sur une petite, il est obligé d'utiliser des schémas ou du texte.

• **Construire un solide** (CE2) : Les élèves doivent commander les bonnes faces, celles-ci sont répertoriées dans un catalogue. L'enjeu est de construire un solide identique à un solide donné qui est caché dans la classe. C'est encore une situation de communication (des « bulletin de commande » sont rédigés à cet effet).

Objectif : Amener les élèves à comprendre que la nature d'un solide est dépendante du nombre et de la nature de ses faces.

Mais ils devront également comprendre qu'il y a des relations, notamment des contraintes de longueurs de côtés, entre les faces qui se touchent (c'est ce que l'on appelle, des relations d'incidence en tant que relations géométriques entre faces).

Le choix du solide et le contenu du catalogue sont les variables de la situation, ainsi que la façon dont les élèves peuvent prendre l'information. • **Représenter le solide 1** (CE2) : Dessiner un solide pour le reconnaître dans un lot¹⁰.

Un solide est distribué, caché dans une boîte, à chaque groupe d'élèves. Ceux-ci doivent faire un dessin de ce solide. Ensuite on échange les dessins entre deux groupes, l'enseignant distribue un lot de solides contenant évidemment un duplicata des solides dessinés. Chaque groupe doit reconnaître le solide à partir du dessin qu'il vient de recevoir et exclusivement celui-ci.

¹⁰ Cette situation s'inspire d'une recherche menée par F. Colmez et B. Parzys, dont le compte-rendu est dans le livre « espace graphique et graphisme d'espace » (1993), Eds la Pensée Sauvage, page 35.

Objectif : Amener les élèves à réaliser une représentation graphique d'un solide.

Cette situation constitue un premier pas concernant le passage du 3D au 2D et au dessin. Ce passage est complexe et long (du CE2 à la 4ème, voir ci-dessus pour les commentaires).

• **Assemblons les faces** (CM1) : Construire un solide à partir d'une représentation plane. Aborder la notion de patron.

Dans un premier temps les élèves doivent faire un dessin permettant, après découpage, pliage, collage, de confectionner un solide qui est à leur disposition. Ensuite, de même, mais alors le solide est caché dans la classe et ils doivent aller chercher les bonnes informations au moyen d'une petite feuille (afin d'empêcher les empreintes) permettant de réaliser le dessin. Dans les deux cas, les élèves disposent de gabarits, ceci afin de limiter la complexité du travail de tracé.

Objectifs : Il s'agit d'amener les élèves à prendre conscience que n'importe quel assemblage de figures planes ne permet pas toujours de construire un solide.

Dans cette situation on met en évidence le fait que pour un polyèdre le nombre et la nature des polygones constituant le patron sont identiques au nombre et à la nature des faces du solide considéré. Un assemblage d'un seul tenant qui permet de construire le solide se nomme un « patron », il existe plusieurs patrons possibles pour un même solide.

Variables didactiques : le choix du solide, la présence des gabarits ou non, la taille de la feuille ...

• **Patrons de solides** (CM1) : Chercher le maximum de patrons du cube.

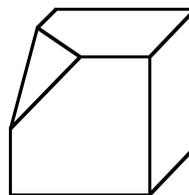
Il s'agit ici de chercher le maximum de patron d'un cube. Il est prévu soit un quadrillage soit des gabarits (selon les étapes de la situation). En effet, de nouveau l'enjeu n'est pas d'obtenir un dessin précis, mais de réfléchir aux relations géométriques entre les carrés pour résoudre un problème d'optimisation (tous les patrons... sans en oublier).

Objectif : Rendre les élèves capables d'anticiper si un assemblage de figures planes est un patron (dans ce travail le cube est un solide privilégié).

Il s'agit de poursuivre la réflexion sur la reconnaissance d'un solide à partir du nombre de faces, sommets et arêtes. Mais, en plus, la reconnaissance doit se faire ici à partir d'un patron.

• **Cube tronqué** (CM1) : A partir d'un solide non-usuel, communiquer la procédure de construction à partir d'un schéma.

C'est un cube tronqué qui est l'enjeu de l'activité, comme celui représenté ci-contre. Les élèves doivent, dans un premier temps, construire des schémas correspondant au patron d'un solide visible (mais de loin afin que les élèves ne puissent pas l'utiliser pour fabriquer leur patron et qu'ils soient obligés d'en faire une analyse), ceux-ci feront l'objet d'une



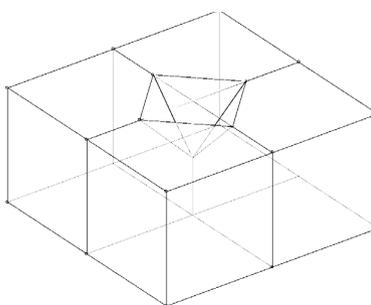
mise en commun. La construction effective, au moyen de gabarits adéquats, se fera ensuite.

