LES VOLUMES EN CLASSE DE SIXIEME

Jean-Paul GUICHARD
Irem de Poitiers

La mesure des solides a été, sans doute,
un des premiers objets qui ait fixé
l'attention des Géomètres.

(Clairaut, Élémens de Géométrie, 1753)

Mais l'étude des aires et des volumes a
une utilité plus haute qu'il faut envisager :
elle fait comprendre comment,
pour des fins pratiques,
les hommes ont pu être conduits à construire
la géométrie et elle justifie leur effort.

(Lebesgue, La mesure des grandeurs, 1935)

Mettre en place la notion de volume, tel est l'enjeu affiché du programme de la classe de sixième. Mais comment ? Un travail de recherche, entrepris depuis trois ans par le groupe Collège de l'Irem de Poitiers [1] en partenariat avec l'INRP, nous a amené à structurer le programme de sixième autour de six grandeurs constituant les six chapitres de l'année. Les volumes est l'un d'entre eux.

1. De la grandeur à la mesure

Comment mesurer le volume d'un objet ? Voilà la question centrale à laquelle notre chapitre a l'ambition de donner des réponses. Question de la vie des hommes de la plus haute antiquité jusqu'à nos jours. Question dont se sont emparés les mathématiques : et pour y répondre elles ont élaboré outils, notions, techniques et théories. C'est une partie de ce parcours mathématique que nous avons cherché à mettre en place.

Mais qu'est-ce que le volume d'un objet ? C'est une grandeur attachée à cet objet qu'il nous faut arriver à définir et à construire en tant que grandeur.

La première étape, comme pour toute grandeur géométrique, sera celle de la comparaison absolue : quand pourra-t-on dire

1 Chevalarias Thierry, Deligt Frédéric, Guichard Jean-Paul, Lebot Bertrand, Mercier Jean-Paul, Mesnier Walter, Pacaud Gaëlle, Peyrot Sébastien, Redondo Cyril, Tarra Fabrice, Terrade Laurent.

que deux objets ont même volume, ou que le volume de l'un est plus grand que le volume de l'autre ? La méthode du découpage-remplissage vue pour les aires n'est pas toujours praticable de façon effective en dimension 3. Aussi nous avons privilégié une entrée plus proche de la vie quotidienne et de ce qui a été vu à l'école primaire en parlant de contenance, de remplissage, de transvasement, donc de partir de solides creux, pour lesquels on peut parfois adapter la méthode vue pour les aires. Mais se pose alors le problème des solides pleins. Une première idée est de fabriquer un solide creux ayant le même volume. Comment faire dans la pratique ? Réaliser un moule. Pour les polyèdres, dont de nombreux exemples peuplent notre quotidien, ce moule peut être tout simplement une boite. Donc la question « Comment comparer le volume de deux objets ? », sujet de notre première étape, nous amène naturellement à traiter une nouvelle question : « Comment fabriquer le patron d'un polyèdre ? ». Nous allons pouvoir, ici, reprendre et approfondir le travail fait à l'école primaire. Une autre idée, classiquement vue en physique, pour comparer le volume de deux solides pleins est de placer l'un d'eux dans un récipient creux : on remplit ce récipient de « liquide » (eau, sable, blé…), on verse ce liquide dans un autre récipient, on remplace le premier solide par le second, on reverse le liquide, et on voit si le liquide remplit, ne remplit pas, ou déborde. De bonnes expériences, qui peuvent être utiles dans la vie pratique, et qui permettent d'appréhender la notion de place occupée, contenance en creux, donc de volume. A la fin de cette première étape on peut concevoir ce qu'est un volume, comment comparer des volumes, comment les ajouter ou les soustraire.

La deuxième étape sera celle de la comparaison relative, essentielle pour mettre en place la notion de mesure qui consiste à comparer la grandeur d'un objet à celle d'un objet pris pour référence. Il s'agit donc de savoir ce qu'est le multiple ou le diviseur d'un volume. Pour ce faire, nous avons choisi de nous centrer sur le solide du programme : le parallélépipède rectangle ou pavé, et de travailler la question en lien avec des représentations en perspective du parallélépipède rectangle. Construire un pavé de volume double, triple, …, de celui d'un pavé donné peut se faire avec des empilements et donner lieu à des résultats intéressants sur la comparaison des dimensions de ces pavés, la représentation en perspective cavalière des empilements obtenus permet de garder la trace des recherches faites. Si la multiplication du volume d'un pavé peut se réaliser concrètement de façon aisée, son partage en 2, 3, 4, … volumes égaux l'est beaucoup moins, sauf à disposer d'un laboratoire de mathématiques, cher à Borel (Bkouche, 2008), avec scies et tasseaux à débiter. Ce pourrait être l'occasion d'investir la salle de technologie ! A voir. Pour ma part, j'ai choisi de faire travailler le partage sur la vue d'un pavé en perspective, occasion de travailler en situation le problème de la représentation des solides sur une feuille de papier. A la fin de cette deuxième étape nous pouvons dire qu'en tant que grandeur la notion de volume est construite. Nous pouvons remarquer que durant cette étape :

— se revoit et s'approfondit la notion de fraction et de rapport : le numérique se construit au travers du géométrique ;

— se travaillent les objets géométriques et leurs représentations.

La troisième étape est alors celle de la mesure du volume. Or, comme le dit Clairaut, « Pour mesurer la solidité des corps, il est naturel de les rapporter au solide le plus simple, ainsi que pour mesurer les surfaces, on les a toutes rapportées au quarré. Or le solide le plus simple, c'est le cube, qui est en effet, en solide, ce que le quarré est en superficie » (Clairaut, 1753). Je conseille vivement au lecteur de poursuivre la lecture de la quatrième partie des Élémens de Géométrie de Clairaut qui lui permettra de connaitre « la manière de mesurer les solides et leurs surfaces », du pavé jusqu'à la sphère. En sixième, nous nous contenterons du volume du pavé, mais en en mesurant toute l'importance : en effet, de façon pratique ou purement intellectuelle, le travail fait à la première étape montre que l'on peut ramener le volume d'un solide à celui d'un pavé, et donc que la connaissance de la mesure du pavé nous permettra dans la vie pratique de trouver la mesure du volume d'une foule de solides. Nous pouvons remarquer aussi que ce solide élémentaire est à la base de toutes les stratégies mathématiques pour obtenir les formules de volume. Donc en sixième, nous insistons sur le fait que le m^3 est le volume d'un cube de 1 m d'arête, le litre ou dm^3 le volume d'un cube de 1 dm d'arête, et que trouver le volume d'un pavé en m^3 c'est trouver le nombre de cubes de 1 m d'arête qu'il faut pour remplir le pavé. Ce dénombrement débouche sur des formules pour calculer le volume du pavé. Et si les cubes ne remplissent pas complètement le pavé, pour évaluer le volume restant, on le décompose, comme pour les aires, en deux ou trois pavés que l'on remplira avec une unité plus petite, le dm^3, contenue 1000 fois dans un m^3. C'est cette multiplication par 1000 qui va permettre, comme le préconisent les programmes, de convertir les volumes. Occasion de faire du calcul mental, de retravailler le système décimal et d'approfondir l'écriture décimale des nombres. Là encore, la notion de nombre généralisé (Lebesgue, 1935), qui est celle des programmes de collège, se construit au travers du géométrique. Et c'est cette idée fondamentale de cube unité qui permet de comprendre que, dans la formule du calcul d'un volume, les longueurs des trois dimensions doivent être exprimées avec la même unité, unité qui doit être en adéquation avec l'unité de volume choisie. Nous pourrions arrêter là notre parcours. Mais il nous a semblé intéressant de faire interagir la formule du calcul du volume d'un pavé avec les techniques de découpage, addition, soustraction de volumes, vues dans les deux premières étapes, pour résoudre des problèmes de la vie pratique tels que le volume de béton à prévoir pour les fondations d'une maison ou la construction d'un escalier.

