
LE VOLUME DE LA BOULE EN TROISIEME

Sébastien PEYROT
Irem de Poitiers

Quelques éléments en guise d'introduction

Dans les programmes

Dans les programmes de mathématiques du collège², l'une des quatre parties de l'organisation des contenus s'intitule « grandeur et mesure ». Dans cette partie, pour les élèves, il s'agira de se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes comme les longueurs, les angles, les aires, les volumes et les durées. Il faudra aussi qu'ils connaissent et utilisent les périmètres, les aires et les volumes des figures planes et des solides étudiés et qu'ils calculent avec les unités relatives aux grandeurs étudiées, ainsi qu'avec

les unités de quelques grandeurs quotients et grandeurs produits.

Dans les classes

Dans un premier temps, en classe de sixième, on s'attachera à comparer ces grandeurs, puis on pourra les multiplier ou les diviser par deux, par trois, etc. Ainsi le sens de chaque grandeur pour les élèves sera considérablement renforcé. La prochaine étape dans la formation des élèves sera la mesure des grandeurs et l'élaboration de formules permettant des mesures rapides. Le souhait de toujours donner une justification de ce que nous faisons en classe doit rester constamment présent à l'esprit lorsque nous prépa-

¹ Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008.

rons nos séquences. Si l'explication de l'obtention de la formule de l'aire d'un rectangle ou de celle d'un triangle rectangle ne pose pas de problème, il n'en est pas de même pour l'obtention du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque ou du volume d'une boule par exemple. Pour pallier cette difficulté, il est indiqué, à propos de l'aire d'un disque, dans les commentaires des programmes de sixième, qu'une démarche expérimentale doit permettre de vérifier la formule. Il est certain que l'on ne peut pas se permettre de donner une formule brutalement aux élèves sans au moins appliquer les recommandations des commentaires des programmes. Est-ce cependant suffisant, satisfaisant ? Que justifions-nous exactement lorsque nous vérifions expérimentalement qu'une formule fonctionne ? Que deviendrait l'expérimentation si la formule pour calculer l'aire d'un disque était $3,14 \times r^2$, ou si, pour calculer le volume d'une boule, on faisait $4,19 \times r^3$?

L'explication de la construction de certaines formules, comme celle du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle par exemple est aisée. On peut montrer aux élèves sans peine d'où elle provient. N'y-aurait-il pas aussi une voie similaire, par laquelle on pourrait montrer une construction de la formule qui permet de calculer le volume d'une boule ? Il paraît en effet important de montrer aux élèves comment se construisent les connaissances de notre matière. Cette construction des connaissances participe au moins autant à leur formation que les connaissances elles-mêmes. Il est bien sûr essentiel d'appliquer une formule comme celle permettant de calculer le volume d'une boule par exemple, mais si l'on peut en plus expliquer la provenance de cette formule, sa genèse... Pour parvenir à nos fins, il faut essayer de

trouver quelques éléments dans l'histoire des mathématiques.

Objectifs de la séquence

La séquence que je vais exposer ici se fait en classe de troisième et concerne la sphère, le dernier solide simple à étudier du programme de collège. L'étude proposée concerne ses sections par un plan, son aire et son volume. Dans cet article, je vais essayer de présenter une façon d'aborder et de mettre en place le volume de la boule avec les élèves de troisième, bien que le programme ne le demande pas. Nous nous interrogeons d'ailleurs dans le groupe collège de l'Irem de Poitiers² depuis plusieurs années, dans le cadre de nos journées de travail en histoire des mathématiques et dans une démarche plus générale, s'il ne serait pas possible, d'établir pour les élèves, toutes les formules de périmètres d'aires et de volumes du programme du collège. Sous prétexte que l'on n'aurait pas les outils nécessaires pour établir la formule du volume de la boule (comme aussi celles du périmètre et de l'aire du cercle, celles des volumes du cylindre de révolution, de la pyramide, du cône de révolution), on abandonnerait ce qui fait une des spécificités de notre discipline : l'enchaînement logique des notions et la démonstration des résultats obtenus. Aussi, nous nous sommes tournés vers l'histoire pour essayer de voir comment étaient et pourraient être justifiées les formules de calcul de périmètres, d'aires et de volumes au programme du collège. Il est aussi à noter que dans d'autres pays, au même niveau, ces formules sont justifiées ; on pour-

² Thierry CHEVALARIAS, Frédéric DE LIGT, Jean-Paul GUICHARD, Bertrand LEBOT, Jean-Paul MERCIER, Walter MESSNER, Gaëlle PACAUD, Sébastien PEYROT, Cyril REDONDO, Claude ROBIN, Laurent SUEUR, Laurent TERRADE.