Objectif : Amener les élèves à anticiper pour reconnaître si un assemblage constitue ou non un patron. Ils doivent, en plus, savoir reconnaître si deux patrons différents correspondent ou non au même solide.

• **Boucher le trou 1 (CM1)** : Trouver le solide qui bouche un trou. Faire le schéma du patron (pyramide).

Un dispositif est construit à partir de quatre cubes tronqués, comme le dessin ci-contre l'indique.

Une pyramide composée d'un carré et de quatre triangles équilatéraux, devra être construite afin de boucher exactement le « trou »



Objectif : Se construire des images mentales d'un solide virtuel (le « trou »).

Dans cette situation, Il s'agit de déconstruire le patron d'une pyramide à base carré (les faces correspondent à des gabarits, afin de limiter la complexité du tracé).

• **Patron de pavé (CM2)** : Reproduire un pavé directement à l'identique et non accessible.

Le pavé est posé sur une table, il faut se déplacer pour prendre suffisamment d'informations et le construire en dessinant le patron.

Objectifs : Construire, à l'aide des instruments, différents patrons d'un pavé. Donc, il s'agit de mobiliser des compétences acquises dans les constructions de solides à l'aide des instruments, dans le domaine des mesures et dans la réalisation de patrons, ainsi que de se rendre compte que plusieurs patrons sont possible pour un même solide.

• **Boucher le trou 2 (CM2)** : C'est l'exemple « Grand Tétra » décrit ci-dessus.

• **Représenter un solide 2 (CM2)** : C'est une situation de communication. Il s'agit de faire le schéma d'un solide afin qu'un autre puisse le construire avec un matériel donné (cette situation est sensée poursuivre la gestion le conflit décrit par le schéma du paragraphe II-2 ci-dessus).

Les élèves sont par groupes de quatre, dans chaque groupe les deux groupes de deux vont s'échanger leur dessin (ils sont donc à la fois émetteur et récepteur), ils sont tout deux munis du matériel composé de pailles et de sommets¹¹. Chaque groupe de deux doit donc construire un dessin qui soit tel que le groupe récepteur puisse construire le solide de même

¹¹ Matériel « solides à construire », édité chez F. Nathan. La boîte est composée de trois sortes de pailles (trois longueurs différentes) et de « sommets » en plastique permettant d'assembler soit 3 pailles, soit quatre, soit cinq. C'est donc le « squelette » du solide qui est construit au moyen de ce matériel.

forme avec le matériel à disposition. Le groupe émetteur sait quel matériel est à disposition de l'autre groupe, on a donc les objectifs suivants :

Objectifs : Amener les élèves à comprendre que, lors l'élaboration de la représentation plane d'un solide, il est nécessaire, d'une part, de perdre de l'information, mais également, d'autre part, d'en conserver.

En fait, il s'agit d'être capable de trouver un compromis entre la représentation sans adaptation des propriétés géométriques du solide qu'ils connaissent (le SU), avec l'image mentale globale qu'ils ont de l'objet (le VU).

Le choix du matériel est donc une variable didactique importante de cette situation ¹².

¹² Si le matériel à disposition est le matériel « polydron » (par exemple), il est clair que les dessins s'orienteraient prioritairement vers des dessins de patrons.

ANNEXE 3

*Tableau de synthèse : les variables didactiques
des situations de communication*

Objet	Emetteur			Vecteur	Rétro- action	Temps	Récepteur		Validation par
	Nbre	Modalité	Prise d'infor- mations				Nbre	action	
3D •sociaux •complexes •maquettes •déformables dessin •perspectives •vues Description •Écrite •orale	•seul •à 2	•choix •ou non	•vue +toucher •vue •toucher	- Parler - Mimer - Questions fermées → - Chaîne → - Dessin ← - Mots limités → → → - Ecrire → - Limiter questions (nb, points) ← → - Modelage ← →	•oui •non	•limité •non	•seul •plusieurs	•dessine •modèle •construit •(légo, clixi, plot...) •programme de construction •choisir dans un lot	•émetteur •enseignant •compara- raison •prise d'infor- mations