Ce parcours, centré sur la question de la mesure du volume, nous permet de mettre en place une organisation mathématique structurée et cohérente, où s'articulent les différentes connaissances et capacités du programme de sixième, et où peuvent s'ancrer les développements futurs. Il constitue la base de notre cours (voir annexe 1), et le cadre de notre organisation didactique. Mais pour mettre celle-ci en œuvre dans la classe, nous avons besoin de choisir le matériau sur lequel les élèves vont travailler : situations d'étude, problèmes à résoudre, exercices. Or dans notre recherche nous nous sommes assignés comme objectif de montrer aux élèves que les mathématiques se sont construites pour résoudre les problèmes que se sont posés et que se posent encore aujourd'hui les hommes. Aussi sommes-nous allés voir où vivait la notion de volume.

2. De l'écologie de la notion

« On aura voulu savoir, par exemple, combien il y avait de pierres de taille dans un mur dont la hauteur AD, la largeur AB, et la profondeur ou épaisseur BG étaient connues. On se sera proposé de déterminer la quantité que contient un fossé, ou un réservoir

ABCD, on aura voulu trouver la solidité d'une four, d'une obélisque, d'une maison, d'un clocher, etc. » (Clairaut, 1753). C'est la suite de la citation donnée en exergue. Connaitre les raisons d'être du savoir que nous avons à enseigner, et les faire vivre, voilà qui donne sens aux notions, techniques et méthodes que nous allons construire, et plus généralement à l'activité mathématique. Notre recherche s'est orientée vers deux pistes : l'histoire et la vie d'aujourd'hui.

Pour les volumes, l'histoire ancienne nous livre essentiellement des problèmes de travaux publics civils ou militaires : canaux, fossés (à creuser ou à combler), digues, ponts, murailles, mur de briques, escaliers, caves… Avec à calculer le coût : le nombre d'hommes et de jours pour réaliser ces travaux. C'est ce qu'on trouve dans les textes babyloniens (Thureau-Dangin, 1938), mais aussi dans le livre chinois « Les neuf chapitres sur l'art mathématique » (Liu Hui, 2004) dont le chapitre 5 s'intitule « Discussion des travaux publics ».

Les hommes d'aujourd'hui ont toujours besoin de faire creuser des fondations, de déplacer de la terre, des cailloux, du sable… Travaux, achat, enlèvement se payent au m^3. D'où l'idée d'aller se documenter sur ce qui se vend au volume. Consulter des catalogues de bricolage, mais aussi des devis de menuisiers ou de maçons, est, de ce point de vue, instructif. Et les marchandises se déplacent beaucoup à notre époque : fret maritime ou transport routier offrent d'autres ressources. La vie quotidienne fourmille, si l'on y prend garde, de volumes et de capacités : il suffit de consulter catalogues ou sites marchands, de lire la presse quotidienne… Les unités sont diverses, adaptées au type de produit, et nécessitent parfois des conversions qui ne sont plus factices, comme dans les exercices classiques. Si l'on veut connaitre le nombre de litres que contient un aquarium de 42 cm $\times$ 21,5 cm $\times$ 33 cm, il faudra nécessairement convertir les longueurs ou le volume. Il en sera de même pour savoir le nombre de m^3 de béton à prévoir pour couler une dalle de 15 cm d'épaisseur sur une terrasse rectangulaire de 8 m sur 3 m. A travers toutes ces investigations, on réalise :

— que les hommes ont besoin de calculer des volumes pour prévoir certains de leurs travaux, de leurs achats, de leurs déplacements…

— que les hommes ont besoin de fabriquer des solides de volume donné pour transporter certains matériaux, combustibles, aliments, d'où l'importance des patrons (mais pas uniquement) ;

— que ces volumes ont des formes très diverses, mais que le pavé est très présent dans la vie quotidienne, et que, dans beaucoup de cas simples, on peut s'y ramener par découpage, d'où l'importance du pavé.

Au fil des recherches de chacun et des choix faits, nous avons constitué une banque de situations, classées selon les trois temps de notre organisation mathématique, dans laquelle nous piochons les études, les exercices et problèmes, les sujets d'évaluation.

3. Une mise en œuvre dans la classe

Introduction

Je commence le chapitre par des échanges avec la classe à partir de trois questions examinées l'une après l'autre, et notées par les élèves sur leur cahier de travail :

— Quand parle-t-on de volume ?

— Qu'est-ce qui s'achète au volume ?

— Qu'a-t-on besoin de savoir faire avec les volumes ?

C'est l'occasion pour moi de prélever de l'information sur leurs connaissances, leur vécu, pour les élèves de s'exprimer facilement (en particulier ceux que l'on entend jamais), et pour la classe de percevoir quels vont être les enjeux du travail à venir. Le temps passé aux échanges est de l'ordre de 20 à 30 minutes, et une synthèse des réponses pour chaque question est notée sur leur cahier :

— On parle de volume pour une maison, une pièce, une piscine…

— S'achètent au volume : les boissons, l'eau, l'essence…

— On a besoin de savoir calculer un volume, fabriquer des volumes avec des patrons, comparer des volumes.

Certains disent qu'ils ne savent pas ce que c'est qu'un volume, une mise au point doit de faire quand certains parlent du volume du son, des échanges s'engagent sur des notions d'encombrement, d'espace occupé, avec des confusions avec la surface des solides ; certains pensent que la paille se vend au volume, d'autre non : il faudra faire des recherches… Ces quelques traits montrent que les échanges sont riches, que beaucoup de choses sont à clarifier et à construire, ce qui justifie pleinement le travail qui va être engagé.

Première étude

Après cette introduction, je propose une première étude **: Comparer les volumes des objets**. *Je présente des objets pour comparer leurs volumes :*

1) La boite cubique noire, de laquelle je sors le Rubik's cube : pas de problèmes.

2) La boite cubique noire et la boite verte : la notion de grandeur (hauteur) interfère avec celle de volume. Moyen de savoir ? Proposition d'un élève de découper : on peut le faire (ma collègue Amélie l'a fait). On essaie de la faire rentrer, on marque ce qui dépasse (un peu moins de la moitié) et avec une deuxième boite identique qu'on loge dedans avec l'autre, il reste de la place : on peut donc conclure.

3) La boite noire et la bouteille de jus de fruit remplie de riz. Problème. Le riz donne des idées, mais la sonnerie a retenti. On réfléchit pour la prochaine fois.

A la séance suivante, on écrit sur le cahier de travail le bilan des comparaisons 1) et 2) et on reprend la comparaison 3). L'idée de verser le riz dans la boite est donnée par plusieurs. On fait l'expérience : c'est pareil ou presque. On discute : niveau du riz dans la bouteille, nature du « liquide » riz qui ne remplit pas exactement... On avance sur les méthodes, mais le sentiment qu'avec des solides ça va poser problème émerge.