ra lire à ce propos un article de Robert CABAS-SUT [CAB]³. En ce qui concerne le volume de la boule, nos recherches historiques nous ont amené à explorer deux pistes. L'une, inspirée d'Alexis-Claude CLAIRAUT [CLA], s'appuie sur la décomposition de la sphère en une somme de pyramides ayant le centre de la sphère pour sommet, mais cela demande d'établir au préalable la formule de l'aire de la sphère. C'est d'ailleurs celle que certains de mes collègues de l'Irem ont choisie. L'autre, inspirée d'un écrit de GALILÉE [GAL], permet d'obtenir directement le volume de la boule. C'est celle que j'ai choisie de mettre en œuvre avec mes élèves et que je vais vous présenter. Dans tous les cas, se pose le problème du passage à l'infini et de la dimension 2 à la dimension 3, que l'on ne peut éluder. D'autre part, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dans l'espace et d'un tableur est une véritable aide qui se justifie pleinement. L'objectif de la séquence est donc de parvenir en quelques heures à calculer le volume d'une boule de rayon 4 cm, sans connaître préalablement de formule pour cela. La séquence qui suit tente de proposer « une justification » de la formule qui permet de calculer le volume d'une boule en utilisant la méthode des indivisibles de Bonaventura CAVALIERI, élève de GALILÉE.

La séquence en classe

Pré-requis

Préalablement à ce travail d'une semaine environ, plusieurs capacités du chapitre de géométrie dans l'espace de troisième auront été travaillées :

- la connaissance et l'utilisation de la nature des sections du cube et du parallélépi-

pède rectangle par un plan parallèle à une face ou à une arête ;

- la connaissance et l'utilisation de la nature des sections du cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe ;
- la représentation de la sphère et de certains de ses grands cercles.

En outre, des capacités des programmes précédents seront réinvesties :

- le théorème de THALES ;
- le théorème de PYTHAGORE ;
- la connaissance de la formule permettant de calculer l'aire d'un cercle ;
- la connaissance de la formule permettant de calculer le volume d'un cylindre de révolution ;
- la connaissance de la formule permettant de calculer le volume d'un cône de révolution.

Cadre du travail

Pendant cette semaine de travail, les élèves répartis en groupes devront calculer des aires de sections planes de différents solides qui seront présentés. Il est à préciser que la salle de classe dans laquelle nous travaillons est organisée en sept îlots de quatre tables. Le travail de recherche en groupes est donc largement facilité. En outre, la présentation des différents solides est réalisée par la projection sur un TNI⁴ de fichiers conçus avec le logiciel de géométrie dans l'espace « GeospacW ». Une Webcam⁵ reliée à l'ordinateur de la classe permet aussi de projeter en temps réel, par le biais du logiciel « VLC Média Player⁶ », les travaux, les idées et l'état des

³ Cet article est disponible en ligne dans la rubrique « Repères » sur le site du « Portail des IREM (<http://www.univ-irem.fr/spip.php>) »

⁴ Tableau Numérique Interactif.

⁵ <http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?article158>

⁶ <http://www.videolan.org/vlc/>

recherches des élèves. En outre, l'ordinateur de la classe relié au réseau pédagogique du collège et à Internet permettra également quelques recherches.

*Section d'un cylindre de révolution
par un plan perpendiculaire à son axe*

Pour commencer, je présente aux élèves deux fichiers⁷ réalisés avec le logiciel de géométrie dans l'espace « GeospacW » qui interagissent :

- un fichier représentant un cylindre de révolution de rayon 4 cm, de hauteur 4 cm représenté en perspective cavalière et une section de ce cylindre par un plan perpendiculaire à son axe, comme sur la figure 1 ;
- un fichier représentant le plan isolé de la section, comme sur la figure 2.

Je demande alors aux élèves de calculer l'aire de la section à différentes hauteurs. Ils commencent avec $AM = 1$ cm, puis ils refont le calcul pour plusieurs valeurs de AM . Quelques commandes propres au logiciel permettent d'aider les élèves à mieux appréhender, si besoin, ce qui est figuré sur ces fichiers :

- on peut générer le cylindre de révolution en faisant bouger le point C et en laissant la trace du segment [CD] ;
- on peut changer la vue progressivement pour voir la section plane de face ;
- on peut changer la vue progressivement pour voir le rectangle ABCD de face ;
- on peut déplacer le point C sur le cercle de base pour entraîner le rectangle ABCD ;

⁷Tous les fichiers informatiques qui suivent et qui vont être décrits dans cet article sont téléchargeables à partir d'un dossier accessible à partir du sommaire en ligne du numéro sur le site du « Portail des IREM (<http://www.univ-irem.fr/spip.php>) », sous la rubrique « Document annexe » figurant au-dessous du titre de l'article.

- on peut déplacer le plan de coupe par le point M ;
- on peut afficher le rayon et l'aire de la section plane.