4) Je sors un pavé de bois plat (dont le volume est en fait sensiblement égal à celui du Rubik's) et je demande comment on peut le comparer avec le Rubik's. Idées : découper le pavé

et essayer de le faire loger dans la boite noire. On discute. Un élève propose de faire des moulages. Je reprends l'idée, on revient sur l'expérience 3), et je propose de fabriquer des boites de même dimension que les 2 objets. Certains ont déjà fait des patrons de cubes et de pavés, et voient comment faire. On en parle un peu. Pour pouvoir les réaliser on fait un schéma en perspective (3D pour eux) : j'explique une méthode (la face de devant et la face de derrière en pointillée et décalée, on relie les sommets, et on met des traits pleins ou pointillés). Certains connaissent une autre méthode et une élève la montre (face de devant, arêtes parallèles et de même longueur, face arrière). On fait les deux schémas en perspective et je les cote au tableau à partir des mesures faites par deux élèves. Sonnerie. Pour la prochaine fois revoir l'étude 1 et réfléchir aux patrons.

Le cours suivant, certains sont revenus avec les boites faites... On écrit le cours Chapitre 5 Volumes 1. Comparer les volumes, définitions1, 2 et 3 (voir annexe 1), sur le cahier de cours. Puis, sur le TBI de la salle dans laquelle nous étions, nous sommes allés voir des porte-conteneurs (Google images porte-conteneurs. Site : http://navigateur.info/cargo/porte-conteneurs) pour préparer l'étude suivante et l'ancrer dans la vie. Je propose en devoir à la maison le travail effectif de comparaison esquissé au cours précédent. Je distribue le texte que les élèves lisent (voir annexe 2), et je réponds à des questions sur la confection des boites en montrant une boite d'aspirine « désossée » dont j'ai colorié les faces intérieures identiques de la même couleur. Il me semble important que les élèves fabriquent effectivement des solides creux, et qu'ils fassent effectivement les manipulations de remplissage. J'ai récupéré les boites faites, et les compte rendus des expériences (voir des exemples en annexe 2) : les divers matériaux et « liquides » utilisés, la rédaction des compte rendus, montrent un bon investissement dans la tache, mais aussi tout le chemin qu'il reste à parcourir pour certains : vocabulaire (carré au lieu de cube…), représentations fausses, mais nous ne sommes qu'au début du parcours, et tout cela sera revu et réutilisé sans arrêt ; par contre les problèmes d'organisation et de compréhension (relevé en classe des dimensions des deux objets mal fait, boites n'ayant rien à voir avec les contraintes données) seront plus difficiles à corriger.

A travers ce travail de comparaison absolue de volumes, la notion de volume commence à s'installer, et va se renforcer tout au long du parcours. Nous pouvons passer à la deuxième étape.

Deuxième étude

Pour aborder le deuxième temps de notre parcours, la comparaison relative, je commence par l'étude des multiples du volume d'un pavé, en amenant en classe une quarantaine de sucres (deux formes différentes), et en proposant d'étudier les différentes configurations correspondant au double du volume. Je distribue le texte ci-contre...

J'aurais pu faire manipuler par les élèves, avec quelques risques, deux sucres. J'ai préféré leur donner à voir, et faire travailler leur imagination, quitte à ce que certains puissent, à la demande, expérimenter. Je leur ai demandé de représenter en perspective leurs différents pavés.

Par contre des élèves sont venus, au bureau, manipuler deux boites plus grandes, donc plus visibles de tous, pour faire voir les trois pavés possibles dans le premier cas, qui se réduisent à deux dans le second cas. Dou-

Étude 2 : ranger des pavés

Deux sucres emballés ont les dimensions suivantes :

	Série fleurs	Daddysuc
longueur	3,7 cm	4 cm
largeur	1,7 cm	1,3 cm
hauteur	1,2 cm	1,3 cm

Chaque sucre emballé contient 3 morceaux de sucre. ***1) Ranger 2 pavés***
a) *Avec 2 sucres de la série fleurs, combien peut-on faire de pavés différents ? Donner les dimensions de chacun et comparer leurs volumes. Combien y a-t-il de morceaux de sucre dans chaque pavé ?*
b) *Refaire la même étude avec 2 sucres Daddysuc.*
2) Ranger 3 pavés
Refaire l'étude 1) avec 3 sucres.

bler le volume n'est pas doubler les dimensions… Occasion de travailler sur des automatismes qui ont la vie dure, et de sensibiliser les élèves à la démarche mathématique : pas d'affirmation sans preuve. Nous avons noté dans le cahier de cours le théorème 1, synthèse des découvertes faites (voir annexe 1). Puis j'ai donné des exercices du type :

— A partir des dimensions d'une boite, donner les dimensions d'une boite de volume double, triple...

— A partir de la représentation d'un pavé, représenter un pavé de volume double, triple.. ;

— Construire une boite de volume double, triple d'une boite de dimension données.

Pour les dimensions des boites, je suis parti de dimensions réelles trouvées dans le catalogue d'un grossiste en emballage pour les entreprises avec lequel un de mes collègues a pris contact.

Troisième étude

Pour parcourir la deuxième étape, il nous faut maintenant étudier le partage des volumes. J'ai choisi, pour le faire, de travailler sur une perspective cavalière d'un pavé : boite, pavé, représentation, le travail d'abstraction se fait petit à petit par de nombreux allers-retours.

Étude 3 : partager un pavé.
Partager un pavé $8 \times 3 \times 2$ *en deux, puis en trois, puis en quatre, puis en huit volumes égaux sur sa représentation en perspective cavalière.*

C'est l'occasion de refaire ensemble le dessin d'un pavé en perspective, d'aborder le problème du choix de l'unité de longueur, du raccourcissement et de l'angle des fuyantes. Pour le partage en deux, je demande aux élèves les plus rapides de trouver d'autres partages. Apparait alors le partage en diagonale. Pour les partages en 2 pavés, nous étudions le lien entre les dimensions du petit et du grand pavé. Pour chaque partage l'élève est obligé de refaire un dessin en perspective. Donc point besoin d'exercices systématiques sur les dessins en perspective : on s'exerce à travers l'étude du partage. Pour le partage en 3 pavés, sur les trois solutions deux vont poser problème : comment partager un segment en 3 parties égales. Mesure à la règle, et division d'un nombre décimal à un chiffre après la virgule vont être mobilisées : les savoir faire du programme deviennent fonctionnels ; et si certains ne savent pas faire, c'est le moment de revoir ou d'apprendre, parce qu'on en a besoin. Valeurs approchées et arrondis sont aussi mobilisés.

Puis nous notons dans le cahier de cours le théorème 2, synthèse des découvertes faites (voir annexe 1).

Les exercices vont porter sur les sujets suivants :

— A partir des dimensions d'une boite donner les dimensions d'une boite de volume moitié, tiers...

— Ranger des boites dans une boite plus grande (conditionnement des boites de parfum, palettage, transports...)

— Diviser une pièce en deux pièces de même volume.

Un diaporama de calcul mental permet de faire un premier point sur le travail fait.

Voici son contenu :

1) On considère une boîte de dimensions: $40\text{cm} \times 20\text{cm} \times 15\text{cm}$.

a/ Donner les dimensions d'une boîte de volume **double.**

b/ Donner les dimensions d'une boîte de volume **tiers.**

c/ Donner les dimensions d'une boîte de volume **moitié.**

2) Donner les dimensions d'une boîte ayant une face carrée.

3) a/ Dessiner en perspective un pavé.

b/ Représenter à côté un pavé de volume triple.

On voit qu'au cours de la deuxième étape de notre parcours, que l'on retrouve dans tous nos chapitres, les notions de multiples et de diviseurs élémentaires, pour lesquels les scores de réussite de l'évaluation institutionnelle de début d'année de sixième sont mauvais, sont systématiquement travaillés en situation ce qui leur permet de prendre petit à petit du sens.

Cette deuxième étape se termine par un devoir à la maison sur le volume de fret transporté par les porte-conteneurs, que nous avions vus sur Internet : occasion de travailler sur des comparaisons relatives de volume et d'explorer la troisième étape (voir annexe 2). Si la stratégie « attendue » est la plus fréquente, on trouve aussi une stratégie de mise bout à bout, en ligne, des conteneurs, pour revenir ensuite, par division par 20, à l'unité de référence, l'EVP, ce qui revient à utiliser une unité plus petite (1/20 d'EVP) pour échapper aux fractions (voir annexe 2). Quelques élèves multiplient les 3 dimensions des conteneurs, et obtiennent des résultats erronés, pensant obtenir des EVP alors qu'ils ont calculé des pieds cubes.

Quatrième étude

Nous abordons le problème de la mesure et du calcul via le pavé et le carré, dont nous avons déjà expliqué l'importance, dans un contexte de la vie pratique.

Étude 4 : stocker un tas de sable
J'ai commandé 12 m^3 de sable. Je veux stocker ce sable dans un bac ayant la forme d'un pavé. Quelles dimensions dois-je prévoir pour ce bac ?

Le travail d'appropriation de la situation, nous amène à discuter autour des questions : qu'est-ce qu'un m^3 ? Comment se représenter 12 m^3 ? Comment les répartir dans un pavé (assembler des cubes, les couper...) ? J'ai amené une boite d'un vieux jeu de cubes contenant 12 cubes qui illustre parfaitement la situation. Différentes solutions sont proposées. On discute des meilleurs choix dans la pratique, et on prend conscience qu'il y a une infinité de solutions. On pourrait envisager de trouver la hauteur du bac, si la surface au sol disponible était de 6 m sur 4 m par exemple, et ainsi ouvrir un nouveau champ de problèmes ; mais nous ne l'avons pas fait.

A la suite de cette étude, nous notons le cours relatif à la mesure d'un volume et au calcul du volume du pavé (voir annexe 1). Puis pour faire assimiler le cours aux élèves, je me connecte au site Mathenpoche (http://mathenpoche.sesamath.net/index.php?page=120), avec l'ordinateur de la salle de cours, que nous visionnons sur un téléviseur ou un TBI relié à l'ordinateur, suivant la salle dans laquelle nous nous trouvons. Je sélectionne « 6ème Géométrie 7 Espace » :

— Volumes 1 Par comptage, que l'on peut refaire plusieurs fois car les données sont aléatoires.

— Pour aller plus loin 1 Volumes par calcul.

Les élèves apprécient beaucoup, et nombreux sont ceux qui veulent aller taper et valider leur réponse sur l'ordinateur. Occasion fructueuse de faire du calcul mental, et de s'approprier le cours. Pour poursuivre l'activité de mesure par dénombrement de cubes chez eux, je leur donne à faire trois exercices du manuel en usage dans la classe : ce sont les premiers et ce seront les seuls exercices utilisables dans notre perspective ! Ensuite, même si c'est à la limite du programme, je donne à calculer des volumes tirés de la vie quotidienne : c'était l'enjeu de notre parcours. Volume utile de camions, de conteneurs, volume net d'un congélateur, volume d'aquariums, dalle de terrasse, fondation d'un mur, goudronnage d'une route, alimentation en eau de Barcelone… (Voir annexe 3). Ces exercices permettent de travailler l'adaptation des unités de longueur pour le calcul d'un volume dans une unité donnée. Les 3 dimensions doivent être dans la même unité. Si je veux un volume en m^3, il me faut des dimensions en m, si je le veux en litres, donc en dm^3, il me faut des dimensions en dm. C'est l'occasion de faire des changements d'unités. La partie du cours sur les conversions sera alors notée, avant de terminer par le calcul d'objets à faces rectangulaires (voir annexe 1).

Conclusion

Notre parcours a duré quatre à cinq semaines au cours desquelles nous nous sommes donné des outils pour mesurer et comparer des volumes tout en approfondissant la notion de volume, construite en tant que grandeur, à travers un travail géométrique associant figures et nombres. Il se termine par un bilan (voir annexe 4).

4. Bilan et perspectives

On pourrait poursuivre le parcours en étudiant des variations :

— Variation du prix en fonction du volume consommé (eau, gaz, fuel...)

— Variation de la hauteur en fonction du volume (fabrication de la jauge d'une cuve à fuel parallélépipédique)

— Variation du volume en fonction du temps (débit, clepsydre...)…

Ce serait l'occasion de faire des tableaux, des graphiques, d'utiliser le tableur. Donc, après avoir intégré des éléments des parties 2 et 3 des programmes (Nombres et calculs, Géométrie) cela permettrait d'intégrer aussi des éléments de la partie 1 (Organisation et gestion de données. Fonctions). Les grandeurs apparaissent alors comme des notions intégratrices permettant de traiter et d'articuler toutes les parties du programme. C'est d'ailleurs autour d'elles que se sont construites toutes les mathématiques élémentaires. Ce qui explique notre choix, annoncé au début de l'article, d'organiser l'année de sixième autour de six grandeurs.

Une deuxième remarque est que la conception du parcours que nous avons décrite fournit un cadre à l'organisation du travail en classe, à partir duquel une grande variété de mises en œuvre est possible, étant donné la richesse des situations que l'on peut choisir, comme nous l'avons montré dans la deuxième partie de l'article. L'un d'entre nous, par exemple, a exploité de nombreuses situations liées au conditionnement et aux emballages pour le transport des marchandises.

Enfin, nous avons voulu mettre en place autre chose que le savoir émietté qui est actuellement dispensé. Les savoir faire du programme sont présents dans notre parcours, mais contextualisés dans une problématique de réponses à des questions vivantes. Ces questions, nous les avons fait vivre dans un parcours : de la notion floue de volume à celle d'une grandeur mathématique, mesurable et calculable. Parcours où ont interagi objets réels, objets construits et objets représentés, où s'élabore un savoir fonctionnel, où aspect pratique et abstraction ne sont pas séparés, mais au service l'un de l'autre dans l'esprit des mathématiques mixtes (Bkouche, 2006, 2003).

La démarche décrite pour ce chapitre consacré aux volumes est maintenant, pour nous, celle de tous nos chapitres : à partir de quelques grandes questions en lien avec la vie des hommes, nous organisons un parcours où l'étude de ces questions amène à construire les savoirs et techniques au programme, et ainsi à leur donner du sens.

Références bibliographiques

BKOUCHE Rudolf. Des laboratoires de mathématiques, Metz : *Repères IREM*, 2008, n° 70.

BKOUCHE Rudolf. « La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques ». Dans *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9. Article disponible sur le site de Culturemath

http://www.dma.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/pdf/Bkouche.pdf

« La géométrie élémentaire, une science physique ? » *Actes du colloque de la CII Géométrie* de Liège, 2003. Article disponible sur le Portail des IREM :

http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/lieg4_physique.pdf

CLAIRAUT Alexis. *Les Éléments de Géométrie de Clairaut* Paris : Lambert et Durand, 1741. Rééd. Paris : J. Gabay, 2006. Fac simile de l'édition de 1753, Laval : éditions Siloë, 1987. Préface publiée dans *Petit x* n° 2. IREM de Grenoble 1983, p. 77-80.

LEBESGUE Henri. « La mesure des grandeurs ». Genève : Monographies de *L'Enseignement Mathématique* n° 1, 1935. Rééd. Paris : A. Blanchard, 1975.