Pour ces calculs, peu de difficultés sont notées. Il s'agit de retrouver et de réinvestir une connaissance des années précédentes, celle permettant de calculer l'aire d'un disque. À cet effet, on pourra visionner le fichier sur Internet réalisé avec le logiciel « CaRMetal⁸ » qui se trouve sur le site « CaRZine⁹ ». L'activité « Du disque vers le triangle rectangle » d'Éric HAKENHOLZ montre comment on peut expliquer la formule de calcul de l'aire d'un disque en le transformant en triangle rectangle, en utilisant la manière pré-infinitésimale de nos ancêtres grecs...

*Section d'un cône de révolution
par un plan perpendiculaire à son axe*

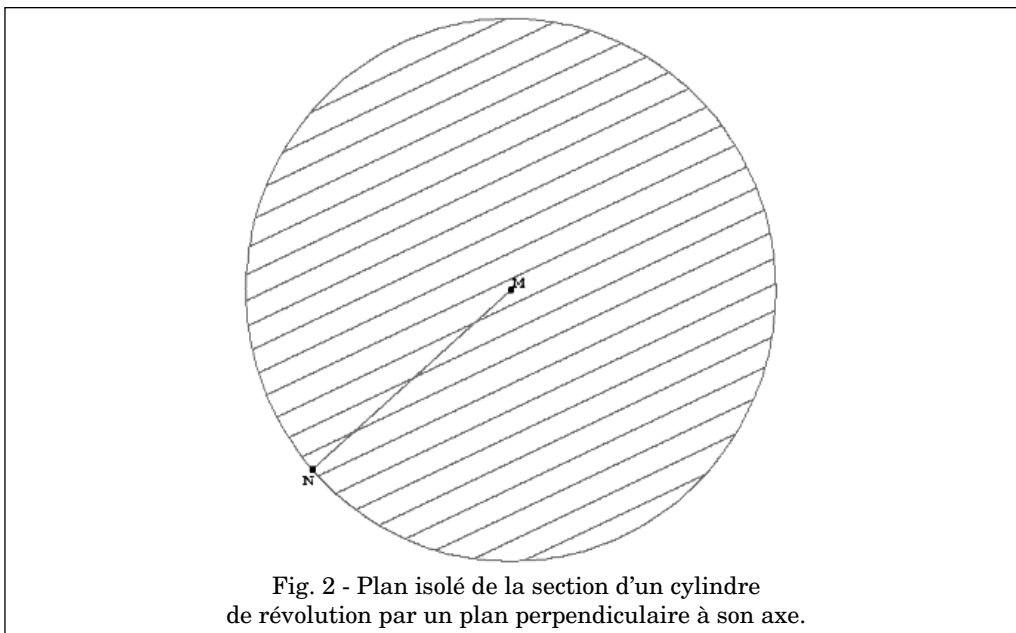
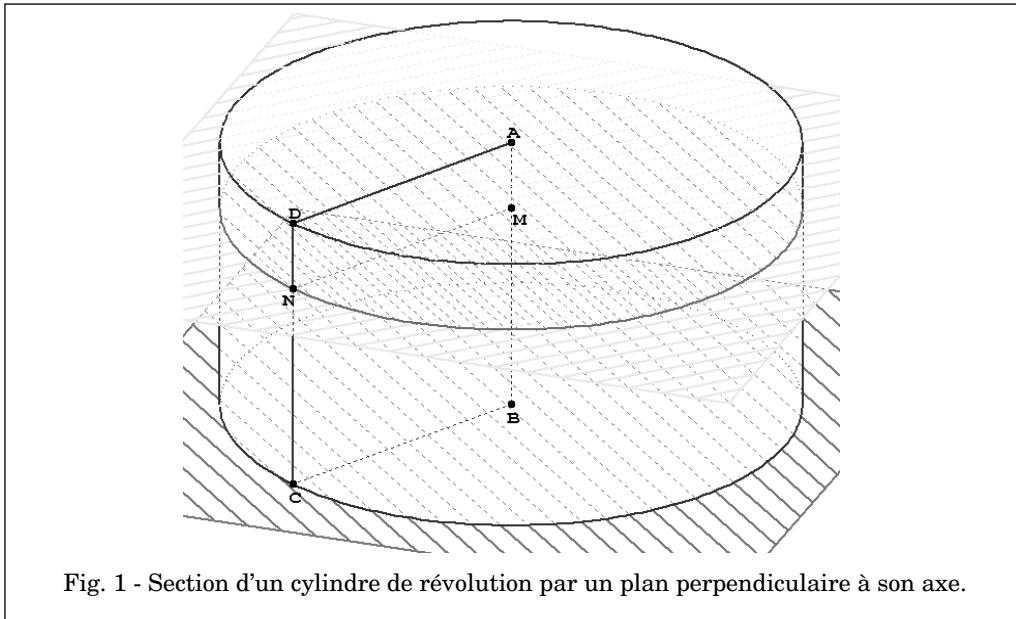
Dans un deuxième temps, je présente aux élèves deux autres fichiers qui interagissent :

- un fichier représentant un cône de révolution dont la base a pour rayon 4 cm, dont la hauteur mesure 4 cm, représenté en perspective cavalière et une section de ce cône par un plan perpendiculaire à son axe, comme sur la figure 3 ;
- un fichier représentant le plan isolé de la section, comme sur la figure 4.

Je demande alors aux élèves de calculer l'aire de la section à différentes hauteurs. Ils commencent avec $AM = 1$ cm, puis ils refont le calcul pour plusieurs valeurs de AM . Quelques commandes propres au logiciel permettent d'aider les élèves à mieux appré-

⁸ <http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/>

⁹ <http://db-maths.nuxit.net/CARzine/>



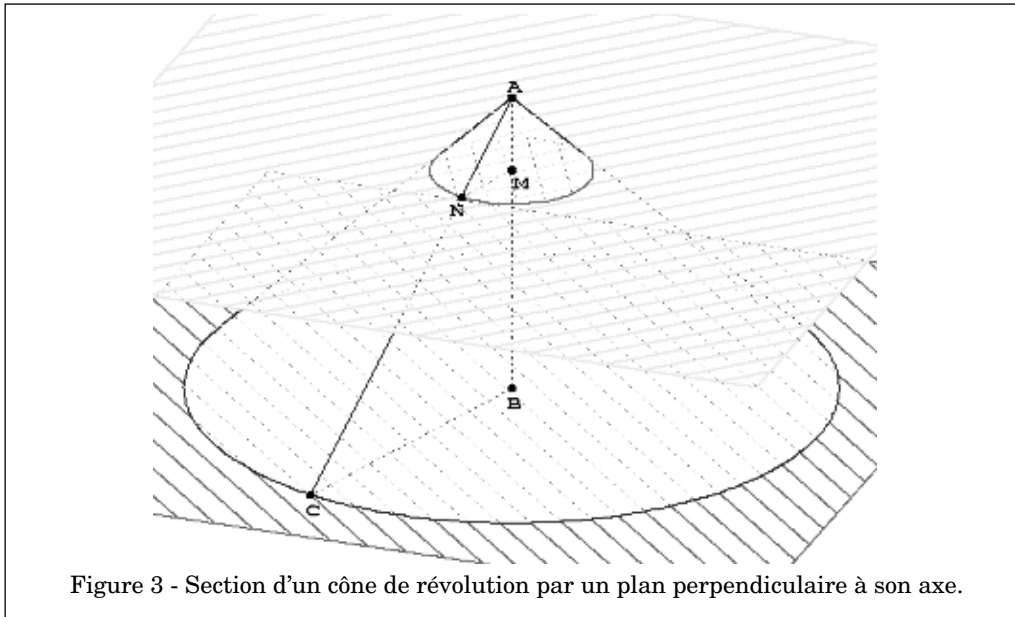


Figure 3 - Section d'un cône de révolution par un plan perpendiculaire à son axe.

hender, si besoin, ce qui est figuré sur ces fichiers :

- on peut générer le cône de révolution en faisant bouger le point C et en laissant la trace du segment [AC] ;
- on peut changer la vue progressivement pour voir la section plane de face ;
- on peut changer la vue progressivement pour voir le triangle rectangle ABC de face ;
- on peut déplacer le point C sur le cercle de base pour entraîner le triangle ABC ;
- on peut déplacer le plan de coupe par le point M ;
- on peut afficher le rayon et l'aire de la section plane.

Pour le premier calcul, une première difficulté apparaît, celle de trouver le rayon de la section. En changeant progressivement la

vue pour voir le triangle ABC de face, les élèves repèrent, sans difficulté, une configuration de THALES, qui va leur permettre d'aboutir.

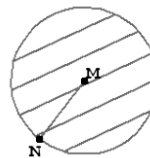


Figure 4 - Plan isolé de la section d'un cône de révolution par un plan perpendiculaire à son axe.

*Section d'un solide par
un plan perpendiculaire à son axe*

Dans un troisième temps, je présente à nouveau aux élèves deux fichiers

qui une nouvelle fois interagissent :

- un fichier représentant un solide constitué du cylindre de la figure 1, évidé du cône de la figure 3, représenté en perspective cavalière et une section de ce solide par un plan perpendiculaire à son axe, comme sur la figure 5 ;
- un fichier représentant le plan isolé de la section, comme sur la figure 6.