LIU HUI. *Les Neuf Chapitres*, K Chemla, Dunod 2004. Chapitre 5

THUREAU-DANGIN François. *Textes mathématiques babyloniens*, transcrits et traduits. Publications de la Société Orientale ex oriente lux : tome 1er. Leyde : E.J. Brill, 1938. Retirage IREM de Dijon.

ANNEXE 1

Le cours

Chapitre 5 : LES VOLUMES

1 Comparer des volumes

1) **Définition 1**

Deux objets ont le même volume si on peut les remplir avec la même quantité de « liquide » (eau, sable, riz...).

2) **Définition 2**

Un objet a un volume plus petit que celui d'un autre objet

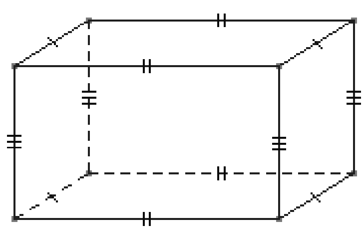
1. si on peut le placer à l'intérieur de l'autre en bloc ou en morceaux,
2. ou bien, s'il faut moins de liquide pour remplir le premier objet que le second.

Remarque : les volumes les plus faciles à comparer sont ceux des pavés.

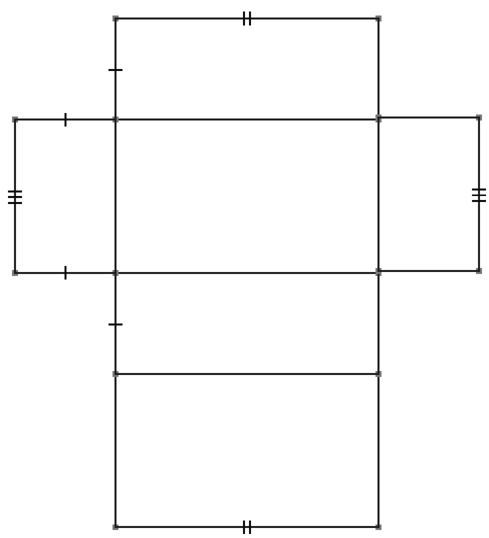
3) **Définition 3**

On appelle *pavé* ou *parallélépipède rectangle* un objet ayant la forme de la salle de classe (ou d'un morceau de sucre), c'est-à-dire formé de 6 faces qui sont des rectangles perpendiculaires et deux à deux identiques. Les douze côtés de ces rectangles, égaux 4 à 4, sont les *arêtes* du pavé.

On peut le construire à l'aide d'un *patron*, figure plane formée des 6 faces bien disposées.



vue en perspective

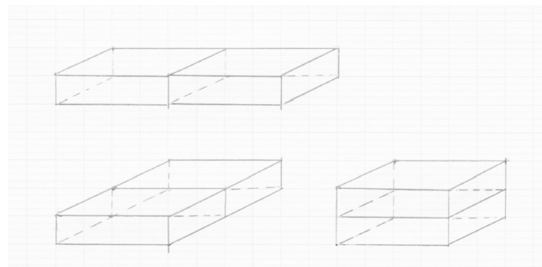


patron

4) **Théorème 1**

Pour *doubler* le volume d'un pavé, il suffit de doubler *une* de ses dimensions : la longueur, ou la largeur, ou la hauteur.

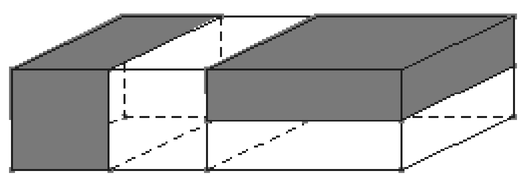
Pareil pour tripler, quadrupler, ... son volume.



5) **Théorème 2**

Pour *partager* un pavé en 4 pavés de même volume, il suffit de partager *une* de ses dimensions en 4 parties égales : la longueur, ou la largeur, ou la hauteur.

Pareil pour partager en 2 (moitié), en 3 (tiers)….



Remarque :

Un pavé peut être partagé de plusieurs façons en pavés de même volume qui n'ont pas forcément la même forme. Sur la figure, le pavé a été partagé en 4 pavés qui ont chacun pour volume le quart du volume du grand pavé.

2 Mesurer un volume

1) **Définition 4**

Mesurer le volume d'un objet c'est le comparer au volume d'un objet choisi pour unité. Un des objets les plus simples à utiliser est le *cube* : c'est lui que l'on utilise aujourd'hui.

- L'unité de base est un cube de 1 m d'arête appelé le mètre cube et noté m^3.

1 m^3 = volume d'un cube de 1 m d'arête

- Pour les liquides de la vie quotidienne, on utilise comme unité un cube de 1 dm (10 cm) d'arête appelé le décimètre cube ou litre :

1 dm^3 = 1 L = volume d'un cube de 1 dm d'arête

2) **Méthode**

Pour trouver la mesure du volume d'un objet, il faut savoir combien de cubes unités peuvent le remplir.

S'il reste de la place, on utilise une unité plus petite.

- Une méthode pratique est de verser la quantité de liquide qui correspond au volume de l'objet dans un pavé, puis de calculer le volume du pavé de liquide obtenu, car il est facile de remplir un pavé avec des cubes .

3 Calculer un volume

1) **Volume du pavé**

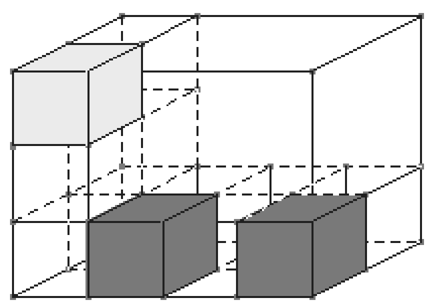
Si un pavé mesure 4 m sur 3 m sur 2 m :

— on peut placer sur le fond une couche de 8 cubes de 1 m d'arête (4×2)

— sur cette couche de 8 cubes on peut empiler 2 autres couches de 8 cubes, donc on peut remplir le pavé avec 24 cubes de 1 m d'arête (8×3), donc le volume du pavé est de 24 m^3 :

$(4 \text{ m} \times 2\text{m}) \times 3 \text{ m}$

On aurait pu aussi monter une tranche de 6 m3 (3×2), puis coller 3 autres tranches, donc remplir le pavé avec 4 tranches de 6 m3 soit 24 m^3 : $(3 \text{ m} \times 2\text{m}) \times 4 \text{ m}$



On peut résumer toutes les situations possibles par la formule :

Volume du pavé = Longueur x largeur x hauteur

Mais : Longueur x largeur = aire du rectangle de base, donc :

Volume du pavé = Aire du rectangle de base x hauteur

Remarque :
Pour utiliser ces formules, il faut évidemment que longueur, largeur et hauteur soient mesurées avec la même unité.

$$\text{m} \times \text{m} \times \text{m} = \text{m}^2 \times \text{m} = \text{m}^3$$

$$\text{dm} \times \text{dm} \times \text{dm} = \text{dm}^2 \times \text{dm} = \text{dm}^3$$

$$\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2 \times \text{cm} = \text{cm}^3 \ldots$$

2) **Changement d'unité**

Règle :

1) Si on prend une unité de longueur 10 fois plus grande, l'unité de volume est 1000 fois plus grande.

2) Si on prend une unité de longueur 10 fois plus petite, l'unité de volume est 1000 fois plus petite.