Je demande encore aux élèves de calculer l'aire de la section à différentes hauteurs. Ils commencent avec $AM = 1$ cm, puis ils refont le calcul pour plusieurs valeurs de AM . On pourra reprendre les longueurs utilisées dans les deux premiers moments de la séquence. Quelques commandes propres au logiciel permettent d'aider les élèves à mieux appréhender, si besoin, ce qui est figuré sur ces fichiers :

- on peut générer le solide en faisant bouger le point C et en laissant la trace des segments [AC] et [CD] ;
- on peut changer la vue progressivement pour voir la section plane de face ;
- on peut changer la vue progressivement pour voir le rectangle ABCD de face, ainsi que sa diagonale [AC] ;
- on peut déplacer le point C sur le cercle de base pour entraîner le rectangle ABCD ;
- on peut déplacer le plan de coupe par le point M ;
- on peut afficher le rayon et l'aire de la section plane.

La difficulté réside ici à bien voir le solide considéré. Sa représentation avec le logiciel n'est pas forcément très convaincante quel que soit le mode de représentation choisi¹⁰. A cet effet, la possibilité de générer le soli-

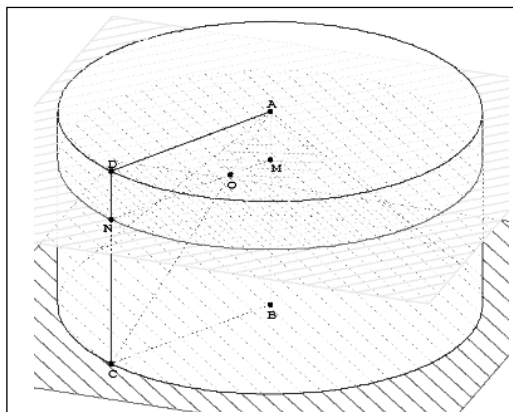


Figure 5 - Section d'un solide par un plan perpendiculaire à son axe.

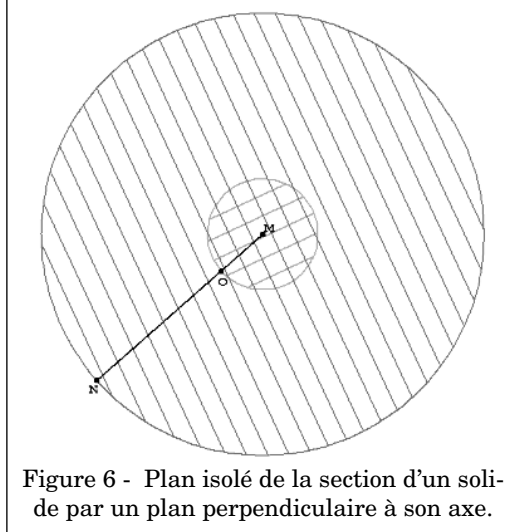


Figure 6 - Plan isolé de la section d'un solide par un plan perpendiculaire à son axe.

de en laissant les traces des segments [AC] et [CD] lorsque que le point C bouge sur le cercle, est une aide précieuse à la description orale du solide. Pour les calculs à effectuer, la référence aux deux premiers temps de la séquence se fait assez aisément dès lors que les élèves réalisent que la section est une couronne.

¹⁰ Fil de fer ; opaque sans traits cachés ; opaque avec traits cachés en pointillés.

Le fichier qui montre le plan isolé de la section prend toute son importance ici pour cette compréhension.

Section d'une boule par un plan

Dans un quatrième temps, je présente cette fois aux élèves deux fichiers qui interagissent :

- un fichier représentant une boule de rayon 4 cm, représentée en perspective cavalière et une section de cette boule par un plan, comme sur la figure 7 ;
- un fichier représentant le plan isolé de la section, comme sur la figure 8.

Le plan de coupe étant perpendiculaire au rayon $[AB]$, je demande alors aux élèves de calculer l'aire de la section à différentes hauteurs sur ce rayon. Ils commencent avec $AM = 1$ cm, puis ils refont le calcul pour plusieurs valeurs de AM , celles qui ont été utilisées précédemment avec le solide. Comme précédemment, quelques commandes propres au logiciel permettent d'aider les élèves à mieux appréhender, si besoin, ce qui est figuré sur ces fichiers :

- on peut générer la demi-boule en faisant bouger le point C sur un grand cercle de la sphère et en laissant la trace de l'arc de cercle BC ;
- on peut changer la vue progressivement pour voir la section plane de face ;
- on peut changer la vue progressivement pour voir le triangle rectangle AMN de face ;
- on peut déplacer le point C sur le cercle de base pour entraîner le triangle AMN ;
- on peut déplacer le plan de coupe par le point M ;
- on peut afficher le rayon et l'aire de la section plane.