Exemples :

$$1\text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{dm} \times 1\ \text{dm} \times 1\ \text{dm} = 10\ \text{cm} \times 10\ \text{cm} \times 10\ \text{cm} = 1000\ \text{cm}^3$$

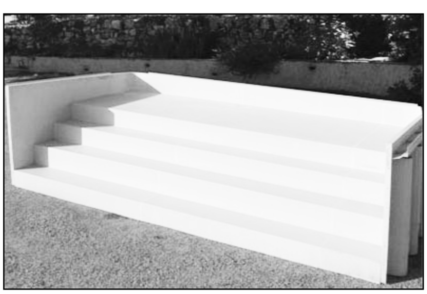
$$1\ \text{m}^3 = 1\ \text{m} \times 1\ \text{m} \times 1\ \text{m} = 10\ \text{dm} \times 10\ \text{dm} \times 10\ \text{dm} = 1000\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{L}$$

A retenir :

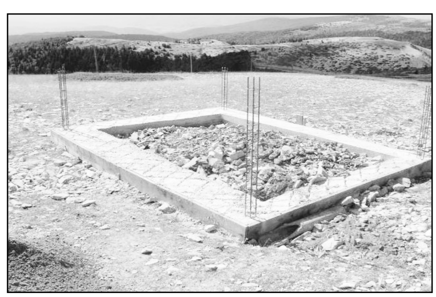
1 L , c'est-à-dire 1 dm ^{3} contient 1000 cm ^{3},
1 m ^{3} contient 1000 dm ^{3}, donc 1000 L

3) **Volume des objets à faces rectangulaires**

Méthodes :



1. on découpe l'objet en pavés, on calcule le volume de chaque pavé, puis on ajoute tous les volumes (exemple : escalier)



2. ou bien, on complète l'objet par des pavés pour former un autre pavé (exemple : fondations d'uen maison)

ANNEXE 2

Les devoirs à la maison

Devoir 1 : *Comparer les volumes du Rubik's cube et du pavé de bois.*

1) Réaliser 2 boîtes en carton léger ayant la même forme et les mêmes dimensions que les deux objets *(voir les deux schémas faits en classe)*. Pour cela étudier une boîte d'emballage *(découper une arête de la boîte, déplier et mettre à plat)*. **Inscrire votre nom sur chaque boite, et la rapporter en classe pliée**.

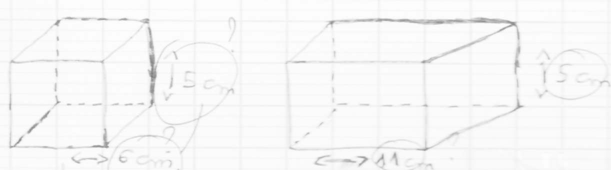
2) Comparer les volumes des deux boîtes avec la méthode vue en classe. **Ecrire sur une feuille, bien présentée, avec votre nom, le résultat de votre comparaison et la façon dont vous avez trouvé le résultat**.

La figure ayant le plus grand volume est "le pavé."

J'ai construit une autre boite pour chaque figure mais ouverte cette fois, j'ai ensuite pris des nouilles que j'ai prise pour que ce soit à ras bord du pavé. J'ai versé les nouilles dans le cube et elles ont débordés, donc le pavé a un plus grand volume que le cube.

2) les deux boites on = le même volume, j'ai prix des petits poix, j'ai mis les petits poir dans le rubik's cube puis dans la boite applatis et j'ai constater que dans les 2 cas j'avait besoin de la même quantité de petits poix.

2) Le ~~carré~~ cube à un plus petit volume que le pavé. J'ai construit un cube et un pavé mis des lentilles dans le cube et versé dans le pavé. C'est comme si le cube était à l'intérieur du pavé.



Cube

pavé

Lentilles.

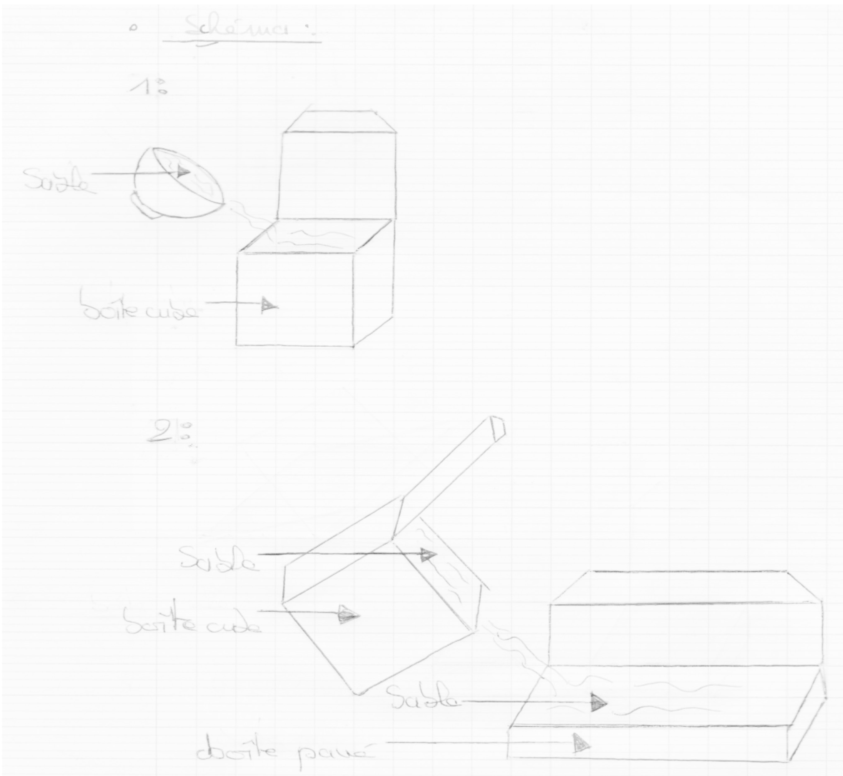
si toutes les dimensions ne sont pas les mêmes, ce n'est pas un cube (c'est un pavé)

Devoir à la maison pour le mardi 13 mai 2008
Comparer les volumes du Rubik's cube et du pavé de bois.
1) Réaliser 2 boites en carton léger ayant la même forme et les mêmes dimensions que les 2 objets *(voir les 2 schémas faits en classe)*. Pour cela étudier une boite d'emballage *(découper une arête de la boite, déplier et mettre à plat)*. ***Inscrire votre nom sur chaque boite, et la rapporter en classe pliée.***
2) Comparer les volumes des 2 boites avec la méthode vue en classe. ***Ecrire sur une feuille, bien présentée, avec votre nom, le résultat de votre comparaison et la façon dont vous avez trouvé le résultat.***

J'ai aussi placé en bloc le cube à l'intérieur du pavé. Qui ne remplissait pas ~~l'espace~~ tout l'espace.

Le Rubik's cube et le pavé de bois on le même volume.

J'ai versé du sable à ras bord dans la boîte cube puis je l'ai transvasé dans la boîte pavé, le sable était à ras bord dans les deux boîtes : elles ont donc le même volume.



Devoir 2 : *Volume de fret d'un porte-conteneurs*

Le volume de marchandise (conteneurs) transporté par un bateau porte-conteneurs est donné en EVP (Equivalent Vingt Pieds, ou TEU en anglais : Twenty feet Equivalent Unit). Un EVP est le volume d'un conteneur de 20 pieds de long : c'est le modèle le plus courant de conteneurs (20 pieds de long, 8 pieds de large, 8,5 pieds de haut). Mais il existe aussi des conteneurs qui ont même largeur et même hauteur pour pouvoir être bien stockés, mais dont les longueurs sont 10 pieds, 30 pieds, ou 40 pieds.