La difficulté réside ici dans le calcul du rayon de la section. À cet effet, la possibilité de voir le triangle AMN de face aide considérablement les élèves à découvrir la nature du triangle. La longueur de l'hypoténuse n'est pas immédiatement donnée et un travail de révision sur la définition de la sphère semble débloquent la situation. L'application du théorème de PYTHAGORE, formalité pour la majorité des élèves de troisième, permet de calculer le rayon de la section, puis son aire.

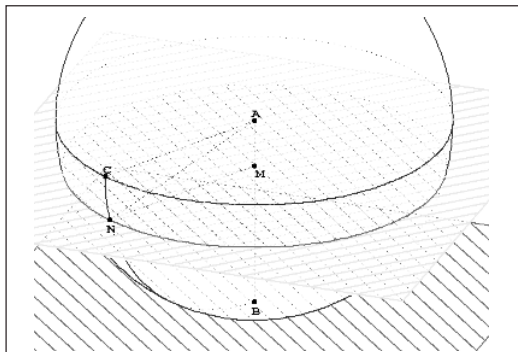


Figure 7 - Section plane d'une boule.

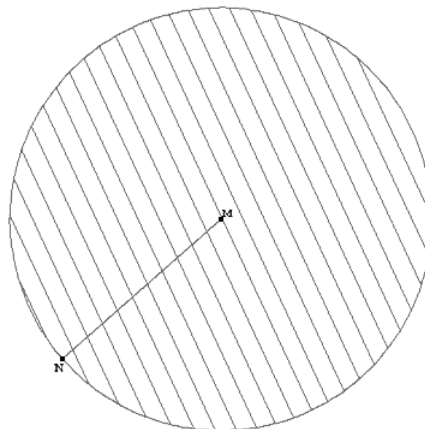


Figure 8 - Plan isolé de la section plane d'une boule.

La méthode de CAVALIERI exposée aux élèves

A ce stade du travail, je demande aux élèves s'ils ont des remarques à formuler concernant le travail fait jusqu'alors. Certains d'entre eux ne manquent pas d'observer que certaines aires des sections planes du solide de la figure 5 sont égales à d'autres aires des sections planes de la boule de la figure 7. Comme nous n'avons que quelques calculs à notre disposition, j'effectue les calculs dans un tableur de façon à multiplier le nombre de calculs pour les plus sceptiques. La figure 9 illustre un exemple de feuille pouvant être proposée en classe.

Ensuite, je projette en classe l'article proposé par l'encyclopédie libre en ligne « Wikipédia¹¹ » sur Bonaventura CAVALIERI. La première partie de l'article expose clairement pour des élèves de troisième le principe de CAVALIERI : « Bonaventura Francesco Cavalieri (en latin, Cavalerius) (1598, Milan - 30 novembre 1647) était un mathématicien et géomètre italien connu surtout pour le principe de Cavalieri, qui établit que les volumes de deux objets sont égaux si les secteurs des sections transversales correspondantes sont, dans tous les cas, égaux. Deux sections transversales correspondent si elles sont des intersections de l'objet avec des plans équidistants d'un plan de base donné. Ceci annonçait, en quelque sorte, le calcul intégral. ».

On pourra aussi montrer la figure 10 pour illustrer le principe ci-dessus : les deux solides constitués des mêmes pièces de monnaie ont le même volume puisque les aires des sections par un plan parallèle à la table sont égales.

AM	A1	r	A2	A	r'	A'
0	50.27	0	0	50.27	4	50.27
0.5	50.27	0.5	0.79	49.48	3.97	49.48
1	50.27	1	3.14	47.12	3.87	47.12
1.5	50.27	1.5	7.07	43.2	3.71	43.2
2	50.27	2	12.57	37.7	3.46	37.7
2.5	50.27	2.5	19.63	30.63	3.12	30.63
3	50.27	3	28.27	21.99	2.65	21.99
3.5	50.27	3.5	38.48	11.78	1.94	11.78
4	50.27	4	50.27	0	0	0

A1: Aire de la section du cylindre
r: Rayon de la section du cône
A2: Aire de la section du cône
A: Aire de la section du solide

r': Rayon de la section plane de la boule
A': Aire de la section plane de la boule

Figure 9 - Feuille de calcul bilan.