1) Un porte-conteneurs vide a chargé 2000 conteneurs de 20 pieds et 1500 conteneurs de 40 pieds. Quel est le volume transporté en EVP ?

2) Un porte-conteneurs a chargé 820 conteneurs de 20 pieds, 240 conteneurs de 10 pieds, 100 conteneurs de 30 pieds, et 510 conteneurs de 40 pieds. Quel volume en EVP a-t-il chargé ?

3) Recherche quel est le volume du plus grand porte-conteneurs.

c = conteneur(s)
p = pied(s)

Question 1:

2000 conteneurs x 20 pieds = 40000 pieds

1500 ~~c~~ c x 40 p = 60000 pieds → ça représente quoi ?

40000 p + 60000 p = 100000 pieds

100000 p : 20 p = 5000 EVP

mauvaise recopie

?

Ce porte-conteneurs peut transporté 5000~~0~~ EVP
(= 10000~~0~~ pieds).

Question 2:

820 c x 20 p = 16400 pieds

240 c x 10 p = 2400 pieds

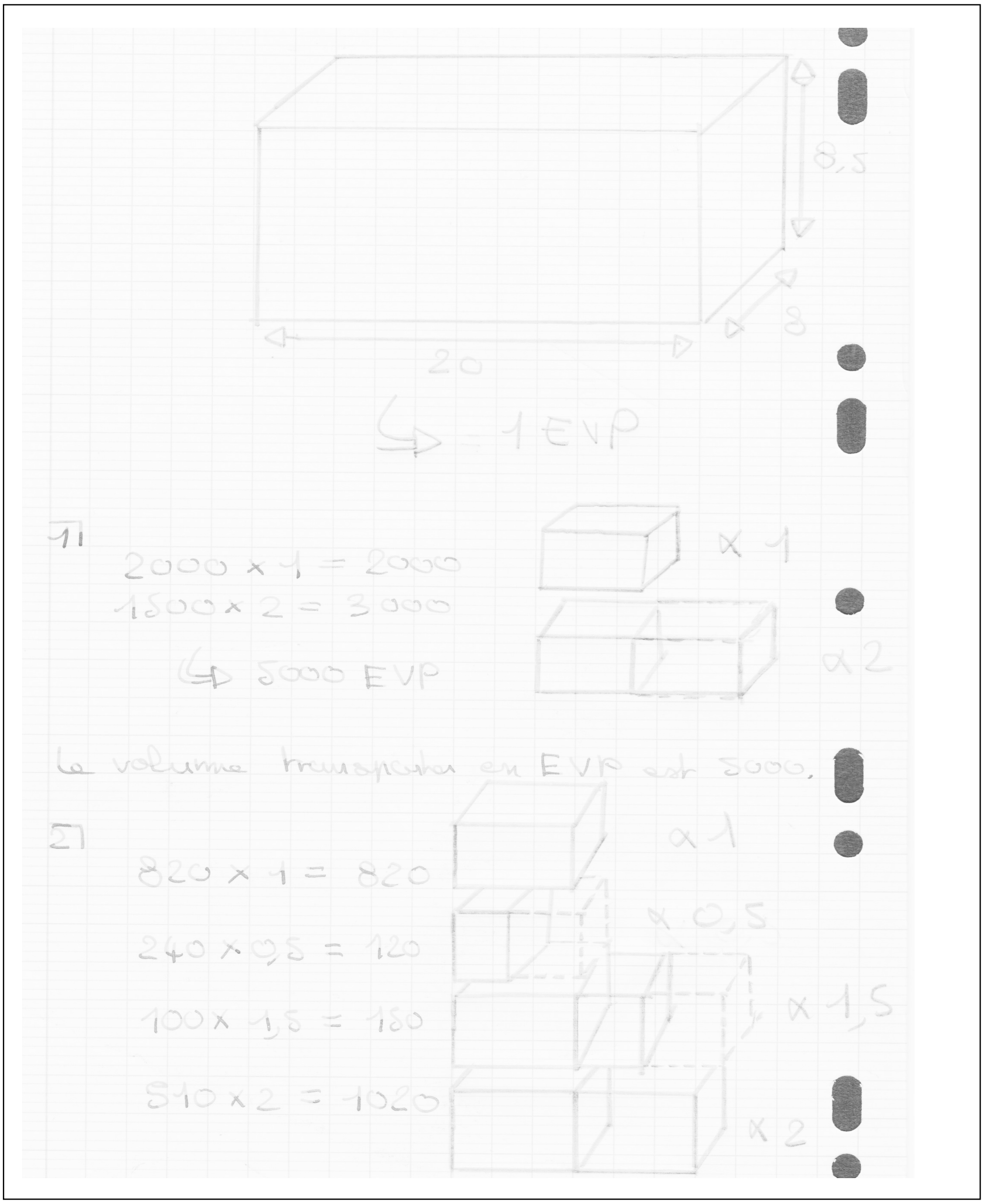
100 c x 3 p = 3000 pieds

510 c x 40 p = 20400 pieds

16400 p + 2400 p + 3000 p + 20400 p = 42 200 pieds

42 200 p : 20 p = 2 110 EVP

Ce porte-conteneurs peut transporter 2 110 EVP
(= 42 200 pieds).


8,5
8
20
1 EVP
1
2000 × 1 = 2000
1500 × 2 = 3000
5000 EVP
× 1
× 2
Le volume transporté en EVP est 5000.
2
820 × 1 = 820
240 × 0,5 = 120
100 × 1,5 = 150
510 × 2 = 1020
× 1
× 0,5
× 1,5
× 2

$(820 + 120 + 1020 + 150) = 2110$

Il va charger 2110 ~~[illegible]~~ EVP.

3)

1: 5000 EVP
2: 2110 EVP.

le 1er porte-conteneurs â chargé le plus grand volume!

ANNEXE 3

Calculer un volume

Volume utile d'un camion

RENAULT PREMIUM
P270.19 caisse frigorifique
PTC : 19 000 kg
Dimensions intérieures :
8,88 m×2,45 m×2,30 m (h)
Volume utile : 50 m ^{3}

Que signifie PTC ? Le donner en tonnes ? Le volume utile indiqué est-il exact ?

Volume utile d'un conteneur

Container CF 25
Volume utile : 25 m ^{3}
Dimensions extérieures :
longueur : 6 060 mm /largeur : 2 440 mm / hauteur : 2 600 mm
Dimensions intérieures :
longueur : 5 150 mm / largeur : 2 200 mm / hauteur : 2 200 mm

Le volume utile indiqué est-il exact ?

Volume utile d'un camion

22 Palettes 80×120×240
POIDS-LOURD : CU
10000 Kg /
Volume utile 50 m ^{3}

Que signifie CU ? La donner en tonnes ? Le volume utile indiqué est-il exact ?

Volumes d'aquariums

Le volume annoncé correspond-il aux dimensions de l'aquarium ?

a) Cayman 40 Classic 21 litres.
42cm×21.5cm×33cm.

b) 150×50×60 de haut. 450 litres.

c) 1,60 m long, 70 cm haut, 50 cm large ; 500 L

Remplir un aquarium

Aquarium
Micro Cosmos
30 - 27 litres

L'aquarium Micro Cosmos est disponible en 2 tailles : 20×20 cm et 30×30 cm.

a) Quelle est la troisième dimension de l'aquarium Cosmos 30 ?

b) Si on le remplit à 3 cm du bord, combien faudra-t-il de litres d'eau ?

c) Si on veut le remplir aux trois-quarts, combien faudra-t-il de litres d'eau ?

Volume de l'aquarium Melody

Melody
33 x 22.9 x 16.5 cm

Quel est le volume, en litres, de l'aquarium Melody ?

Volume de béton pour couler une dalle

On veut couler une dalle de béton de 15 cm d'épaisseur pour une terrasse rectangulaire de 8 m sur 3 m. Combien de m ^{3} de béton faut-il prévoir ?

Volume de béton pour couler les fondations d'un mur.

Pour monter un mur de 12 m de long, on a creusé une tranchée de 30 cm de large et 40 cm de profondeur que l'on va remplir de béton. Combien de m ^{3} de béton faut-il prévoir ?

Couler un escalier en béton

On veut faire, en béton, un escalier à deux marches : hauteur des marches 17 cm, profondeur des marches 24 cm, largeur de l'escalier 80 cm.
a) Faire un schéma en perspective, en y indiquant les dimensions.
b) Combien de m ^{3} de béton faudra-t-il prévoir pour faire l'escalier ?

Volume net d'un congélateur

Le volume net du congélateur indiqué sur la publicité est-il égal au volume du congélateur ? Y a-t-il une grande différence ? Explique pourquoi.

Réfection d'une route

On refait une portion de route de 8 m de large sur 1,4 km de longueur.
a) On enlève le goudron existant sur une épaisseur de 2,5 cm. Combien de m^3 de goudron va-t-on enlever ?
b) Les déchets de goudron obtenus représentent un volume plus grand : l'augmentation est de 30% environ. Combien de m^3 de déchets a-t-on à éliminer ? Combien de camions faudra-t-il prévoir pour éliminer ces déchets si on utilise des camions bennes de 15 m^3 de volume utile ?
c) On fait venir de l'enrobé de goudron pour refaire la route. Les semi-remorques amenant l'enrobé ont un volume utile de 24 m^3. Combien faudra-t-il prévoir de camions d'enrobé ?

Couler les semelles d'un garage

Combien de m^3 de béton faudra-t-il prévoir pour les fondations d'un garage de 6 m de long et 3 m de large, sachant que la largeur des fondations est de 40 cm et leur profondeur est de 60 cm ?
Faire un schéma vu de dessus.

Ravitaillement en eau.

a) Combien y a-t-il de cubes de 10 cm d'arête dans un cube de 1m d'arête ?
b) Retrouver le nombre effacé dans l'article.

Ravitaillement vital pour Barcelone

Un premier bateau chargé d'eau en provenance de Marseille est arrivé hier à Barcelone pour contribuer à l'approvisionnement en eau de la ville, alors que la Catalogne est frappée par une sécheresse importante, a indiqué le gouvernement régional. Ce premier bateau-citerne, chargé de 36.000 mètres cubes (m^3) d'eau (litres), avait quitté mardi Marseille. Au total, un million de m^3 d'eau, vendue par la Société des eaux de Marseille (SEM) et le Canal de Provence, iront alimenter les canalisations barcelonaises durant une période de trois mois.

Ils s'ajouteront aux cargaisons d'eau également transportées par bateau-citerne depuis Tarragone (Catalogne). Ces trois prochains mois au moins, six navires vont effectuer une constante noria depuis Tarragone et le sud-est de la France pour contribuer à garantir eau potable et douches quotidiennes aux Barcelonais.

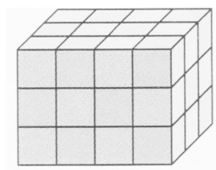
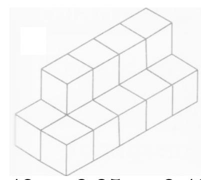
La sécheresse sévère dont souffre la région menace 5,5 millions d'habitants. La Catalogne a toutefois connu plusieurs épisodes de pluies intenses ces derniers jours, qui ont amélioré la situation.

ANNEXE 4

Le contrôle

6ème Contrôle volumes

1) Chaque petit cube a 1 cm d'arête.
Donner le volume de chacun de ces trois solides en cm^3 et expliquer votre méthode.

a) b)  c) 

2) Voici les dimensions intérieures d'un camion frigorifique : 6,48 m×2,35 m×2,40 m (h).
Quel est son volume utile en m^3 (arrondi)?

3) Un aquarium a pour dimensions : longueur : 1,30 m ; largeur : 55 cm ; hauteur : 60 cm.
a) La publicité donne comme volume 423 L. Est-ce exact ? Justifier la réponse.
b) Il est recommandé de ne le remplir d'eau que jusqu'à une hauteur de 53 cm. Combien faudra-t-il de litres d'eau pour le remplir jusqu'à cette hauteur de 53 cm ? Faire un schéma.
c) Si on le remplit aux quatre-cinquièmes, aura-t-on dépassé la hauteur d'eau recommandée ?

4) Représenter une boite en perspective, puis représenter à côté une boite de volume double.

5) Représenter une boite en perspective et la partager en trois volumes égaux.

6) Une caisse en carton a pour dimensions : 31 cm×21,5 cm×10 cm.
a) Donne les 3 dimensions
— d'une caisse qui a un volume 3 fois plus grand,
— d'une caisse qui a un volume 2 fois plus petit.
b) Ecris les deux théorèmes qui te permettent de trouver les dimensions de ces deux caisses.

7) Une boîte a pour longueur 7 cm, pour largeur 5 cm et pour hauteur 3 cm.
a) Calculer le volume de la boite en cm^3.
b) Sur une feuille, dessiner son patron.
c) Découper le patron et inscrire votre nom dessus.
d) Vérifier que le patron est juste en le pliant pour reconstituer la boite.
e) Coller le patron sur la feuille de copie en ne collant qu'une seule face.

Si tu as fini :

8) Donne d'autres solutions pour l'exercice 4).

9) Suite de l'exercice 3) : on met une pierre dans l'aquarium. Le niveau de l'eau monte de 7 mm. Trouver le volume du caillou.

10) Une terrasse a la forme et les dimensions suivantes
Pour la faire on a coulé du béton sur une épaisseur de 10 cm. Combien de m^3 de béton a-t-on utilisé ?

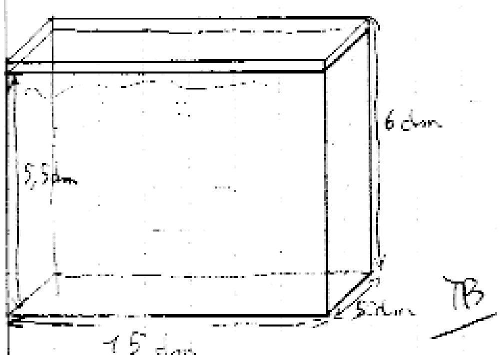
Question 2.

Longueur = 2,54 m / Largeur = 1,82 m / Hauteur = 1,95 m

2,54 m × 1,82 m × 1,95 m = 9,01446 m3 ≈ 9,01 m3
La camionette frigorifique fait 9,~~01~~ m3 environ.

Question 3.
a) 15 dm × 5 dm × 6 dm = 450 dm3 ou 450 litres.
Le volume indiqué est exact car cela fait 450 dm3
et le dm3 ~~est~~ le même volume que les litres,
cela est pareil.

b) 15 dm × 5 dm × 5,5 dm = 412,5 dm3 ou 412,5 litres



TB

Il faudra 412,5 litres.

c) 450 L : 6 = 75 L / $\frac{1}{6}$ = 75 L
75 × 5 = 375 L / $\frac{5}{6}$ = 375 L   B
Si on le remplit au $\frac{5}{6}$ il ne dépassera pas
la hauteur recommandée car ....