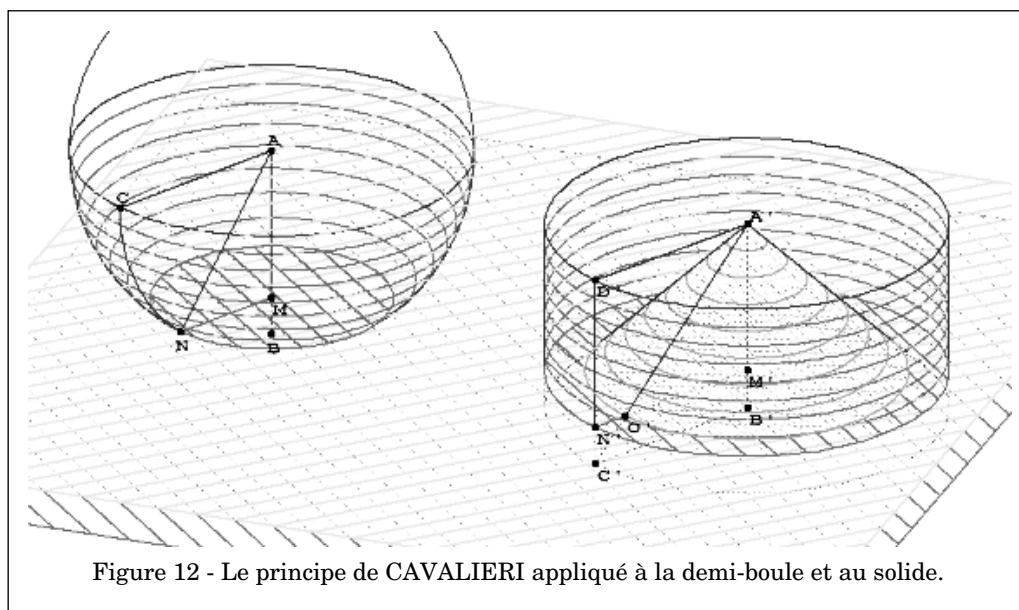
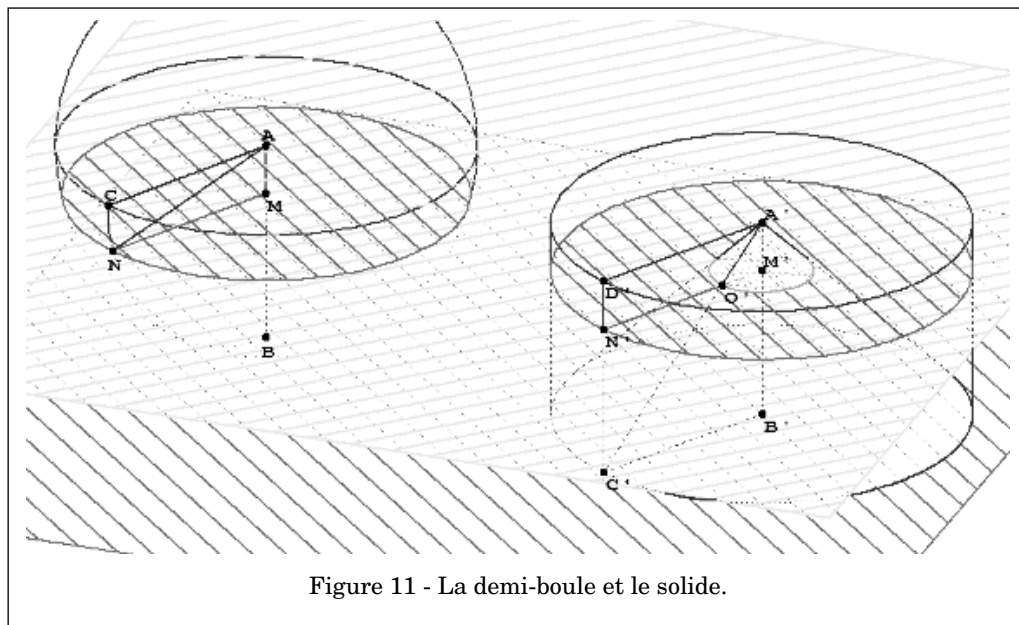


Figure 10- Illustration du principe de CAVALIERI.

Le volume de la boule

Je peux projeter maintenant aux élèves deux fichiers illustrés par les figures 11 et 12 pour résumer tout le travail précédent. Ayant alors assimilé ce procédé de raisonnement, il s'agit de terminer enfin par le calcul du volu-

¹¹ http://fr.wikipedia.org/wiki/Bonaventura_Cavalieri



me d'une demi-boule de rayon 4 cm, puis par celui de la boule. En effet, d'après ce principe, le volume de la boule est égal à celui du solide construit. Il faut bien sûr se souvenir des formules, apprises en classe de quatrième, permettant de calculer le volume d'un cylindre de révolution et d'un cône de révolution puisque l'on obtient le volume du solide par soustraction de ces volumes. La simplification du calcul $2\left(\pi \times 4^3 - \frac{1}{3} \times \pi \times 4^3\right)$ pourra poser

quelques difficultés aux élèves. Le plus important cependant est qu'ils peuvent maintenant obtenir un résultat numérique de ce volume.

Quelques remarques en guise de conclusion

Le choix du rayon de la boule

Il ne me semblait pas possible de réaliser avec les élèves la même séquence en remplaçant le rayon mesurant 4 cm par une variable positive désignée par la lettre r . Il fallait que les élèves constatent numériquement que des aires de certaines sections étaient égales. Un calcul algébrique de ces aires n'aurait pas permis de telles observations pour une majorité d'élèves de troisième. Il fallait donc choisir un rayon pour la boule, quitte à dire aux élèves, ce qui a été fait d'ailleurs, que l'on peut remplacer 4 cm par une autre valeur. C'est une sorte de justification générique.

Organisation du chapitre de géométrie dans l'espace

Cette séquence pédagogique a permis aussi rétrospectivement une réorganisation mathématique du chapitre de géométrie dans l'espace en troisième. En effet, de nombreuses

capacités de ce chapitre peuvent être mises désormais au service de cet objectif d'obtention, d'explication, de justification de la formule du volume de la boule. Auparavant, en ce qui concerne ma propre pratique dans le cadre de ce chapitre de troisième, on pouvait trouver notamment dans le cahier de cours des élèves, une énumération, un catalogue des différentes sections planes de solides inscrites au programme.

Il n'y avait pas véritablement de fil conducteur dans ce thème. Les théorèmes étaient énoncés les uns après les autres, sans véritable cohérence. Désormais, les sections planes de cylindres de révolution, de cônes de révolution par des plans perpendiculaires à leurs axes, les sections planes de sphères sont étudiées avec un but plus précis, celui de devenir des outils pour expliquer la formule du calcul du volume d'une boule. Le point de mire du chapitre est la formule et les différentes capacités inscrites au programme vont permettre d'atteindre cette cible. La cohérence est ainsi réalisée. Dans ce thème, les capacités ne vont plus se succéder sans liens entre elles, juste pour apporter aux élèves une meilleure perception dans l'espace. Outre cette dernière qui doit être renforcée, ces différentes capacités sur les problèmes de sections planes vont trouver une autre place, importante dans notre matière, celle d'être utilisées pour démontrer d'autres théorèmes.

Les autres formules

Il faudrait aussi se pencher sur toutes les autres formules enseignées au collège qui permettent de calculer des périmètres, des aires et des volumes. Le souci de ne pas donner une formule aux élèves sans expliquer sa construction doit toujours rester présent. Cela participera à une formation solide et nécessaire

quelles que soient l'hétérogénéité des classes et la future orientation de nos élèves de troisième :

- seconde générale et technologique ;
- seconde professionnelle ;
- première année d'apprentissage.

Dans le cadre du plan de formation des professeurs de mathématiques de l'académie de Poitiers, un stage intitulé « Périmètres, aires, volumes : le sens par l'histoire », apporte de nombreuses réponses à ces interrogations. Des questionnements sont posés sur la façon d'appréhender des formules permettant de calculer :

- le périmètre d'un cercle ;
- l'aire d'un disque ;
- le volume d'un cylindre de révolution ;
- le volume d'un cône de révolution ;
- le volume d'une pyramide ;
- l'aire de la sphère.

A propos de l'aire de la sphère, il est désormais possible, connaissant le volume de la boule,

de justifier la formule $4\pi r^2$. Pour cela, on pourra se rendre sur le site « Les Mathématiques Magiques¹² » de Thérèse EVEILLEAU, où une animation montre une boule découpée en une multitude de pyramides. Puisque l'on connaît maintenant le volume de la boule et la hauteur commune de toutes les pyramides, on peut alors en déduire la somme des bases des pyramides...

La liaison avec le lycée

Les élèves qui recevront un enseignement de mathématiques dans les classes scientifiques des lycées, pourront faire le lien avec l'activité réalisée en classe de troisième. En effet, cette méthode de calcul « pré-infinitésimal », est une première approche, un premier pas vers le calcul infinitésimal qui sera découvert et enseigné plus tard. Ces ponts entre les savoirs enseignés au collège et ceux enseignés au lycée ne peuvent qu'améliorer la formation des élèves et la compréhension d'une matière. Ils rendent plus cohérents la progression des apprentissages.

Références

- [CLA] Alexis-Claude CLAIRAUT, Éléments de géométrie, Éditions Jacques GABAY, 2006
- [GAL] GALILÉE, Discours concernant deux sciences nouvelles, PUF, 1995
- [CAB] Robert CABASSUT, Repères IREM. N° 47. p. 17-39. Pourquoi démontrer ? Un exemple allemand sur les aires et les volumes pour entrer dans le processus de preuve et d'explications., Topiques éditions, 2002
- [LEBHEM] Camille LEBOSSE et Corentin HÉMERY, Géométrie dans l'espace. Classe de première des lycées et collèges, Fernand NATHAN éditeur, 1949

¹² http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/vol_sphere.html